Излагаются результаты исследования различных видов устойчивости векторных задач целочисленного квадратичного программирования к возмущениям коэффициентов векторного критерия. Определены соответствующие понятия устойчивости, сформулированы необходимые и достаточные условия для всех рассмотренных вариантов устойчивости, проанализированы соотношения между ними.

УДК 519.8

Т.Т. ЛЕБЕДЕВА, Н.В. СЕМЕНОВА, Т.И. СЕРГИЕНКО

ОБ УСТОЙЧИВОСТИ ПО КРИТЕРИЮ ВЕКТОРНЫХ ЗАДАЧ ЦЕЛОЧИСЛЕННОГО КВАДРАТИЧНОГО ПРОГРАММИРОВАНИЯ

В настоящей статье рассматриваются векторные оптимизационные задачи следующего вида: $Q(F,X)$: $\max\{F(x) \mid x\in X\}$, где $F(x)=(f_1(x), f_2(x),\dots,f_l(x))$, $f_i : R^n \to R$ – квадратичные функции, $f_i(x)= x^T D_i x + c_i x$, $D_i \in R^{n\times n}$, $c_i \in R^n$ – вектор-строка, $i\in N_\ell=\{1,\dots,\ell\}$, X – непустое ограниченное множество целочисленных векторов из R^n.

Под решением задачи $Q(F,X)$ будем понимать нахождение элементов одного из следующих множеств: $P(F,X)$ – множества эффективных (Парето-оптимальных) решений, $S\ell(F,X)$ – слабо эффективных (оптимальных по Слейтеру) решений, $Sm(F,X)$ – строго эффективных (оптимальных по Смейлу) решений. Для любого $x\in X$ справедливы высказывания:

$$x\in S\ell(F,X) \Leftrightarrow \sigma(x,F)= \{y\in X \mid F(y) > F(x)\}=\varnothing,$$

$$x\in P(F,X) \Leftrightarrow \pi(x,F) = \{y\in X \mid F(y) \geq F(x), F(y)\neq F(x)\}=\varnothing,$$

$$x\in Sm(F,X) \Leftrightarrow \eta(x,F)=\{y\in X \mid y\neq x, F(y)\geq F(x)\}=\varnothing.$$

В силу конечности множества X $P(F,X)\neq\varnothing$. Очевидно, что $Sm(F,X) \subset P(F,X) \subset S\ell(F,X)$.

Обозначим $D=(D_1,\dots,D_l)$, $C=[c_{ij}]\in R^{l\times n}$, где $(c_{i1},\dots,c_{in})=c_i$ $\forall i\in N_l$. Для любого вектора $x=(x_1,\dots,x_m)\in R^m$ зададим норму $\|x\|= \sum_{i\in N_m} |x_i|$.

Под нормой произвольной матрицы $A=[a_{ij}]\in R^{m\times n}$ будем понимать норму вектора $(a_{11}, a_{12},\dots, a_{mn})$.

Для пары (D,C) и любого числа $\delta>0$ рассмотрим множество $O_\delta(D,C)$ возмущенных пар вида $O_\delta(D,C)=\{(D(\delta),\ C(\delta)) \mid \max\limits_{i\in N_\ell} \|D_i(\delta)-D_i\|<\delta,\ \|C(\delta)-C\|<\delta\}$, где $D(\delta)=(D_1(\delta),\ldots,D_l(\delta))$, $D_i(\delta)\in R^{nxn}$ $\forall i\in N_l$, $C(\delta)=[c_{ij}(\delta)]\in R^{lxn}$.

Для произвольных достаточно малого $\delta>0$ и $(D(\delta),C(\delta))\in O_\delta(D,C)$ назовем задачу $Q(F(\delta),X)$: $\max\{F(\delta,x) \mid x\in X\}$, где $F(\delta,x)=(f_1(\delta,\ x),\ldots,f_l(\delta,\ x))$, $f_i(\delta,\ x) = =x^T D_i(\delta)x + c_i(\delta)x$, $i\in N_l$, возмущенной по векторному критерию задачей, принадлежащей δ-окрестности задачи $Q(F,X)$. Для задачи $Q(F(\delta),X)$ обозначим $S\ell(F(\delta),X)$, $P(F(\delta),X)$, $Sm(F(\delta),X)$ – множества слабо эффективных, эффективных и строго эффективных решений соответственно.

