

*Рассматривается классификация субъектов экономической деятельности, построенная по аналогии с принципами классификации биоценоза. Приведены примеры моделей и численный эксперимент для взаимоотношений типа „жертва - эксплуататор”.*

© В.А.Заславский, С.А.Киреев,  
Э.И.Ненахов, 2004

УДК 518.9

В.А. ЗАСЛАВСКИЙ, С.А. КИРЕЕВ,  
Э.И. НЕНАХОВ

## **О ВЗАИМОДЕЙСТВИИ СУБЪЕКТОВ ЭКОНОМИЧЕСКОЙ ДЕЯТЕЛЬНОСТИ И ФОРМАЛЬНЫЕ МОДЕЛИ БИОЦЕНОЗА**

**Введение.** В рыночной экономике можно наблюдать несколько видов взаимодействия между разными субъектами экономической деятельности. Известно много примеров классификации таких отношений, например, общепринятые “заказчик - исполнитель”, “конкурент - конкурент”, “клиент - продавец”, “подрядчик - субподрядчик”. Очень интересный подход, на наш взгляд, использует биотическая классификация. Для классификации взаимодействий между видами согласно таким общепринятым категориям, как нейтрализм, аменсализм, коменсализм, конкуренция, хищничество (с учетом паразитизма) и мутуализм, П.Беркхолдер, Ю.Одум и Г.Кларк предложили следующую процедуру классификации [1,2]. Каждой паре видов сообщества, которая рассматривается, сопоставляется комбинация из двух символов, каждый из которых может быть плюсом (“+”), нулем (“0”) или минусом (“-”), в зависимости от направления влияния численности одного на скорость роста другого вида. Применим эту процедуру по аналогии к различным видам экономической деятельности.

Для каждой пары из множества существующих экономических категорий (компании, собственники, государство, ...) можно поставить в соответствие аналогичную комбинацию одного из приведенных символов. Под видом в экономических категориях будем рассматривать виды деятельности.

Два субъекта экономической деятельности находятся в одном виде, если они имеют тождественные наборы видов деятельности согласно классификатору видов экономической деятельности.

Согласно процедуре классификации будем считать, что знак плюс (“+”) означает: увеличение (уменьшение) численности одного вида вызывает увеличение (уменьшение) численности другого; знак ноль (“0”) – отсутствие какого-либо влияния; знак минус (“-”) – увеличение (уменьшение) численности одного вида вызывает уменьшение (увеличение) численности другого. Используя биотическую терминологию, можем построить классификацию межвидовых экономических отношений в зависимости от влияния численности каждого из видов пары, и скорость изменения численности другого (таблица).

ТАБЛИЦА. Типы взаимодействий

№ п/п	Тип взаимодействия	Влияние	
		вида 1 на вид 2	вида 2 на вид 1
1	Нейтрализм	0	0
2	Аменсализм	-	0
3	Коменсализм	+	0
4	Конкуренция	-	-
5	Жертва - эксплуататор	+	-
6	Мутуализм	+	+

Пусть существует множество видов экономической деятельности  $Q = \{q_1, \dots, q_n\}$ ,  $n \in N$ , где  $N$  - множество натуральных чисел, и назовем парой видов  $(q_i, q_j)$  такую пару, в которой  $q_i, q_j \in Q$ . Заметим, что в любой момент времени  $t$  влияние  $q_j$ -го вида на динамику  $q_i$ -го вида определяется скоростью изменения плотности популяции последнего, т.е. величины  $\frac{\partial x_i}{\partial t}$ , на бесконечно малое изменение плотности  $x_j(t)$  популяции  $q_j$  вида и выражена величиной  $c_{ij}(t)$  частной производной скорости  $\frac{dx_i}{dt}$  по плотности  $x_j$  в момент времени  $t$ :

