УДК 519.7

В.В. СЕМЕНОВ, Ю.Б. СОРОКА

УМОВИ ГЛОБАЛЬНОЇ ОПТИМАЛЬНОСТІ ДЛЯ ОБЕРНЕНО ОПУКЛИХ ЕКСТРЕМАЛЬНИХ ЗАДАЧ В НЕРЕФЛЕКСИВНИХ ПРОСТОРАХ

За допомогою варіаційного принципу І. Екланда отримано умови глобальної оптимальності для обернено опуклих екстремальних задач в нерефлексивних банахових просторах.

Вступ. Відомі на сьогоднішній день загальні умови оптимальності [1–3] не завжди дають змогу охарактеризувати глобальні розв'язки в екстремальних задачах з обмеженнями. Проте для певних класів таких задач знайдено умови глобальної оптимальності [4–7].

У даній роботі розвивається запропонований у [4] підхід для отримання необхідних і достатніх умов глобального екстремуму в обернено опуклих задачах оптимізації. Використовуючи варіаційний принцип І. Екланда, ми отримуємо основний результат [4] без припущення про рефлексивність простору, в якому поставлено задачу.

В задачах теорії оптимального керування, теорії рівномірної апроксимації та варіаційному численні інколи доводиться зустрічатися з пошуком розв'язку екстремальних задач на певному класі неопуклих множин з банахових просторів $L_1(\Omega)$, $C(\overline{\Omega})$, $C^k(\overline{\Omega})$. Зокрема, задачі такого типу були розглянуті в [8]. Зазначені простори в свою чергу є нерефлексивними ($L_1(\Omega)$ навіть не ізоморфний жодному спряженому простору), що й зумовлює актуальність питання.

Постановка задачі. Нехай X – дійсний нерефлексивний банаховий простір. Розглянемо екстремальну задачу:

$$f(x) \to \min, \qquad (1)$$

за умовою

$$g(x) \geq 0, x \in A, \qquad (2)$$

де $A \subseteq X$ – непорожня множина, $f : X \to R \cup \{+\infty\}$ – напівнеперервний зверху функціонал, $g : X \to R$ – опуклий неперервний функціонал, при цьому виконується умова

$$A \subset \operatorname{int} \operatorname{dom} f. \tag{3}$$

Нехай, крім того,

$$D = \{x \in X | x \in A, g(x) \geq 0\} \neq \varnothing, \tag{4}$$

$$\inf\{f(x) | x \in D\} > -\infty. \tag{5}$$

Надалі зробимо такі позначення: B_{X^*} – замкнена одинична куля спряженого простору X^*; $\langle \cdot,\cdot \rangle : X^* \times X \to R$ – канонічна двоїстість між просторами X^* та X; $\partial g(x)$ – субдиференціал функціоналу $g : X \to R$ у розумінні опуклого аналізу; $\operatorname{clco} A$ – замкнена опукла оболонка множини $A \subseteq X$.

Наведемо необхідну умову глобального екстремуму, сформульовану в [4].

Теорема 1. Нехай не існує точки $x^* \in D$ глобального мінімуму з умовою $g(x^*) > 0$. Тоді, якщо в точці $z \in D$ досягається глобальний мінімум задачі (1)–(2), то

$$\begin{cases} \forall y : g(y) = 0 \ \ \forall y^* \in \partial g(y), \\ \langle y^*, x - y \rangle \leq 0 \ \ \forall x \in A : f(x) \leq f(z). \end{cases}$$

Доведення цієї теореми, викладене в [4], не вимагає умови рефлексивності банахового простору X.

Основний результат. Зробимо таке позначення: $g_* = \inf\{g(x) | x \in X\}$.