Продолжая исследования, отраженные в работах [1-5], рассмотрим различные варианты определения устойчивости многокритериальной задачи целочисленной оптимизации к возмущениям коэффициентов квадратичных функций векторного критерия для задачи $Q(F,X)$ поиска Парето-оптимальных решений. В тех случаях, когда речь будет идти о задачах поиска строго или слабо эффективных решений, будем пользоваться обозначениями $Q_{Sm}(F,X)$ и $Q_{Sl}(F,X)$ соответственно.

Определение 1. Задачу $Q(F,X)$ назовем T_1–устойчивой по векторному критерию, если существует такое число $\delta>0$, что $\forall$ $(D(\delta),\ C(\delta))\in O_\delta(D,\ C)$

$$P(F,X)\cap P(F(\delta),X)\neq\varnothing. \tag{1}$$

Сформулируем необходимые в дальнейшем утверждения, в справедливости которых легко убедиться.

Утверждение 1. $\forall x\in X\setminus P(F,X)$ и $\forall y\in P(F,X)$ $\exists$ $i\in N_l$: $f_i(x)-f_i(y)<0$.

Утверждение 2. Пусть $y\in P(F,X)$. Если $\exists\delta>0$ такое, что $\forall x\in X\setminus P(F,X)$ $\exists$ $i\in N_l$, $\forall$ $(D(\delta),\ C(\delta))\in O_\delta(D,\ C)$: $f_i(\delta,x)-f_i(\delta,y)<0$, то $\forall(D(\delta),\ C(\delta))\in O_\delta(D,\ C)$ справедливо

$$\pi(y,\ F(\delta))\subset P(F,X). \tag{2}$$

Утверждение 3. Пусть $x,y\in X$ и $\exists i\in N_l$: $f_i(x)-f_i(y)<0$. Тогда $\forall\delta$ ($0<\delta\le g_i(x,y)$),

где $g_i(x,y)=\dfrac{|f_i(x)-f_i(y)|}{\|x\|^2+\|y\|^2+\|x-y\|}$, и $\forall(D(\delta),C(\delta))\in O_\delta(D,\ C)$: $f_i(\delta,x)-f_i(\delta,y)<0$.

Доказательство. Для любых $\delta>0$ и $(D(\delta),C(\delta))\in O_\delta(D,C)$, используя неравенство Коши-Буняковского, оценим разность $f_i(\delta,\ x)-f_i(\delta,\ y)= x^T D_i(\delta)x + +c_i(\delta)x - y^T D_i(\delta)y - c_i(\delta)y= x^T D_i x + x^T(\Delta D_i)x + c_i x+\Delta c_i x - y^T D_i y - y^T\Delta D_i y - c_i y - \Delta c_i y\le \le f_i(x)-f_i(y)+\|x\|^2\cdot\|\Delta D_i\|+\|y\|^2\cdot\|\Delta D_i\|+\|\Delta c_i\|\cdot\|x-y\|< f_i(x)-f_i(y)+\delta(\|x\|^2+\|y\|^2+\|x-y\|)$. Выбрав $0<\delta\le g_i(x,y)$, приходим к неравенству $f_i(\delta,\ x)-f_i(\delta,\ y)<0$, что и требовалось доказать.

Справедлива следующая теорема.

Теорема 1. Всякая векторная задача целочисленного квадратичного программирования вида $Q(F,X)$ T_1–устойчива.

