УДК 519.8

В.М. ГОРБАЧУК, С.Г. НЕНАХОВА

ПОВЕДІНКА КОНКУРЕНТНОЇ ФІРМИ ЗА НЕВИЗНАЧЕНОСТІ

Для дослідження поведінки конкурентної фірми за невизначеності використовуються формалізації поняття уникнення ризику. На їх основі виведено залежності функції оптимального випуску, який максимізує сподівані прибутки фірми від очікуваної ціни, параметра мультиплікативного зсуву ціни, фіксованих витрат, капіталу. Наводяться необхідні інтерпретації отриманих результатів.

Вступ. Спробуємо відмовитися від припущення, що під час прийняття рішення про випуск фірма точно знає попит на свій продукт. Тоді можна вважати, що мета фірми – максимізувати сподівані прибутки [1–4]. Однак останнє повністю відкидає поведінку уникнення ризику [5, 6].

Відтак спробуємо систематично вивчити поведінку конкурентної фірми за цінової невизначеності та уникнення ризику [7]. Припускаємо, що рішення про обсяг випуску має прийматися перед тим, як стане відомою ринкова ціна. Уявлення фірми про ціну продажу можна розкрити розподілом суб'єктивної імовірності. Оскільки фірма не може вплинути на цей розподіл, то залишається в силі базове припущення про конкурентність фірми: фірма не може вплинути на ціну, що розглядається в імовірнісному сенсі [8–13].

Така модель, можливо, короткострокова: фірма приймає свої рішення щодо випуску, виходячи з міркувань виключно про короткострокові прибутки і не розглядаючи взаємозв'язку між цими рішеннями та довгостроковою інвестиційно-фінансовою політикою. Водночас повніша модель вимагала б більшого та докладнішого списку припущень про економічне середовище фірми. Тому дана модель сумісна з різними альтернативними наборами припущень про інвестиційні можливості, фінансові ринки та структуру власності.

Нехай фірма максимізує сподівану корисність прибутку π . Припустимо, функція $U(\pi)$ корисності фірми увігнута, неперервна, диференційована з

$$U'(\pi) > 0 \,,\ U''(\pi) < 0 \ .$$

Оскільки $-U'(\pi)/U''(\pi) < 0$, то фірма уникає ризику. Щоб функція корисності U задовольняла аксіомам фон Неймана – Моргенштерна [14] без порожения парадоксів типу Санкт-Петербургського [15], вона має бути обмеженою і зверху, і знизу [16]. Нехай функція витрат фірми

$$F(x) = C(x) + B \ ,$$

де x – випуск; $C(x)$ – функція змінних витрат; B – "фіксовані" витрати.

Припускаємо

$$C(0) = 0 \,,\ C'(x) > 0 \ . \tag{1}$$

Функція прибутку фірми

$$\pi = p\,x - F(x) \,,$$

де $p > 0$ – ціна випуску, яка вважається (суб'єктивною) випадковою змінною з функцією щільності $f(p)$ і сподіваним (expected) значенням

$$E(p) = \overline{p} \,.$$

Очевидно, $\pi(0) = F(0) = -B,\ \pi(x) \geq -F(x)$.

Сподівана корисність прибутку фірми

$$E[U(\pi(x))] = E[U(px - C(x) - B)] \ .$$

Необхідні та достатні умови максимізації $E[U(\pi(x))]$ по x :

$$0 = E[U'(\pi)\pi'(x)] = E[U'(\pi)(p - C'(x))] \,, \tag{2}$$

$$0 > E[U''(\pi)\pi'(x)\pi'(x) + U'(\pi)\pi''(x)] =$$

$$= E[U''(\pi)(p - C'(x))^2 - U'(\pi)C''(x)] = D(p) \ . \tag{3}$$

Задоволення умови (3) не потребує нерівності (1). Вважаємо, що умови (2), (3) визначають ненульовий, скінченний і єдиний розв'язок даної задачі.

За визначеності оптимальний конкурентний випуск x задовольняє рівності

$$C'(x) = p \ .$$

Як невизначеність p впливатиме на (оптимальний) випуск x? Чи можна в останній рівності підставити $\overline{p}$ замість p ? Покажемо, що за цінової невизначеності випуск менший, ніж за цінової визначеності [17]. Подібне було доведено для функції корисності з постійним абсолютним уникненням ризику [10].