$$c_{ij}(t) = \frac{\partial \left[ \frac{dx_i}{dt} \right]}{dx_j}. \quad (1)$$

Знак величины  $c_{ij}(t)$  характеризует направление (увеличение или уменьшение), а абсолютная величина – силу влияния  $q_j$ -го вида на  $q_i$ -й в данный момент времени  $t$ . Пусть известны все плотности  $x_1(t), x_2(t), \dots, x_n(t)$  и закономерности, которые описывают развитие популяций и представлены функциями  $f_i(x_1, \dots, x_n)$ . Тогда, если при расчете коэффициентов  $c_{ij}(t)$  на место  $\frac{dx_i}{dt}$  в выражение (1) подставить функции  $f_i(x_1, \dots, x_n)$ , то частные производные будут иметь вид

$$c_{ij}(t) = \frac{\partial f_i(x_1, \dots, x_n)}{\partial x_j}, \quad i = 1, 2, \dots, n; \quad j = 1, 2, \dots, n.,$$

В практически интересных случаях, что обусловлено закономерностями развития популяций, функция  $f_i(x_1, \dots, x_n)$  может иметь вид

$$f_i(x_1, \dots, x_n) = r_i(x_1, \dots, x_n) \cdot x_i,$$

где  $r_i(x_1, \dots, x_n)$  - удельная скорость изменения плотности популяции  $i$ -го вида, тогда для всех  $i \neq j$

$$c_{ij}(t) = \frac{\partial r_i(x_1, \dots, x_n)}{\partial x_j} \cdot x_i(t),$$

а при  $i = j$

$$c_{ij}(t) = \frac{\partial r_i(x_1, \dots, x_n)}{\partial x_j} \cdot x_i(t) + r_i(x_1(t), \dots, x_n(t)).$$

Рассмотрим характеристическую матрицу, которая описывает динамику развития множества видов:

$$C(t) = \begin{pmatrix} c_{11}(t) & c_{12}(t) & \dots & c_{1n}(t) \\ c_{21}(t) & c_{22}(t) & \dots & c_{2n}(t) \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ c_{n1}(t) & c_{n2}(t) & \dots & c_{nn}(t) \end{pmatrix}.$$

На основании матрицы  $C(t)$  можно получить количественную характеристику всей совокупности отношений между популяциями в момент времени  $t$ , так как для каждой пары видов  $(q_i, q_j)$  известно, как один из них влияет на другую по величине и направлению. Матрица частных производных  $C(t)$  является структурной матрицей. Как известно, удельные скорости изменения плотностей каждого вида можно достаточно точно аппроксимировать линейными функциями плотностей [3,4]:  $r_i(x_1, \dots, x_n) = \beta_{i0} + \beta_{i1}x_1 + \beta_{i2}x_2 + \dots + \beta_{in}x_n$ .

Тогда для всех  $i \neq j$   $c_{ij}(t) = \beta_{ij} \cdot x_i$ , а в случае  $i = j$   $c_{ij}(t) = \beta_{ii} + \beta_{i0}x_1 + \beta_{i1}x_2 + \dots + \beta_{in}x_n$ , где  $\beta_{i0}, \beta_{i1}, \dots, \beta_{in}$  - коэффициенты, которые характеризуют зависимость  $c_{ij}$  от плотностей популяций всех видов.

Интересно, что влияние каждого члена биоценоза на самого себя зависит не только от его собственной плотности, но и от плотностей других видов.

Рассмотрим подробнее типы взаимоотношений пар  $(q_i, q_j)$  видов экономической деятельности.

1. Нейтрализм (0,0). Пара видов  $(q_i, q_j)$  связаны между собой отношением нейтрализма, если они не имеют прямого влияния друг на друга. Формально это выражается в том, что переменная  $x_i$  отсутствует в числе аргументов функции  $f_i(x_1, \dots, x_n)$ , которая находится в правой части (2) для плотности  $x_j$ , а переменной  $x_j$  нет в аргументах функции  $f_i(x_1, \dots, x_n)$ . Заметим, что не прямое влияние этих категорий может быть достаточно существенным. Как пример можно привести существование трех видов экономических категорий: производители электронной аппаратуры, категория потребителей такой аппаратуры и служба ремонта электронной аппаратуры. В данном случае производители и служба ремонта не имеют прямого влияния друг на друга. Но если производители снизят выпуск данного вида продукции, то служба ремонта не будет загружена, следовательно, количество компаний, которые предоставляют подобные услуги, будет уменьшаться со снижением выпуска электротоваров.