Доказательство. Так как $P(F,X)\neq\varnothing$ (в силу конечности множества X), то существуют $y\in P(F,X)$ и $i\in N_l$ такие, что $\forall x\in X\setminus P(F,X)$: $f_i(x)-f_i(y)<0$. Тогда исходя из утверждения 3 $\exists\delta>0$ $\forall(D(\delta),\ C(\delta))\in O_\delta(D,C)$: $f_i(\delta,\ x)-f_i(\delta,\ y)<0$. Учитывая также утверждение 2, приходим к включению (2). Покажем, что верно и соотношение (1). Последнее очевидно в случае, когда $\pi(y,F(\delta))=\varnothing$, так как тогда $y\in P(F(\delta)),X)$ согласно определению понятия эффективного решения. Рассмотрим случай, когда $\pi(y,F(\delta))\neq\varnothing$. Из конечности множества X следует внешняя устойчивость множества Парето [6], т.е. $\forall\ x\in X\ \ \exists\ z\in P(F(\delta),X)$: $F(\delta,z)\geq F(\delta,x)$. Учитывая это и то, что $y\notin P(F(\delta), X)$, приходим к выводу: $P(F(\delta), X)\cap \eta(y, F(\delta))\neq\varnothing$ и $\eta_0=\{x\in\eta(y,F(\delta))\mid F(\delta,x)=F(\delta,y)\}\subset X\setminus P(F(\delta),X)$. Так как $\pi(y,F(\delta))=\eta(y,F(\delta))\setminus\eta_0$, заключаем, что $P(F(\delta),X)\cap\pi(y,F(\delta))\neq\varnothing$, а с учетом включения (2) верно и соотношение (1), и следовательно, задача $Q(F,X)$ T_1–устойчива.

Определение 2. Задачу $Q(F, X)$ назовем T_2–устойчивой по векторному критерию, если $\mathrm{Ker}_p(F)=\{x\in P(F,X)$: $\exists\delta>0\ \forall(D(\delta),C(\delta))\in O_\delta(D,C)\ (x\in P(F(\delta),X))\}\neq\varnothing$. Множество $\mathrm{Ker}_p(F)$ будем называть ядром устойчивости по векторному критерию задачи $Q(F,X)$.

Для получения необходимых и достаточных условий T_2–устойчивости сформулируем следующие леммы и теорему.

Лемма 1. Для любого множества $\tilde{X}\subset X$ существует такое число $\delta>0$, что $\forall(D(\delta),C(\delta))\in O_\delta(D, C)$: $Sm(F,\tilde{X})\subset Sm(F(\delta),\tilde{X})$.

Доказательство. Предположим, что $Sm(F,\tilde{X})\neq\varnothing$, так как в противном случае лемма очевидна. Для любых точек $y\in Sm(F,\tilde{X})$ и $x\in\tilde{X}\setminus\{y\}$ в соответствии с определением строго эффективного решения задачи $Q(F,X)$ множество $N(x,y)=$ $=\{i\in N_l\mid f_i(x)<f_i(y)\}\neq\varnothing$. Выберем величину δ, удовлетворяющую неравенствам $0<\delta\leq\min\{g_i(x,y)\mid y\in Sm(F,\tilde{X}),\ x\in\tilde{X}\setminus\{y\}, i\in N(x,y)\}$. Учитывая утверждение 3, приходим к выводу , что $\forall\ y\in Sm(F,\tilde{X})$ и $\forall x\in\tilde{X}\setminus\{y\}$ имеют место соотношения $N(x,y)\subset N_\delta(x,y)=\{i\in N_l\mid f_i(\delta,x)<f_i(\delta,y)\}\neq\varnothing$ и $y\in Sm(F(\delta),\tilde{X})$. Следовательно, $Sm(F,X)\subset Sm(F(\delta),X)$.

Лемма 2. Для любых множества $\tilde{X}\subset X$ и числа $\delta>0$ существует пара $(D(\delta),C(\delta))\in O_\delta(D, C)$, такая, что $(\tilde{X}\setminus Sm(F,\tilde{X}))\cap S\ell(F(\delta),\tilde{X})=\varnothing$.