Теорема 1. Фірма, яка уникає ризику, обирає такий обсяг випуску x , що

$$C'(x) \leq \overline{p} \,. \tag{4}$$

Дійсно, з (2) маємо

$$E[U'(\pi)p] = E[U'(\pi)C'(x)] \ ,$$

$$E[U'(\pi)(p - \overline{p}) = E[U'(\pi)p] - E[U'(\pi)\overline{p}] = E[U'(\pi)C'(x) - E[U'(\pi)\overline{p}] =$$

$$= E[U'(\pi)(C'(x) - \overline{p})] = (C'(x) - \overline{p})E[U'(\pi)] \ . \tag{5}$$

Оскільки

$$E(\pi) = E(px - C(x) - B) = \bar{p}x - C(x) - B\,,$$

то у випадку $p \geq \bar{p}$

$$\pi = E(\pi) + (p - \bar{p})x \geq E(\pi)\,,$$

звідки в силу $U''(\pi) < 0$

$$U'(\pi) \leq U'(E(\pi))\,,$$

$$U'(\pi)(p - \bar{p}) \leq U'(E(\pi))(p - \bar{p})\,.$$

У випадку $p \leq \bar{p}$ теж приходимо до останньої нерівності. Нерівність зберігається для сподіваних її частин:

$$E[U'(\pi)(p - \bar{p})] \leq E[U'(E(\pi))(p - \bar{p})] = U'(E(\pi)E(p - \bar{p})) = 0\,. \quad (6)$$

Тоді з формули (4) випливає

$$(C'(x) - \bar{p})E[U'(\pi)] \leq 0\,,$$

звідки в силу $U' > 0$ випливає нерівність (4).

За визначеності, припущення конкуренції вимагають від $C(x)$ умови (1) або U-форми; за невизначеності, співвідношення (4) не вимагає умови (1). Співвідношення (4) може показувати загальний вплив невизначеності [18].

Розглянемо питання граничного впливу невизначеності на оптимальний випуск, тобто питання впливу на x малого підвищення ризикованості розподілу . Застосуємо підхід [19], виписуючи ціну як

$$P = \gamma p + \theta\,,$$

де γ і θ – параметр мультиплікативного і адитивного зсуву відповідно. При збереженні середньої ціни

$$0 = dE(\gamma p + \theta) = E(p)d\gamma + d\theta\,,$$

звідки

$$d\theta / d\gamma = -\bar{p}\,. \quad (7)$$

Теорема 2. За умови (7) частинна похідна функції оптимального випуску x фірми по γ у точці $\gamma = 1$, $\theta = 0$ від'ємна:

$$\partial x / \partial \gamma < 0\,.$$

Прибуток фірми

$$\pi(x) = (\gamma p + \theta)x - F(x) = (\gamma p + \theta)x - C(x) - B\,,$$

а необхідною умовою максимізації $U(\pi(x))$ по x є

$$0 = E[U'(\pi)(\gamma p + \theta - C'(x))]\,.$$

Продиференціюємо останнє рівняння по γ:

$$0 = E[U''(\pi)(\partial\pi / \partial\gamma)(\gamma p + \theta - C'(x)) + U'(\pi)(p + \partial\theta / \partial\gamma - C''(x)(\partial x / \partial\gamma))]\,,$$

$$0 = E\{U''(\pi)[(p + \partial\theta / \partial\gamma)x + (\gamma p + \theta)(\partial x / \partial\gamma) - C'(x)(\partial x / \partial\gamma)](\gamma p + \theta - C'(x)) +$$
$$+ U'(\pi)(p + \partial\theta / \partial\gamma - C''(x)(\partial x / \partial\gamma))\}\,,$$

звідки, враховуючи (7),

$$0 = E[U''(\pi)(\gamma p + \theta - C'(x)(p - \bar{p})x + U'(\pi)(p - \bar{p})] +$$
$$+ (\partial x / \partial \gamma) E[U''(\pi)(\gamma p + \theta - C'(x))^2 - U'(\pi) C''(x)].$$