2. Аменсализм (-, 0). К этому типу относятся межвидовые отношения между парами  $(q_i, q_j)$  абсолютно различной природы, которые проявляются в том, что один из видов пары, которые взаимодействуют, отрицательно влияет на рост другого. Последний не влияет на рост первого вида.

В биологии аменсализм – известный вид одностороннего взаимодействия между растениями, микроорганизмами, а также между парами видов, которые представляют разные царства органического мира (например, между растениями и животными).

В экономике в качестве примера такой вид взаимодействий будет иметь следующая пара: законодательный орган и предприятия, которые определенным образом влияют на развитие друг друга. Государственная структура, в данном случае, имеет право издавать некоторые документы, которые негативно влияют на работоспособность указанных предприятий, однако имеют законодательную силу и являются обязательными для указанных предприятий. А предприятия, в свою очередь, не имеют прямого влияния на государственные органы.

3. Коменсализм (+, 0). К данной категории относятся достаточно разнообразные случаи отношений между двумя видами  $(q_i, q_j)$ , когда первый из них положительно влияет на развитие другого, а второй абсолютно никак не влияет на первый. Как пример можно привести ситуацию, которая является аналогич-

ной предыдущей, но документы, изданные государственным органом власти, позитивно влияют на развитие данной отрасли промышленности. Один из таких примеров – это ряд законов изданных Верховным Советом Украины [5,6], среди них „О государственной поддержке книгоиздательской деятельности в Украине”, которые вводили ряд льгот на импорт полиграфического оборудования.

4. Конкуренция в широком смысле или интерференция (-, -). Конкуренцией в широком смысле (более корректно использовать термин «интерференция») будем называть какое-либо негативное взаимодействие между видами. Ее частными случаями являются: конкуренция (в узком понимании слова) за тот или иной ограниченный ресурс; антагонизм; непосредственная «борьба» между представителями разных видов (агрессия).

Данный тип взаимодействия является наиболее интересным. Для межвидовой конкуренции существует достаточно много математических моделей [7-9]. Среди множества моделей наиболее популярной является модель Лотки - Вольтерра, которую предложили независимо один от другого А.Лотка [7] и В.Вольтерра [9]. Если использовать общепринятые обозначения для логистического уравнения, то модель Лотки - Вольтерра для системы с конкуренцией двух видов можно записать следующим образом:

$$\left. \begin{aligned} \frac{dx_1}{dt} &= r_1 x_1 \left( 1 - \frac{x_1}{K_1} - \frac{\alpha_{12} x_2}{K_1} \right) \\ \frac{dx_2}{dt} &= r_2 x_2 \left( 1 - \frac{x_2}{K_2} - \frac{\alpha_{21} x_1}{K_2} \right) \end{aligned} \right\},$$

где  $r_i$  – удельная скорость роста,  $K_i$  – емкость среды для  $q_i$ -го вида при отсутствии конкурента, а положительные коэффициенты  $\alpha_{12}, \alpha_{21}$  являются мерой влияния одного вида на другой. Например, значения  $\alpha_{21} = 1$ ,  $\alpha_{12} = 2$  указывают на то, что объекты первого вида приводят к ингибации роста другого, так же как и его собственные, а отрицательное влияние первого будет вдвое сильнее, чем влияние на собственную популяцию объектов первого вида [4].

Известно, что не каждый тип взаимодействий можно охарактеризовать с помощью линейных уравнений. Большинство процессов как в природе, так и в экономике являются нелинейными и, как заметил Э.Петерс, “большинство ученых соглашались с тем, что линейные модели, которые использовались последние 40-50 лет, не отвечают реальной экономике” [10].