Теорема 2. Нехай у задачі (1)–(2) поряд з умовами (3)–(5) виконані такі припущення:

$$g_* < g(z) = 0,$$
$$\begin{cases} \forall y \in A : g(y) = 0 \ \ \exists y^* \in \partial g(y), \\ \exists h = h(y, y^*) \in \operatorname{clco} A : \langle y^*, h - y \rangle > 0. \end{cases} \tag{6}$$

Тоді умова

$$\begin{cases} \forall y : g(y) = 0 \ \ \forall y^* \in \partial g(y), \\ \langle y^*, x - y \rangle \leq 0 \ \ \forall x \in \operatorname{clco} A : f(x) \leq f(z), \end{cases} \tag{7}$$

є достатньою умовою глобальної оптимальності точки $z \in D$.

Доведення. Нехай існує точка $w \in A, g(w) \geq 0$, для якої $f(w) < f(z)$. Покажемо, що

$$\exists u \in \operatorname{clco} A, \ g(u) > 0, \ f(u) < f(z). \tag{8}$$

Очевидно, якщо $g(w) > 0$, то покладемо $u=w$.

Нехай тепер $g(w) = 0$. У силу напівнеперервності зверху функціоналу $f(\cdot)$ існує окіл W точки w, для якого

$$f(x) < f(z) \ \forall x \in W . \tag{9}$$

Згідно з умовою (6) знайдуться такі дві точки $w^* \in \partial g(w), h \in \mathrm{clco} A$, що $\langle w^*, h-w \rangle > 0$. Тоді для будь-якого $x(\alpha) = \alpha h + (1-\alpha)w$, $\alpha \in (0,1)$, маємо (в силу опуклості $g(\cdot)$) $g(x(\alpha)) - g(w) \geq \langle w^*, x(\alpha) - w \rangle = \alpha \langle w^*, h-w \rangle > 0$, так, що $g(x(\alpha)) > 0$, $x(\alpha) \in \mathrm{clco} A$, $\alpha \in [0,1]$. При досить малому α очевидно, що $x(\alpha) \in W$, і тому в силу (9) $f(x(\alpha)) < f(z)$. Отже, (8) доведено при $u = x(\alpha)$.

Розглянемо множину $M = \{ y | g(y) \leq 0 \}$ і таку екстремальну задачу:

$$\| y-u \|_X \to \inf_{y \in M} . \tag{10}$$

Зауваження 1. Якщо простір X – рефлексивний та $g(u) > 0$, то існує такий елемент y, що $g(y) = 0$ та $\| y-u \|_X = \inf\{ \| x-u \|_X | x \in M \} > 0$. У нашій ситуації не можна гарантувати існування розв'язку задачі (10).

Згідно з варіаційним принципом І.Екланда [2], для довільного $\varepsilon > 0$, існує така точка $u_\varepsilon \in M$, що

$$\| u_\varepsilon - u \|_X \leq \| y-u \|_X + \varepsilon \| y - u_\varepsilon \|_X , \quad \forall y \in M . \tag{11}$$

Покажемо, що $\exists \varepsilon_0 > 0 : g(u_\varepsilon) = 0$, як тільки $\varepsilon \in (0, \varepsilon_0]$. Припустимо супротивне: нехай існує послідовність (ε_p), така, що $\varepsilon_p \to +0$ і $g(u_{\varepsilon_p}) < 0$.

Розглянемо точку $u_{p,\alpha} = u_{\varepsilon_p} + \alpha(u - u_{\varepsilon_p})$, $\alpha \in (0,1]$. Оскільки $u_{\varepsilon_p} \in \mathrm{int}\, M$ та функція $g(\cdot)$ – неперервна, то знайдеться таке число $\alpha_p \in (0,1]$, що для довільного $\alpha \in (0, \alpha_p]$ $g(u_{p,\alpha}) < 0$. Таким чином, підставивши $u_{p,\alpha}$ в (11):

$$\| u_{\varepsilon_p} - u \|_X \leq \| u_{p,\alpha} - u \|_X + \varepsilon_p \| u_{p,\alpha} - u_{\varepsilon_p} \|_X , \ \alpha \in (0, \alpha_p],$$

тобто, $\| u_{\varepsilon_p} - u \|_X \leq \| u_{\varepsilon_p} + \alpha(u - u_{\varepsilon_p}) - u \|_X + \varepsilon_p \| u_{\varepsilon_p} + \alpha(u - u_{\varepsilon_p}) - u_{\varepsilon_p} \|_X$.