Доказательство. Пусть $\exists\ x\in\tilde{X}\setminus Sm(F,\tilde{X})$. Тогда $\exists\ y\neq x$: $F(y)\geq F(x)$. Положим $\forall\delta>0\ D(\delta)=D$, а вектор-строки матрицы $C(\delta)$ зададим следующим образом: $c_i(\delta)=c_i+\alpha(y-x)^{\mathrm{T}}\ \ \forall i\in N_l$, где $0<\alpha<\delta/(l\|y-x\|)$. Тогда $\|C(\delta)-C\|<\delta$ и $f_i(\delta,y)-f_i(\delta,x)=$ $=y^TD_iy+c_iy+\alpha(y-x)^Ty-x^TD_ix-c_ix-\alpha(y-x)^Tx=f_i(y)-f_i(x)+\alpha(y-x)^2>0\ \forall i\in N_l$. Следовательно, $x\notin S\ell(F(\delta),\tilde{X})$.

Теорема 2. Ядро устойчивости по векторному критерию задачи $Q(F,X)$ совпадает с множеством ее строго эффективных точек, более того, справедливы равенства $Sm(F,X)=\mathrm{Ker}_{Sm}(F,X)=\mathrm{Ker}_p(F,X)=\mathrm{Ker}_{Sl}(F,X)$.

Здесь $\mathrm{Ker}_{Sm}(F,X)$, $\mathrm{Ker}_{Sl}(F,X)$ – ядро устойчивости по векторному критерию для задач $Q_{Sm}(F,X)$ и $Q_{S\ell}(F,X)$ поиска строго эффективных и слабо эффективных решений соответственно,

$\mathrm{Ker}_{Sm}(F,X)=\{x\in Sm(F,X)$: $\exists\delta>0\ \forall(D(\delta), C(\delta)\in O_\delta(D, C)\ (x\in Sm(F(\delta),X))\}$,

$\mathrm{Ker}_{Sl}(F,X)=\{x\in S\ell(F,X)\colon \exists\delta>0\ \forall(D(\delta),C(\delta))\in O_\delta(D,C)\ (x\in S\ell(F(\delta),X))\}$.

Доказательство. Включение $Sm(F,X)\subset \mathrm{Ker}_{Sm}(F,X)\subset \mathrm{Ker}_{P}(F,X)\subset \mathrm{Ker}_{Sl}(F,X)$ следует из леммы 1 и определений множеств $\mathrm{Ker}_{Sm}(F,X)$, $\mathrm{Ker}_{P}(F,X)$, $\mathrm{Ker}_{Sl}(F,X)$. В связи с этим для доказательства теоремы достаточно показать, что $\mathrm{Ker}_{Sl}(F,X)\subset Sm(F,X)$. Предположим от противного, что $\exists x\in \mathrm{Ker}_{Sl}(F,X)\setminus Sm(F,X)$, тогда в силу леммы 2 $\forall\delta>0\ \exists(D(\delta),C(\delta))\in O_\delta(D,C)$: $x\notin S\ell(F(\delta),X)$, то есть $x\notin \mathrm{Ker}_{Sl}(F,X)$. Полученное противоречие завершает доказательство теоремы.

Из теоремы 2 следует утверждение.

Утверждение 4. Задача $Q(F,X)$ T_2–устойчива по векторному критерию тогда и только тогда, когда $Sm(F,X)\neq\varnothing$.

Определение 3. Задачу $Q(F,X)$ назовем T_3–устойчивой по векторному критерию, если существует такое число $\delta>0$, что $\forall(D(\delta),C(\delta))\in O_\delta(D,C)$:

$$P(F(\delta),X)\subset P(F,X).$$

Лемма 3. Для любых $\tilde{X}\subset X$ и $\delta>0$ существует пара $(D(\delta),C(\delta))\in O_\delta(D,C)$, такая, что $S\ell(F,\tilde{X})\setminus P(F,\tilde{X})\subset P(F(\delta),\tilde{X})$.

