ТЕОРІЯ ОПТИМАЛЬНИХ РІШЕНЬ

УДК.519.8

Ф.А. ШАРИФОВ

ЗАДАЧА НАХОЖДЕНИЯ НЕПЕРЕСЕКАЮЩИХСЯ И НЕСОВПАДАЮЩИХ ЦИКЛОВ НА СЕТИ

Рассмотрена задача нахождения непересекающихся и несовпадающих циклов на сети с двумя весами дуг. Показано, что она может быть сформулирована как задача нахождения непересекаюшихся совершенных паросочетаний на двудольном графе. Когда веса дуг равные, данная задача эквивалентна задаче нахождения потока минимальной стоимости на сети представленой двудольным графом. Для последней задачи разработаны ряд строгих полиномиальных алгоритмов. В общем случае рассмотренная задача не имеет целочисленное решение. В работе приводятся основные этапы полиномиального алгоритма для решения задачи в общем случае.

Выбор n работников для выполнения n видов работ ежедневно осуществляется оптимальным образом путем решения задачи назначения, и после чего требуется организовать новое предприятие, тем самым определить число и состав его подразделений. При выполнении работ на длительный срок часто случается, что внутри одного подразделения один работник временно заменяет другого и такая замена сопряжена с некоторыми затратами. Для эффективного функционирования предприятия, время от времени, требуется проверить качество выполняемых работ при условии, что любой работник не может выполнять и проверять качество одной той же работы одновременно. Проверка качества выполняемой работы, работником не выполняющим эту работу, также связана с некоторыми затратами. В этих условиях требуется найти число и состав подразделений для выполнения и проверки качества выполняемых работ таким образом, чтобы минимизировать суммарные затраты. Эта задача может быть сформулирована на сети следующим образом.

Пусть задан ориентированный граф $G=(V,E)$ вершины которого соответствуют работникам ($|V|=n$) и каждой дуге (i,j) из E приписаны два неотрицательных веса p_{ij} и q_{ij}, где p_{ij}, q_{ij} –заданные затраты на замену работника i с работником j и на проверку качества выполняемой работы работником i со стороны работника j, соответственно.

Чередующаяся последовательность различных вершин и дуг $v_0, e_1, v_1, ..., e_n, v_n$, в которой все дуги $e_i = (v_{i-1}, v_i)$, ориентированы от вершины v_{i-1} к вершине v_i, называется путем на графе G. Под циклом на графе G будем понимать любой путь, в которой вершины v_0 и v_n совпадают. Из определения цикла получается, что путь $v_0, e_0 = (v, v_1), v_1, e_1 = (v_1, v_0), v_0$ тоже является циклом. Графы $G(p), G(q)$ означают копии графа G с весами их дуг p_{ij}, q_{ij}, соответственно. Допустим, что C – некоторый цикл на графе $G(p)$ или $G(q)$. Вес цикла C определяется как сумма весов его дуг на графе $G(p)$ или $G(q)$, соответственно. Копией цикла C называется такой же цикл на графе G.

Копии циклов на графе $G(p)$, $(G(q))$ будем называть непересекающимися, если они не имеют общих вершин. Циклы C_p и C_q на графах $G(p)$ и $G(q)$ будем называть несовпадающими, если их копии на графе G не имеют общих дуг.

Выше упомянутая задача для создания нового предприятия может быть сформулирована как задача нахождения непересекающихся и несовпадающих циклов (ЗННЦ) на сети G с двумя весами дуг следующим образом.

Найти непересекающиеся циклы на графах $G(p)$ и $G(q)$ при условии, что, копии любого цикла на графе $G(p)$ и копии любого цикла на графе $G(q)$ несовпадают на графе G, все вершины графа G являются вершинами нересекаюшихся циклов на графах $G(p)$ и $G(q)$ таким образом, что сумма весов циклов на графах $G(p)$ и $G(q)$ минимальная.