Звідки, $\alpha(1 - \varepsilon_p) \| u_{\varepsilon_p} - u \|_X \leq 0$. Оскільки $\alpha > 0$, тоді можна вважати, що й $1 - \varepsilon_p > 0$. Таким чином, маємо, $\| u_{\varepsilon_p} - u \| = 0$. Отже, отримали суперечність. Звідси $\exists \varepsilon_0 \in (0,1) : g(u_\varepsilon) = 0$, як тільки $\varepsilon \in (0, \varepsilon_0]$. Надалі будемо розглядати ε тільки з напівінтервалу $(0, \varepsilon_0]$.

Розглянемо допоміжну екстремальну задачу

$$I(y)=\|y-u\|_X+.\,\|y-u_.\|_X\to\min_{y\in M}. \tag{12}$$

У силу нерівності (11) $\|y-u\|_X+\varepsilon\|y-u_\varepsilon\|_X-\|u_\varepsilon-u\|_X\geq 0$, і досягається рівність при $y=u_\varepsilon$, причому $g(u_\varepsilon)=0$. Отже u_ε – розв'язок задачі (12). Запишемо необхідні умови екстремуму [1] в точці u_ε.

$$\begin{cases}\exists x^*\in\partial I(u_\varepsilon),\ \exists y^*\in\partial g(u_\varepsilon), \exists\lambda_0\geq 0, \exists\lambda\geq 0,\\ \lambda_0 x^*+\lambda y^*=0,\ \lambda_0+\lambda>0.\end{cases} \tag{13}$$

За теоремою Моро – Рокафеллара та представленням субдиференціалу норми [1] маємо

$$\lambda_0 x_1^*+\lambda_0\varepsilon x_2^*+\lambda y^*=0, \tag{14}$$

де $x_1^*\in X^*:\ \|x_1^*\|_{X^*}=1,\ \langle x_1^*,u_\varepsilon-u\rangle=\|u_\varepsilon-u\|_X$, а $x_2^*\in B_{X^*}$.

Припустимо $\lambda=0$. Звідси $x_1^*=-\varepsilon x_2^*$. Отже, $1=\|x_1^*\|_{X^*}=\varepsilon\|x_2^*\|_{X^*}\leq\varepsilon$, що суперечить вибору ε. Тоді з (14) отримаємо $y^*=-\lambda_0\lambda^{-1}\left(x_1^*+\varepsilon x_2^*\right)$, та

$$\left\langle y^*,u-u_\varepsilon\right\rangle=\left\langle-\frac{\lambda_0}{\lambda}x_1^*-\varepsilon\frac{\lambda_0}{\lambda}x_2^*,u-u_\varepsilon\right\rangle=\frac{\lambda_0}{\lambda}\left\langle x_1^*+\varepsilon x_2^*,u_\varepsilon-u\right\rangle.$$

Оскільки $g(u)>0$ і $x_2^*\in B_{X^*}$, то $\forall\ \varepsilon>0$:

$$\left\langle x_1^*,u_\varepsilon-u\right\rangle=\|u_\varepsilon-u\|_X>0,$$

$$|\,\varepsilon\left\langle x_2^*,u_\varepsilon-u\right\rangle|\leq\varepsilon\|x_2^*\|_{X^*}\|u_\varepsilon-u\|_X\leq\varepsilon\|u_\varepsilon-u\|_X.$$

Отже,

$$\left\langle y^*,u-u_{\varepsilon_p}\right\rangle=\frac{\lambda_0}{\lambda}\left\langle x_1^*+\varepsilon x_2^*,u_\varepsilon-u\right\rangle=\frac{\lambda_0}{\lambda}\left\{\left\langle x_1^*,u_\varepsilon-u\right\rangle+\varepsilon\left\langle x_2^*,u_\varepsilon-u\right\rangle\right\}\geq$$

$$\geq\frac{\lambda_0}{\lambda}(1-\varepsilon)\|u_\varepsilon-u\|_X>0.$$

Таким чином $\left\langle y^*,u-u_{\varepsilon_p}\right\rangle>0$, що разом з умовою (8) суперечить (7).