Доказательство. Для произвольного $\delta>0$ и $\forall\ i\in N_l$ зададим матрицы $D_i(\delta)$ и вектор-строки матрицы $C(\delta)$ следующим образом: $D_i(\delta)=D_i-\alpha\sum_{k\in N_l}D_k$, $c_i(\delta)=$ $=c_i-\alpha\sum_{k\in N_l}c_k$, где $0<\alpha<\delta\min\{(\ell|C|)^{-1},\ (\sum_{k\in N_l}|D_k|)^{-1}\}$. Таким образом, $\|C(\delta)-C\|<$ $<\delta$ и $\|D_i(\delta)-D\|<\delta\ \ \forall\ \ i\in N_l$. Далее с помощью рассуждений, подобных проведенным при доказательстве леммы 1.2 из [1], и наложив на α дополнительное требование

$$\alpha<\min\left\{\frac{f_i(x)-f_i(y)}{\sum\limits_{k\in N(x,y)}(f_k(x)-f_k(y))},\ y\in Sl(F,\tilde{X})\setminus P(F,\tilde{X}),\ x\in\tilde{X}\setminus\pi(y,F),\ i\in N(x,y)\right\},$$

приходим к заключению о справедливости данного утверждения.

Лемма 4. Для любого $\tilde{X}\subset X$ существует такое число $\delta>0$, что $\forall(D(\delta),C(\delta))\in$ $\in O_\delta(D,C)\colon S\ell(F(\delta),\tilde{X})\subset S\ell(F,\tilde{X})$.

Доказательство. Пусть δ удовлетворяет неравенствам

$$0<\delta\leq\min\{g_i(x,y)\mid i\in N_l,\ x,y\in\tilde{X},\ f_i(x)\neq f_i(y)\}.$$

Рассмотрим произвольные пару $(D(\delta),C(\delta))\in O_\delta(D,C)$ и точку $\bar{x}\in S\ell(F(\delta),\tilde{X})$. Покажем, что $\bar{x}\in S\ell(F,\tilde{X})$. Предположим противное: $\bar{x}\notin S\ell(F,\tilde{X})$. Согласно определению слабо эффективного решения это означает, что $\sigma(\bar{x},F)=$ $=\{y\in\tilde{X}\mid F(y)>F(\bar{x})\}\neq\varnothing$. Тогда согласно утверждению 3 $\forall y\in\sigma(\bar{x},F)$ и $\forall i\in N_l$ имеют место соотношения $f_i(\delta,\bar{x})-f_i(\delta,y)<0$. Следовательно, $\sigma(\bar{x},F)\subset\sigma(\bar{x},F(\delta))=$

$=\{y\in \tilde{X} \mid F(\delta,y)>F(\delta,\bar{x})\}\neq\varnothing$ и $\bar{x}\notin S\ell(F(\delta),\tilde{X})$. Это противоречит первоначальному выбору точки $\bar{x}$ и завершает доказательство леммы.

Отметим, что задача $Q_{S\ell}(F,X)$ в случае поиска слабо эффективных решений всегда T_3–устойчива по критерию.

Теорема 3. Задача $Q(F,X)$ T_3–устойчива по векторному критерию тогда и только тогда, когда $P(F,X)= S\ell(F,X)$.

Доказательство. Необходимость. Из T_3–устойчивости по критерию задачи $Q(F,X)$ следует, что $\exists\delta>0$ $\forall(D(\delta),C(\delta))\in O_\delta(D,C)$: $P(F(\delta),X)\subset P(F,X)$. Предположим, что $\exists\, x \in S\ell(F, X) \setminus P(F,X)$. В силу леммы 3 $\forall\delta>0$ $\exists$ $(D(\delta),C(\delta)) \in \in O_\delta(D,C)$: $x\in P(F(\delta),X)$ и, следовательно, учитывая предположение о T_3–устойчивости задачи, $x\in P(F, X)$, что противоречит выбору точки x и доказывает первую часть теоремы.

Достаточность.Пусть $S\ell(F, X)= P(F,X)$. Учитывая лемму 4 приходим к выводу, что $\exists\delta>0$, такое, что $\forall(D(\delta),C(\delta))\in O_\delta(D,C)$ справедливы включения $P(F(\delta),X)\subset \subset S\ell(F(\delta),X)\subset S\ell(F,X)\subset P(F,X)$. Теорема доказана.

Определение 4. Задачу $Q(F,X)$ назовем T_4–устойчивой по векторному критерию, если существует такое число $\delta>0$, что $\forall(D(\delta),C(\delta))\in O_\delta(D,C)$:

$$P(F,X) \subset P(F(\delta), X).$$

Теорема 4. Задача $Q(F, X)$ T_4–устойчива по векторному критерию тогда и только тогда, когда $P(F,X)= Sm(F,X)$.