Задачи нахождения различных циклов на множестве ребер графа исследованы во многих работах. Мы отметим только 3 из них, которые более близкие ЗННЦ. В работе [1] рассмотрена задача синтеза 2– связных сетей, в которой на длины циклов есть ограничение сверху. Для решения этой задачи применяется метод отсечения. Для сужения области допустимых решений задачи, полученной путем релаксации исходной, используются неравенства, которые описывают грани рассмотренной задачи. В работах [2, 3] рассмотрены задачи синтеза прочных и 2– связных сетей. В этих работах исследуются свойства задачи, полученные путем релаксации исходных задач, и показаны, что если граф представляющий сеть, полный и веса его ребер удовлетворяют неравенству треугольника, то алгоритмы решения задачи коммивояжера могут быть применены для решения этих же задач. Мы покажем, что в случае, когда $p_{ij} = q_{ij}$ для всех дуг (i, j) из E, решение ЗННЦ сводится к решению задачи нахождения потока минимальной стоимости на сети, которая представляется двудольным графом. Для решения последней задачи на произвольной сети предложены строго полиномиальные алгоритмы в [4, 5, 6]. В случае произвольных весов p_{ij} и q_{ij} построим пример показывающий, что задача полученная путем релаксации ЗННЦ не всегда имеет целочисленное (0,1) решение. Тем не менее, основываясь на некото-

рых свойствах (см. ниже) ЗННЦ, отметим, что ЗННЦ допускает полиномиальный алгоритм ее решения. Для удобства доказательства свойств ЗННЦ рассмотрим полный неориентированный двудольный граф $G_b = (U_b, V_b, E_b)$ с множествами вершин U_b, V_b и с множеством ребер E_b, где $|U_b| = |V_b| = n (n = |V|)$. Каждое ребро (i, j) из E_b соединяет вершину i из U_b с вершиной j из V_b. Ребрам (i, i) из E_b сопоставим дос-таточно большие веса, т.е. положим $p_{ii} = q_{ii} = M$ для всех $i = 1,...,n$, а остальным
ребрам (i, j) из E_b припишем веса p_{ij}, q_{ij}. На графе G_b рассмотрим задачу нахож-дения двух непересекающихся паросочетаний с суммарными минимальными весами:

$$\min \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} p_{ij} x_{ij} + \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} q_{ij} y_{ij} \tag{1}$$

$$\sum_{i=1}^{n} x_{ij} = 1, \quad \sum_{i=1}^{n} y_{ij} = 1, \quad j = 1,...,n, \tag{2}$$

$$\sum_{j=1}^{n} x_{ij} = 1, \quad \sum_{j=1}^{n} y_{ij} = 1, \quad i = 1,...,n, \tag{3}$$

$$x_{ij} + y_{ij} \le 1, \quad i, j = 1,...,n, \tag{4}$$

$$x_{ij} \ge 0, \quad y_{ij} \ge 0, \quad i, j = 1,...,n, \tag{5}$$

$$x_{ij} = 0 \vee 1, \quad y_{ij} = 0 \vee 1, \quad i, j = 1,...,n. \tag{6}$$

Теорема 1. Задача нахождения непересекающихся и несовпадающих циклов на сети G и задача (1)-(6) эквивалентные**.**

Доказательство. Пусть $x_* = \{x^*_{ij}; (i, j) \in E_b\}$ и $y_* = \{y^*_{ij}; (i, j) \in E_b\}$ оптимальное решение задачи (1)-(6). Понятно, что множества ребер $M_1 = \{(i, j); x^*_{ij} = 1, (i, j) \in E_b\}$ и $M_2 = \{(i, j); y^*_{ij} = 1, (i, j) \in E_b\}$ являются совершенными паросочетаниями на графе G_b. Так как $p_{ii} = q_{ii} = M$ для ребер (i, i), то паросочетания M_1, M_2 не содержат ребра (i, i) для произвольного $1 \le i \le n$. Каждому ребру (i, j) паросочетания M_1 соответствует дуга (i, j) графа G, которая ориентирована от вершины i к вершине j. Не трудно проверить, что ребрам паросочетания M_1 соответствуют непересекающиеся циклы на графе $G(p)$ и поэтому их копии тоже непересекаются на графе G. Аналогичным образом показывается, что ребрам паросочетания M_2 соответствуют непересекающиеся циклы на графах G и $G(q)$. По условиям (4) паросочетания M_1, M_2 не имеют общих ребер $(i, j) \in E_b$. Отсюда следует, что копии циклов на графах $G(p)$ и $G(q)$ не совпадают на графе G, что и доказывает теорему.