Припускаючи існування похідної $g'(\cdot)$ Фреше (Гато) функціоналу $g(\cdot)$, відповідні необхідна і достатня умови глобальної оптимальності елемента $z\in D$ набудуть нижчеприведеного вигляду.

Теорема 3. Нехай не існує точки $x^*\in D$ глобального мінімуму з умовою $g(x^*)>0$. Тоді, якщо в точці $z\in D$ досягається глобальний мінімум задачі (1)–(2), то $\forall y: g(y)=0\ \left\langle g'(y),x-y\right\rangle\leq 0\ \forall x\in A: f(x)\leq f(z)$.

Теорема 4. Нехай у задачі (1)–(2) поряд з умовами (3)–(5) виконані припущення: $g_{*} < g(z) = 0$ та $\forall y \in A : g(y) = 0 \ \exists h \in \mathrm{clco} A : \langle g'(y), h - y \rangle > 0$.

Тоді умова

$$\forall y : g(y) = 0, \langle g'(y), x - y \rangle \le 0 \ \forall x \in \mathrm{clco} A : f(x) \le f(z)$$

є достатньою умовою глобальної оптимальності елемента $z \in D$.

Висновок. Отримані результати, дають змогу сформулювати необхідні та достатні умови глобальної оптимальності, при розв'язанні конкретних практичних задач теорії керування, поставлених в нерефлексивних банахових просторах.

В.В. Семенов, Ю.Б. Сорока

УСЛОВИЯ ГЛОБАЛЬНОЙ ОПТИМАЛЬНОСТИ ДЛЯ ОБРАТНО ВЫПУКЛЫХ ЭКСТРЕМАЛЬНЫХ ЗАДАЧ В НЕРЕФЛЕКСИВНЫХ ПРОСТРАНСТВАХ

С помощью вариационного принципа И. Экланда получены условия глобальной оптимальности для обратно выпуклых экстремальных задач в нерефлексивных банаховых пространствах.

V.V. Semenov, Y.B. Soroka

CONDITIONS OF GLOBAL OPTIMALITY FOR INVERSE CONVEX EXTREME PROBLEMS IN NON-REFLEXIVE SPACES

We have received conditions of global optimality for inverse convex extreme problems in non-reflexive Banach spaces by I. Ekeland's variational principle.

1. *Алексеев В.М., Тихомиров В.М., Фомин С.В.* Оптимальное управление. – М.: Наука, 1979. – 432 с.
2. *Кларк Ф.* Оптимизация и негладкий анализ. – М.: Наука, 1988. – 280 с.
3. *Пшеничный Б.Н.* Выпуклый анализ и экстремальные задачи. – М.: Наука, 1980. – 320 с.
4. *Стрекаловский А.С.* Об экстремальных задачах на дополнениях выпуклых множеств // Кибернетика и системный анализ. – 1993. – № 1. – С. 113–126.
5. *Phan Dinh Tao, Le Thi Hoai An.* Lagrangian stability and global optimality in nonconvex quadratic minimization over euclidean balls and spheres // J. of Convex Analysis. – 1995. Vol. 2. – N 1/2. – P. 263–276.
6. *Tuy H.* Monotonic optimization: problems and solution approaches // SIAM J. – 2000. – N 11. – P. 464–494.
7. *Семенов В.В.* Про оптимізацію параболічних систем з умовами спряження // Доповіді НАН України. – 2003. – № 5. – С. 58–64.
8. *Kruzik M., Roubicek T.* Optimization problems with concentration and oscillation effects: relaxation theory and numerical approximation // Math. Bohemica. – 1998.– N 57. – P. 4–36.

Отримано 29.04.2004