Враховуючи (3),

$$\partial x / \partial \gamma = -E[U''(\pi)(P - C'(x))(p - \bar{p})x + U'(\pi)(p - \bar{p}) / [D(P)]] =$$
$$= -xE[U''(\pi)(p - \bar{p})(P - C'(x))] / [D(P)] - E[U'(\pi)(p - \bar{p})] / [D(P)]. \qquad (8)$$

В силу нерівностей (3) і (6)

$$-E[U'(\pi)(p - \bar{p})] / [D(P)] < 0.$$

Оскільки знання $x \geq 0$, $U''(\pi) < 0$, $D(P) < 0$ не досить, щоб визначити знак $E[(p - \bar{p})(P - C'(x))]$ і першого доданка правої частини (8), то в загальному випадку знак $\partial x / \partial \gamma$ невизначений.

Для $P = p = \bar{p}$, тобто для значень параметрів ціни $\gamma = 1$ і $\theta = 0$, в силу $C'(x) = \bar{p}$ співвідношення (8) перепишемо у вигляді

$$\partial x / \partial \gamma = -xE[U''(\pi)(p - \bar{p})^2] / [D(p)] - E[U'(\pi)(p - \bar{p})] / [D(p)] < 0.$$

Перейдемо до вивчення порівняльної статики фірми. Просте припущення про існування уникнення ризику слабко обмежує ставлення фірми до ризику. Подальшим обмеженням на функцію корисності фірми є конкретний вигляд функцій уникнення ризику [16, 20]:

функція абсолютного (absolute) уникнення ризику $A(\pi) = -U''(\pi) / [U'(\pi)]$;

функція відносного (relative) уникнення ризику $R(\pi) = \pi A(\pi)$.

Видається слушним припустити, що $A(\pi)$ – спадна функція π: коли фірма стає багатшою (має більший дохід або прибуток), то має зменшуватися (принаймні, не збільшуватися) її премія Π за ризик за будь-яку ризиковану перспективу – різниця між математичним сподіванням віддачі від перспективи та її визначеним еквівалентом [16, 20, 21]. Зростання функції $R(\pi)$ по π означає, що абсолютне значення еластичності Π відносно π менше 1. Гіпотези про функції уникнення ризику застосовуються до портфельної теорії [16], купівлі страховки [22], оподаткування [23], ощадної поведінки [19] тощо.

Одним з основних результатів теорії фірми за визначеності є те, що фіксовані витрати B не мають значення у томі сенсі, що інфінітезимальне збільшення для B не впливає на обраний випуск $x > 0$.

Теорема 3. Нерівність $A'(\pi) < 0$ рівносильна $\partial x / \partial B < 0$.

Диференціюючи (2) по B, отримуємо

$$0 = E[U''(\pi)(\partial \pi / \partial B)(p - C'(x)) - U'(\pi) C''(x)(\partial x / \partial B)] = E[U''(\pi)(p(\partial x / \partial B) -$$
$$- C'(x)(\partial x / \partial B) - 1)(p - C'(x)) - U'(\pi) C''(x)(\partial x / \partial B)] =$$
$$= (\partial x / \partial B) E[U''(\pi)(p - C''(x))^2 - U'(\pi) C''(x)] + E[U''(\pi)(C'(x) - p)],$$

звідки в силу (3)

$$\partial x / \partial B = E[U''(\pi)(p - C''(x))]/[D(p)]. \tag{9}$$

Позначимо π (фіксований) рівень прибутків, що відповідає $p = C'(x)$. Значенням $p \geq C'(x)$ та x, достатньо близькому до розв'язку рівняння (2), відповідає рівень прибутку $\pi \geq \pi$. Тоді в силу $A'(\pi) < 0$

$$A(\pi) \leq A(\pi),$$

$$-U''(\pi)/[U'(\pi)] \leq A(\pi).$$

Оскільки $U'(\pi) > 0$ та $p \geq C'(x)$, то

$$-U'(\pi)(p - C'(x)) \leq 0,$$

$$-U''(\pi) \leq A(\pi)U'(\pi).$$

Тому

$$U''(\pi)(p - C'(x)) \geq -A(\pi)U'(\pi)(p - C'(x)).$$

Неважко перевірити, що остання нерівність зберігається для випадку $p < C'(x)$. Беручи сподівання від обох частин цієї нерівності, отримуємо, враховуючи (2),