Задачу (1)-(5) назовем LP – релаксацией задачи (1)-(6). Рассмотрим частный случай задачи (1)-(6) когда веса всех дуг удовлетворяют следующим условиям:

$$p_{ij} = c_{ij} + u_i^1 + v_j^1, \quad q_{ij} = c_{ij} + u_i^2 + v_j^2, \quad (i, j) \in E, \tag{7}$$

для некоторых чисел $u_i^1, u_i^2, v_j^1, v_j^2$.

Утверждение 1. Если условия (7) верны, то LP – релаксации задачи (1)-(6) имеет целочисленное 0,1 оптимальное решение.

Доказательство. Допустим, что условия (7) верны. В этом случае задача (1)-(6) преобразуется к следующей задаче нахождения минимального потока (ЗНМП).

$$\min \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} c_{ij} z_{ij}$$

$$\sum_{j=1}^{n} z_{ij} = 2, \quad i = 1, \ldots, n, \qquad \sum_{i=1}^{n} z_{ij} = 2, \quad j = 1, \ldots, n, \qquad z_{ij} = 0 \vee 1.$$

Из теории решения транспортных задач известно, что после замены условия $z_{ij} = 0 \vee 1$ на условие $0 \le z_{ij} \le 1$ для всех (i, j) из E, полученная задача тоже имеет целочисленное 0,1 оптимальное решение. Отсюда следует справедливость утверждения.

Выполнение условий (7) для весов ребер графов $G(p)$ и $G(q)$ можно проверить за $O(n^3)$ времени следующим образом. Пусть $\delta_{ij} = p_{ij} - q_{ij}$ для ребер $(i, j) \in E_b$, $i \ne j$, и $\delta_{ii} = M$ для ребер $(i,i) \in E_b$. Допустим, что найдено решение задачи назначения на двудольном графе G_b с весами δ_{ij} ребер $(i, j) \in E_b$, и u_i, v_j - оптимальные значения потенциалов для вершин $i \in U_b$ и $j \in V_b$. Если $\delta_{ij} = v_j - u_i$ для всех ребер $(i, j) \in E_b$, $i \ne j$, то условия (7) верны для весов ребер графов $G(p)$ и $G(q)$. Легко показать, что обратное утверждение тоже верно. Поэтому путем решения задачи назначения с одним из известных алгоритмов в [7], выполнимость условий (7) можно проверить за $O(n^3)$ времени. Если ответ положительный, то решение ЗННЦ сводится к решению задачи нахождения потока минимальной стоимости. Для ее решения можно применить один из вышеупомянутых строго полиномиальных алгоритмов. Однако на практике самым эффективным является специализированный симплекс метод (метод потенциалов [8]) с использованием древовидных структур для представления данных.

Теперь предположим, что для весов ребер графов $G(p)$ и $G(q)$ условия (7) не выполняются. Рассмотрим пример со следующими матрицами P и Q, где

$$P = \begin{array}{|c|c|c|}\hline 0 & 0 & 5 \\ \hline 0 & 5 & 0 \\ \hline 5 & 0 & 0 \\ \hline\end{array} \quad \text{и} \quad Q = \begin{array}{|c|c|c|}\hline 0 & 0 & 5 \\ \hline 5 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 5 & 0 \\ \hline\end{array}.$$

Если положить $x_{ij} = \dfrac{1}{2}$ и $y_{ij} = \dfrac{1}{2}$ для всех нулевых элементов (i, j) матрицы P, Q соответственно, то находим оптимальное решения задачи (1)-(5) (релаксации ЗННЦ) с оптимальным значением 0. Легко проверить, что оптимальное значение ЗННЦ равно 5. Этот пример показывает, что не всегда LP–релаксации задачи (1)-(6) имеют целочисленное 0,1 оптимальное решение. Допустим, что $x_* = \{x^*_{ij}; (i, j) \in E_b\}$ и $y_* = \{y^*_{ij}; (i, j) \in E_b\}$ оптимальное решение задачи (1)-(5) .