В этом случае моделью, которая описывает нелинейные взаимодействия, может быть система дифференциальных уравнений

$$\left. \begin{aligned} \frac{dx_1}{dt} &= x_1 \cdot r_1(x_1, x_2) \\ \frac{dx_2}{dt} &= x_2 \cdot r_2(x_1, x_2) \end{aligned} \right\},$$

где функции  $r_1(x_1, x_2)$  и  $r_2(x_1, x_2)$  - соответственно выражают нелинейную зависимость удельной скорости роста каждого из видов от плотностей  $x_1, x_2$ . Отметим, что имеет место самоингибация при  $\frac{\partial r_i}{\partial x_i} < 0$ , конкуренция при  $\frac{\partial r_i}{\partial x_j} < 0$ .

5. Отношения типа „жертва - эксплуататор” (+, -). К этой категории взаимоотношений принадлежат любые отношения между двумя видами ( $q_i, q_j$ ), при которых увеличение (уменьшение) плотности первого вида („жертвы”) влечет за собой увеличение (уменьшение) скорости роста количества другого („эксплуататора”). При этом, увеличение (уменьшение) плотности другого влечет за собой уменьшение (увеличение) скорости роста количества первого вида.

Примером может быть тот факт, что для некоторых видов производства или импортно-экспортных операций существуют, помимо таможенных структур, так называемые согласовательные учреждения. С увеличением предприятий, которые имеют дело с указанным видом деятельности, количество согласовательных учреждений растет, так как, во-первых, не хватает персонала для обслуживания предприятий, а во-вторых, с увеличением предприятий данного вида начинают вводить дополнительные лицензии или ограничения. Понятно, что с увеличением количества согласовательных учреждений вырастает себестоимость услуг и товара указанного вида деятельности, что является основанием для того, чтобы часть предприятий остановило свою работу в данном направлении. Таким образом, имеем типовой вариант вышеуказанных отношений. Динамику развития указанных субъектов деятельности типа «жертва - эксплуататор» можно описать системой дифференциальных уравнений [3]

$$\left. \begin{aligned} \frac{dx_1}{dt} &= ax_1 - bx_1^2 - cx_1x_2 \\ \frac{dx_2}{dt} &= -ex_2 + c'x_1x_2 \end{aligned} \right\}, \quad (2)$$

где коэффициент  $a$  характеризует скорость роста численности “жертвы”;  $e$  – скорость роста численности “эксплуататора”;  $b$  – коэффициент, характеризующий внутривидовую конкуренцию “жертвы”;  $c, c'$  - коэффициенты, которые характеризуют зависимость между видами.

Отметим, что при отсутствии “эксплуататора” рост численности “жертвы” будет происходить в соответствии с логистическим уравнением, со скоростью роста  $a$  и емкостью среды  $a/b$ , а скорость ликвидации “жертвы” пропорциональна произведению плотностей “эксплуататора” и “жертвы”.

Исследуем динамику развития системы. Для состояния покоя необходимо:

$$x_1 = \frac{e}{c'}; \quad x_2 = \frac{a}{c} - \frac{be}{cc'}$$

При этом  $x_1$  будет положительным, а  $x_2$  будет положительным только тогда, когда  $\frac{a}{c} > \frac{be}{cc'}$  или  $\frac{a}{b} > \frac{e}{c'}$ . Это неравенство акцентирует внимание на том моменте, что состояние покоя, соответствующее сосуществованию двух видов, может быть достигнуто только в случае, когда емкость среды для “жертвы” ( $a/b$ ) является достаточно большой для того, чтобы численность “жертвы” могла удовлетворить потребности “эксплуататора”. То есть продукция, которую изготавливает предприятие-“жертва”, должна иметь спрос и быть конкурентоспособной на рынке потребления.

На рис.1 показана фазовая траектория системы, которая имеет вид спирали.

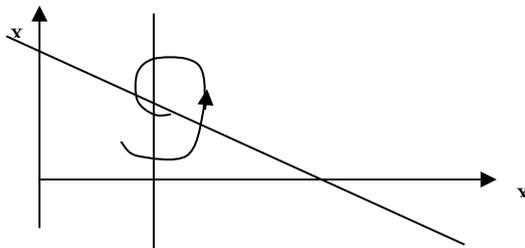


РИС. 1. Фазовая траектория решений системы (2)

Содержание спирали, которая закручивается против часовой стрелки, можно интерпретировать как то, что численность как “жертвы”, так и “эксплуататора” колеблется с уменьшением амплитуды, причем колебания численности “эксплуататора” отстают по фазе от колебаний численности “жертвы”.