Доказательство теоремы опирается на леммы 1 и 2.

Следует заметить, что согласно лемме 1 задача $Q_{Sm}(F,X)$ поиска строго эффективных решений всегда T_4–устойчива по критерию.

Определение 5. Задачу $Q(F,X)$ назовем T_5–устойчивой по векторному критерию, если $\exists\delta>0$, такое, что $\forall(D(\delta), C(\delta))\in O_\delta(D, C)$: $P(F, X) =P(F(\delta), X)$.

Очевидно, что задача $Q(F, X)$ T_5–устойчива по векторному критерию тогда и только тогда, когда она T_3– и T_4–устойчива. Непосредственно из теорем 3 и 4 вытекает следующая теорема.

Теорема 5. Задача $Q(F, X)$ T_5–устойчива по векторному критерию тогда и только тогда, когда $Sm(F,X) = P(F,X)= S\ell(F,X)$.

Проанализировав определения и полученные необходимые и достаточные условия различных типов устойчивости по векторному критерию задачи $Q(F, X)$ приходим к заключению, что задача T_1–устойчива, а соотношения между рассмотренными выше видами устойчивости можно представить следующим образом. Если задача $Q(F, X)$ T_4 –устойчива, то она и T_2–устойчива. Задача $Q(F, X)$ T_5–устойчива тогда и только тогда, когда она T_3– и T_4–устойчива одновременно. Нетрудно убедиться, что T_3–устойчивая задача $Q(F, X)$ может иметь пустое ядро устойчивости, т.е. не быть T_2–устойчивой.

Т..Т. Лебєдєва, Н.В. Семенова, Т.І. Сергієнко

ПРО СТІЙКІСТЬ ЗА КРИТЕРІЄМ ВЕКТОРНИХ ЗАДАЧ ЦІЛОЧИСЛОВОГО КВАДРАТИЧНОГО ПРОГРАМУВАННЯ

Представлені результати дослідження різних видів стійкості векторних задач цілочислового квадратичного програмування до збурень коефіцієнтів векторного критерію. Визначені відповідні поняття стійкості, сформульовані необхідні і достатні умови для всіх розглянутих варіантів стійкості, проаналізовані співвідношення між ними.

T.T.Lebedeva, N.V. Semenova, T.I. Sergienko,

STABILITY WITH RESPECT TO CRITERION OF VECTOR PROBLEMS INTEGER QUADRATIC PROGRAMMING

The paper deals with the results of the investigation of several types of stability for vector integer quadratic programming problems with respect to perturbations of vector criterion coefficients. Respective notions of stability are defined. Necessary and sufficient conditions are formulated for every considered version of stability. Interrelations between such versions are analyzed.

1. *Сергиенко И.В., Козерацкая Л.Н., Лебедева Т.Т.* Исследование устойчивости и параметрический анализ дискретных оптимизационных задач. – К.: Наук. думка, 1995.–170 с.
2. *Emelichev V.A., Girlich E., Nikulin Yu.V., Podkopaev D.V.*. Stability and regularization of vector problems of integer linear programming // Optimization. – 2002, – 51, N4. – P.645-676.
3. *Емеличев В.А., Никулин Ю.В.* О ядре устойчивости векторной квадратичной задачи булева программирования // Кибернетики и сист. анализ. – 2001. – № 2. – С.83-90.
4. *Emelicev V.A., Nikulin Yu.V.* On the stability of effecient solution in a vector quadratic boolean programming problem // Изв. АН Республики Молдова. Сер.Математика. – 2000.– № 1.– С.33-40.
5. *Козерацкая Л.Н.* Множество строго эффективных точек задачи частично целочисленной векторной оптимизации как характеристика ее устойчивости // Кибернетика и сист. анализ. – 1997. – № 6. – С.181-184.
6. *Полищук Л.И.* Анализ многокритериальных экономико-математических моделей. – Новосибирск : Наука, 1989. – 352 с.

Получено 14.10.2003