Теорема 2. Пусть существуют два совершенных непересекающихся паросочетаний M_x, M_y такие, что $M_x \subseteq E_x = \{(i, j); x^*_{ij} > 0, (i, j) \in E_b\}$ и $M_y \subseteq E_y = \{(i, j); y^*_{ij} > 0, (i, j) \in E_b\}$ и ребра (k, l), для которых $x_{kl}{}^* + y_{kl}{}^* = 1$, являются ребрами либо паросочетания M_x, либо M_y. Тогда вектора инцидентности паросочетаний M_x и M_y являются оптимальным решением задачи (1)-(6)**.**

Доказательство. Пусть $v(p)$, $u(p)$, $v(q)$, $u(q)$, w– вектора двойственных переменных, где $v(p)$, $u(p)$ и $v(q)$, $u(q)$, соответствуют ограничениям из (2), (3) которые содержат переменные x_{ij} и y_{ij} соответственно, а вектор w соответствует ограничениям (4). Из второй теоремы двойственности линейного программирования следует, что если $x^*{}_{ij} + y^*{}_{ij} < 1$ то $w_{ij} = 0$, и если $x_{ij}{}^* > 0$, $y_{ij}{}^* > 0$, то $v_j(p) - u_i(p) + w_{ij} = p_{ij}$, $v_j(q) - u_i(q) + w_{ij} = q_{ij}$. Поэтому для суммы весов $p(M_x), q(M_y)$ паросочетания M_x, M_y имеем следующее равенство,

$$p(M_x) + q(M_y) = \sum_{(ij)\in M_x} p_{ij} + \sum_{(ij)\in M_y} q_{ij} =$$

$$\sum_{j=1}^{n} v_j(p) - \sum_{i=1}^{n} u_i(p) + \sum_{j=1}^{n} v_j(q) - \sum_{i=1}^{n} u_i(q) + \sum_{(ij)\in M_x} w_{ij} + \sum_{(ij)\in M_y} w_{ij} .$$

При $x^*{}_{ij} + y^*{}_{ij} < 1$, так как $w_{ij} = 0$ и ребра (i, j), для которых $x^*{}_{ij} + y^*{}_{ij} = 1$ являются ребрами либо паросочетания M_x, либо M_y, то значение выражения в правой части этого равенства равно значению целевой функции двойственной задачи к задаче (1)-(5). Поэтому вектора инцидентности паросочетаний M_x и M_y являются оптимальным решением задачи (1)-(6).

Согласно этой теореме получаем интересное свойство задачи (1)-(5). Пусть E_{xy} – пересечение множеств ребер E_x, E_y и граф G_{xy} определяется множеством ребер E_{xy}. Ясно, что G_{xy} двудольный граф и в общем случае может быть не связным. Обозначим через $G_{xy}(1),\dots,G_{xy}(k)$ компоненты связности графа G_{xy}. Допустим, что для произвольного t, граф $G_{xy}(t)$ содержит цикл, проходящий через все его вершины. В этом случае, как следствие второй теоремы двойственности линейного программирования можно доказать, что существуют два непересекающихся совершенных паросочетаний M_x и M_y во множествах E_x, E_y соответственно, такие, что вектора инцидентности их являются оптимальным решением задачи (1)-(6), и поэтому они оптимальное решение ЗННЦ. Таким образом, если математически сформулировать, что в оптимальном решения задачи (1)-(5) для произвольного t граф $G_{xy}(t)$ должен содержат цикл проходящий через все его вершины, как отдельное ограничение и добавить это условие в качестве ограничений к задаче (1)-(5), тогда можем гарантировать целочисленность оптимального решения полученной задачи. Так как графы $G_{xy}(t)$ заранее не известные, поэтому не возможно предварительно сформулировать что они содержат цикл, проходящий через все их вершины в оптимальном решения задачи (1)-(5), как условия гарантирующие целочисленность оптимального решения этой задачи. Эти условия формулируются в процессе решения ЗННЦ следующим образом.

1.Пусть паросочетания M_x и M_y оптимальные решение задач назначений на графах $G(p)$ и $G(q)$. В оптимальном решения ЗННЦ значения переменных x_{ij} и y_{kl} равные единице для некоторых ребер $(i,j),(k,l)$ паросочетании M_x и M_y, соответственно.

2. Для произвольных чисел $u_i^1, u_i^2, v_j,^1, v_j^2$ если положить $p_{ij} := p_{ij} - u_i^1 + v_j^1$, и $q_{ij} := q_{ij} - u_i^2 + v_j^2$ то полученная задача и ЗННЦ эквивалентные .