$$E[U''(\pi)(p - C'(x))] \geq -A(\pi)E[U'(\pi)(p - C'(x))] = 0.$$

Враховуючи в (9) останню нерівність і (3), дістаємо

$$\partial x / \partial B \leq 0. \tag{10}$$

Проаналізуємо окремий тип фіксованих витрат – витрат на фіксоване обладнання, яким володіє фірма. Таке обладнання можна пов'язувати з фондом реального капіталу фірми. Слід припустити, що загальні витрати C збільшуються з ростом рівня капітальних фондів K , а короткострокові граничні витрати $\partial C / \partial x$ залежать від цього рівня:

$$C = C(x, K),$$

де $\partial C / \partial x > 0$, $\partial C / \partial K > 0$, $\partial^2 C / \partial x \partial K < 0$.

Отже, фірма максимізує по x

$$E[U(px - C(x, K))].$$

Теорема 4. Знак частинної похідної $\partial x / \partial K$ невизначений.

Умовами максимізації 1-го і 2-го порядку є

$$0 = E[U'(\pi)(\partial \pi / \partial x) = E[U'(\pi)(p - \partial C / \partial x)] , \tag{11}$$

$$0 > E[U''(\pi)(p - \partial C / \partial x)^2 - U'(\pi)(\partial^2 C / \partial x^2) = D . \tag{12}$$

Диференціюючи (11) по K , маємо

$$E[pU''(\pi)(\partial \pi / \partial K)] = E[(\partial C / \partial x)U''(\pi)(\partial \pi / \partial K) +$$

$$+ U'(\pi)(\partial^2 C / \partial x \partial K + (\partial^2 C / \partial x^2)(\partial x / \partial K)],$$

$$E[(\partial \pi / \partial K)U''(\pi)(p - \partial C / \partial x)] = E[U'(\pi)\partial^2 C / \partial x \partial K] + (\partial^2 C / \partial x^2)(\partial x / \partial K)].$$

Звідси, враховуючи

$$\partial \pi / \partial K = p(\partial x / \partial K) - (\partial C / \partial x)(\partial x / \partial K) - \partial C / \partial K =$$

$$(\partial x / \partial K)(p - \partial C / \partial x) - \partial C / \partial K,$$

отримуємо

$$E[(\partial x/\partial K)U''(\pi)(p-\partial C/\partial K)^2 - U'(\pi)(\partial^2 C/\partial x^2)] =$$
$$= E[(\partial C/\partial K)U''(\pi)(p-\partial C/\partial x) + U'(\pi)\partial^2 C/\partial x\partial K],$$

звідки в силу (12)

$$\partial x/\partial K = (\partial C/\partial K)E[U''(\pi)(p-\partial C/\partial x)]/D + (\partial^2 C/\partial K\partial x)E[U'(\pi)]/D. \quad (13)$$

Перший доданок рівності (13), подібний до правої частини (9), виражає ефект багатства збільшення капітальних фондів (точніше, виражає зменшення багатства внаслідок збільшення фіксованих витрат). За припущення зменшуваного абсолютного уникнення ризику, доводиться нерівність

$$E[U''(\pi)(p-\partial C/\partial x)] \ge 0.$$

Враховуючи також (12) і $\partial C/\partial K > 0$, перший доданок правої частини (13) недодатний. Другий доданок рівності (13) — додатний в силу (12) і припущень $\partial^2 C/\partial x\partial K < 0$, $U'(\pi) > 0$.

Отже, може бути, що ефект багатства для випуску від'ємний, а загальний ефект збільшення реальних капітальних фондів для випуску – додатний.

Висновок. Отримані залежності оптимального випуску фірми від очікуваної ціни, параметра мультиплікативного зсуву ціни, фіксованих витрат, капіталу відрізняються від аналогічних залежностей оптимального випуску фірми, що працює за умови визначеності.