Рассмотрим численный пример системы вида (2), который был положен в основу проведения компьютерного эксперимента.

$$\left. \begin{aligned} \frac{dx_1}{dt} &= 4x_1 - 3x_1^2 - 2x_1x_2 \\ \frac{dx_2}{dt} &= -x_2 + 0,6 \cdot x_1x_2 \end{aligned} \right\} \quad (3)$$

На рис.2 показан график зависимости численности каждого из видов от времени. Для системы (3) действительно можно увидеть, что она стремится к устойчивому состоянию с колебаниями, которые уменьшаются со временем:

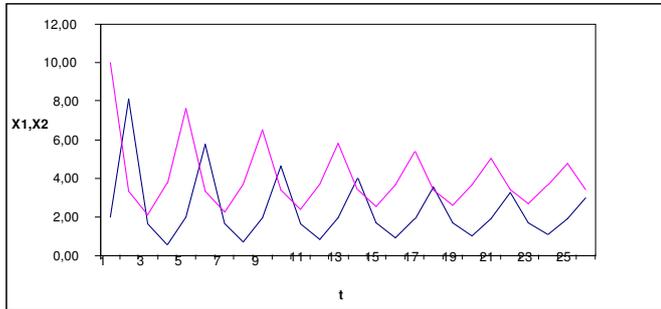


РИС. 2. График зависимости численности видов от времени

Из рис.2 видно, что система является саморегулируемой по количеству для предприятий каждого из видов экономической деятельности. Указанный факт также подтверждается фазовым рисунком на разрезе Пуассона (рис.3).

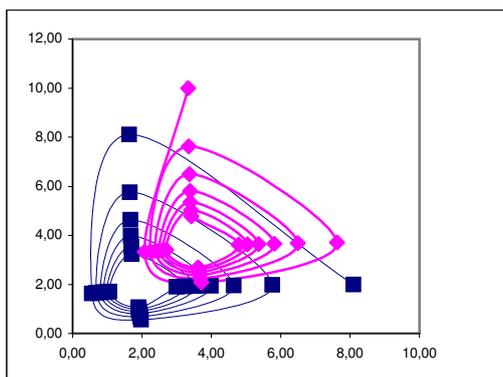


РИС. 3. Фазовый рисунок системы (3)

5. Мутуализм (+, -). Отношением мутуализма между двумя видами называется взаимно позитивное влияние или (+,+) - взаимоотношения между ними, которые в результате проявляются в том, что увеличение (уменьшение) численности какого-либо из них вызывает увеличение (уменьшение) скорости изменения численности другого.

Примером данных отношений могут быть два вида экономических категорий, как в классическом виде, отрасль производства и банковская система. При отсутствии кредитования со стороны банковской системы отрасль производства будет уменьшать свои мощности и наоборот. Аналогично с уменьшением (увеличением) количества предприятий количество банков уменьшается (увеличивается).

Мутуализм часто проявляется в экономических отношениях, поэтому рассмотрим примеры таких математических моделей.

Пусть уровень популяции каждого из двух видов  $(q_i, q_j)$  при отсутствии другого растёт согласно логистическому уравнению с потенциалом  $r_i$  и ёмкостью среды  $K_i$ :

$$\frac{dx_i}{dt} = x_i r_i \left( 1 - \frac{x_i}{K_i + \chi_{ij} \cdot x_j} \right), \quad i = \overline{1,2},$$

где коэффициенты  $\chi_{ij} > 0$ , которые фигурируют в знаменателе, указывают, на сколько увеличится ёмкость среды для  $q_i$ -го вида при увеличении численности  $q_j$ -го вида на единицу.

В некоторых случаях взаимодействие симбионтов происходит таким образом, что каждый изготавливает товары, необходимые для роста другого, т.е. непосредственно увеличивает удельную скорость роста его популяции. При этом описание мутуализма естественно строить исходя из второй, эквивалентной формы логистического уравнения:

$$\frac{dx_i}{dt} = x_i (r_i - \beta_{ii} x_i), \quad i = \overline{1,2},$$

где коэффициент  $\beta_{ii} = \frac{1}{K_i}$  указывает, на сколько уменьшается удельная скорость роста популяции  $q_i$ -го вида при увеличении его численности на единицу.