3. Если $p_{ij} = q_{ij}$ для некоторой дуги (i,j), то после замены переменных x_{ij} и y_{ij} на новую переменную z_{ij} в $i-$ е и $j-$ е ограничениях (2) и (3), а также ограничение $x_{ij} + y_{ij} \le 1$ на ограничение $0 \le z_{ij} \le 1$, полученная задача и ЗННЦ эквивалентные.

С учетом свойства 1 и 2, путем решения задач назначений на графах $G(p)$ и $G(q)$ находим паросочетания M_x, M_y на этих графах и числа $u_i^1, u_i^2, v_j,^1, v_j^2$, такие, что после переопределения значении весов дуг как в свойстве 2, получим, что $p_{ij} = q_{ij}$ для нескольких ребер (i,j) графа G_b. При этом паросочетания M_x и M_y либо не пересекаются т.е. не имеют общих ребер (в этом случае, вектора инцидентности M_x и M_y – оптимальное решение ЗННЦ), либо все подграфы $G_{xy}(t)$ содержат циклы про-ходящие через все их вершины. Это означает, что для ребер (i, j) графов $G_{xy}(t)$ проведены замены указанные в свойстве 3 и тем самым решение ЗННЦ сводится к решению ЗНМП на сети представленной двудольным графом G_{xy}. Отметим, что на базе свойств 1, 2 и 3 разработан строго полиномиальный алгоритм для решения ЗННЦ и его детальное изложение и обоснование есть тема отдельной статьи.

Ф.А. Шаріфов

ЗАДАЧА ЗНАХОДЖЕННЯ НЕ ПЕРЕТИНАЮЧИХ І НЕ СПІВПАДАЮЧИХ ЦИКЛІВ НА МЕРЕЖІ

Разглянуто задачу знаходження циклів на мережі, що не перетинаються і не співпадають. Показано, що ця задача еквівалентна задачі знаходження двох паросполучень на двудольному графі. В окремих випадках розглянута задача є задачею знаходження потоку мінімальної вартості. Наведено, що ці властивості є основними для разробки поліноміального алгоритму вирішення задачі.

F.A. Sharifov

MINIMUM COST NODE AND ARC DISJOINT CYCLES PROBLEM

We study a minimum cost node and arc-disjoint cycles problem on a directed graph. It is shown that the problem is equivalent to the minimum cost disjoint matchings problem on complete bipartite graph. In particular case, for which weights of arcs are special, then the considered problem is reduced to minimum cost flow problem. Some interesting properties of LP-relaxation problem are proved and it is noted that namely these properties are on bases for polynomial algorithm to solve the problem.

1. *Fortz B., Labbe M.* Polyhedral results for two-connected network with bounded rings // Math. Prog. – 2002. – 3 – P. 27–54.
2. *Goemans M.X., Bertsimans D. J.* Survivable networks, linear programming relaxation and the persimonions property // Math. Prog. – 1993. – 60 –. P. 145–166.
3. *Шарифов Ф.А., Прудкой Ю.И., Фигурская И.Л., Трубина Л.В.* Задача синтеза интегрированных цифровых сетей // Методы решения экстремальных задач. – Киев: Ин-т кибернетики им. В.М. Глушкова НАН Украины. – 1996. – С. 10–14.
4. *Ahuja R.K., Thomas L., etc.* Some resent advances in network flows // SIAM Review. – 1991. – 33. – № 2 – P. 175–219.
5. *Vygen J.* On dual minimum cost flow algorithms // Math. Methods. Oper. Res. – 2002. – № 56. – P. 101–126.
6. *Orlin J.B.* A faster strongly polynomial minimum cost flow algorithm // Oper. Res. – 1993. – № 41. – P. 338–350.
7. *Cook W.J., Cunningam W.H., etc.* Combinatorial optimization. – New-York: Jonh Wiley-Sons.INC, 1998. – 338 p.
8. *Шарифов Ф.А.* Об эффективности алгоритмов решения сетевых задач на древовидных структурах // Кибернетика и системный анализ. – 2003. – № 3. – С. 179–184.

Получено 01.09.2003