В.М. Горбачук, С.Г. Ненахова

ПОВЕДЕНИЕ КОНКУРЕНТНОЙ ФИРМЫ ПРИ НЕОПРЕДЕЛЕННОСТИ

Для исследования поведения конкурентной фирмы при неопределенности используются формализации понятия избежания риска. На их основе выведено зависимости функции оптимального выпуска, который максимизирует ожидаемые прибыли фирмы, от ожидаемой цены, параметра мультипликативного сдвига, фиксированных затрат, капитала. Приводятся необходимые интерпретации.

V.M. Gorbachuk, S.G. Nenakhova

BEHAVIOR OF COMPETITIVE FIRM UNDER UNCERTAINTY

The formalizations to concept of risk aversion are used to investigate the behavior of competitive firm under uncertainty. On their basis, the relations of optimal output function, which maximizes expected firm profits, with expected price, multiplicative price shift parameter, fixed costs, capital are derived. The relevant interpretations are given.

1. *Dreze J., Gabszewicz J.J.* Demand fluctuations, capacity utilizations and prices // Operations Research Verfahren. — 1967. — 3. — P. 119–141.

2. *Zabel E.* A dynamic model of the competitive firm // International economic review. — 1967, June. — P. 194–208.
3. *Tisdell C.A.* The theory of price uncertainty, production and profit. — Princeton, 1969. — 170 p.
4. *Smith K.R.* The effect of uncertainty on monopoly price, capital stock and utilization of capital // J. of economic theory. — 1969, June. — P. 48–59.
5. *Горбачук В.М.* Ценовые обратные связи в линейных моделях торговли // Использование математических методов и ЭВМ в системах управления и планирования. — Киев: Ин-т кибернетики им. В.М. Глушкова, 1991. – С. 107–111.
6. *Ненахова С.Г.* Об отыскании решений в моделях экономического равновесия // Методы решения экстремальных задач. – Киев: Ин-т кибернетики им. В.М. Глушкова, 1996. – С. 47–63.
7. *Горбачук В.М.* О рациональном поведении в одной стохастической модели рынка // Математические методы принятия решений в условиях неопределенности. – Киев: Ин-т кибернетики им. В.М. Глушкова, 1990. – С. 33–37.
8. *Dhrymes P.J.* On the theory of the monpolistic firm multiproduct firm under uncertainty // International economic review. — 1964, September. — P. 239–257.
9. *Hymans S.H.* The price-taker: uncertainty, utility and the supply function // International economic review. — 1966, September. — P. 346–356.
10. *McCall J.J.* Competitive production for constant risk utility functions // Review of economic studies. — 1967, October. — P. 417–420.
11. *Borch K.H.* The economics of uncertainty. — Princeton, 1968. — 202 p.
12. *Stigum B.P.* Entrepreneurial choice over time under conditions of uncertainty // International economic review. — 1969, October. — P. 426–442.
13. *Leland H.E.* The theory of the firm facing uncertain demand. — Stanford University, 1969. — 135 p.
14. *Фон Нейман Дж., Моргенштерн О.* Теория игр и экономическое поведение. — М.: Наука, 1970. — 707 с.
15. *Горбачук В.* Фінансові методи. — К.: Альтерпрес, 2002. — 175 с.
16. *Arrow K.* Aspects of the theory of risk-bearing. — Helsinki, 1965. — 262 p.
17. *Sandmo A.* On the theory of the competitive firm under price uncertainty // American economic review. — 1971, May. — P. 65–73.
18. *Dreze J., Modigliani F.* Consumption decisions under uncertainty // Center for Operations Research and Econometrics (CORE) Discussion Paper 6906. — Louvain: Universite Catholique de Louvain, 1969. — 21 p.
19. *Sandmo A.* The effect of uncertainty on saving decisions // Review of economic studies. — 1970. — P. 353–360.
20. *Pratt J.W.* Risk aversion in the small and in the large // Econometrica. — 1964, January / April. — P. 122–136.
21. *Stiglitz J.E.* The effects of income, wealth and capital gains taxation on risk-taking // Quarterly journal of economics. — 1969, May. — P. 263–283.
22. *Mossin J.* Aspects of rational insurance purchasing // Journal of political economy. — 1968, July/August. — P. 553–568.
23. *Mossin J.* Taxation and risk-taking: an expected utility approach // Economica. — 1968, February. — P. 74–82.

Отримано 08.07.2004