При наличии коэффициентов  $\beta_{12}, \beta_{21}$ , которые указывают, каким образом изменится удельная скорость роста количества каждого вида при изменении численности другого на единицу, систему уравнений динамики мутуализма можно представить следующим образом:

$$\frac{dx_i}{dt} = x_i (r_i - \beta_{ii} x_i + \beta_{ij} x_j), \quad i = 1,2; i \neq j.$$

Отметим, что существуют ситуации, когда влияние первого на второй более корректно описывать через увеличение ёмкости среды, а второго на первый – непосредственно через изменение удельной скорости роста [4]. Это приводит к системе

$$\begin{cases} \frac{dx_1}{dt} = x_1 (r_1 - \beta_{11} x_1 + \beta_{12} x_2), \\ \frac{dx_2}{dt} = x_2 r_2 \left( 1 - \frac{x_2}{K_2 + \chi_{21} \cdot x_1} \right). \end{cases} \quad (4)$$

Система (4) может также использоваться для качественного изучения природы мутуализма.

**Выводы.** Взаимодействие между видами экономической деятельности классифицируют с помощью существующих методов классификации биологических систем биоценоза. Положительным моментом является тот факт, что для описания динамики биоценоза существует достаточно большое количество математических моделей, которые можно использовать при описании взаимодействия элементов экономических систем. Модели представлены в явном виде, что важно для численного анализа и качественных исследований в моделируемых системах.

*В.А. Заславський, С.О. Кіреєв, Е.І.Ненахов*

ПРО ВЗАЄМОДІЇ СУБ'ЄКТІВ ЕКОНОМІЧНОЇ ДІЯЛЬНОСТІ ТА ФОРМАЛЬНІ МОДЕЛІ БІОЦЕНОЗУ

Розглянуто класифікацію суб'єктів економічної діяльності, побудовану аналогічно принципам класифікації біоценозу. Наведено приклади моделей та чисельний експеримент для взаємовідношень типу „жертва - експлуататор”.

*V.A. Zaslavsky, S.A. Kiryeyev, E.I. Nenahov*

ABOUT INTERACTIONS OF SUBJECTS OF ECONOMIC ACTIVITIES AND FORMAL MODELS

This work deals with the classification of subjects of the economic activities, constructed at the same principles as classification of biocenose is considered. The examples of models and results of the computer experiment for mutual relations such as "victim - exploiter" is calculated.

1. *Одум Ю.* Экология: в 2 т. М.: Мир, 1986. – Т.1. – С.50 – 100; Т.2 – С.21 – 27.
2. *Одум Ю.П.* Основы экологии. – М.: Мир, 1975. – 740 с.
3. *Смит Дм.* Модели в экологии. – М.:Мир, 1976. – 182 с.
4. *Петросян Л.А., Захаров В.В.* Введение в математическую экологию. – Л.:Изд-во Ленингр.ун-та, 1986. – 220 с.
5. ЗУ «Про внесение изменений в некоторые законы Украины по вопросам налогообложения» №2410-III от 17.06.2001 г. //ВВР.– 2001. – №30. – С.143.
6. ЗУ «Про государственную поддержку книгоиздательского дела в Украине» № 601-IV от 06.03.2003 г. //ВВР. – 2003. – №24.– С.162.
7. *Lotka A.J.* Elements of Physical Biology. – Baltimore: Williams and Wilkins, 1925. – 150 p.
8. *Volterra V.* Animal Ecology. – NY:McGraw-Hill. – 1926. – 181 p.
9. *Lotka A.J.* The Frequency Distribution of Scientific Productivity // J. of the Washington Academy of Science. – 1926. – 16(12). – P.317 - 323.
10. *Петерс Э.* Хаос и порядок на рынках капитала. – М.: Мир, 2000. – 333 с.

Получено 21.07.2004