Теорія оптимальних рішень

УДК 519.8

Г.Ц. ЧИКРИЙ

ПОЗИЦИОННОЕ УПРАВЛЕНИЕ В ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНО-РАЗНОСТНЫХ ИГРАХ ПРЕСЛЕДОВАНИЯ

Получены достаточные условия окончания дифференциально-разностной игры преследования, а также способ построения управления преследователя.

В известной работе [1] Б.Н. Пшеничный разработал схему получения достаточных условий и построения соответствующего управления преследователя для завершения линейной дифференциальной игры.

Здесь эта схема применена для исследования квазилинейной дифференциально-разностной игры преследования.

Рассмотрим конфликтно-управляемый процесс

$$\dot{z}(t) = Az(t) + Bz(t-\tau) - \varphi(u,v), \qquad (1)$$

$$z \in R^n, u \in U, v \in V,$$

где A квадратная матрица n-го порядка, u и v – параметры управления преследователя и убегающего, выбираемые из компактов U и V, соответственно, а $\varphi(u,v)$ – непрерывная по совокупности переменных вектор-функция.

Задано терминальное множество M^*, $M^* \subset R^n$, имеющее цилиндрический вид:

$$M^* = M_0 + M,$$

где M_0 – линейное подпространство в R^n, а M – выпуклый компакт из подпространства L, являющегося ортогональным дополнением к M_0 в пространстве R^n.

Цель преследователя – вывести в кратчайшее время траекторию системы (1) на множество M^*. Игра считается оконченной в первый момент времени t, когда $z(t) \in M^*$.

В качестве начального состояния системы задана абсолютно непрерывная вектор-функция $z^0(t)$, определенная на отрезке $[-\tau, 0]$.

Состояние системы в текущий момент времени t, $t \in [0,+\infty)$, соответственно определяется вектор-функцией $z^t(\cdot)$, $z^t(s) = z(t+s)$, $-\tau \le s \le 0$, являющейся куском реализованной траектории системы (1) на отрезке времени $[t-\tau, t]$.

Игрокам разрешено так выбирать свои управления, чтобы их реализации во времени представляли собой измеримые по Лебегу функции. Области допустимых управлений игроков обозначим Ω_u и Ω_v, соответственно.

Пусть на отрезке времени $[0,T]$, где T – искомое время окончания игры, игроки применяли некоторые допустимые управления $u(t) \in \Omega_u$ и $v(t) \in \Omega_v$. Тогда вектор состояния системы в этот момент времени может быть представлен в виде

$$z(t) = \tilde{z}(t,T) - \int_t^T K(T-s)\varphi\big(u(s), v(s)\big)ds ,$$

где t – некоторый промежуточный момент времени, $0 \le t \le T$, а

$$\tilde{z}(t,T) = K(T)z(0) + \int_{-\tau}^{0} K(T-\tau-s)Bz^0(s)ds - \int_0^t K(T-s)\,\varphi\big(u(s), v(s)\big)ds .$$

Отметим, что пара $\big(t, \tilde{z}(t,T)\big)$ аккумулирует всю текущую информацию о состоянии игры. Назовем ее позицией игры. Обозначим π оператор ортогонального проектирования из R^n на подпространство L. Очевидно, что $z(T) \in M$, если выполнено включение

$$\pi\,\tilde{z}(t,T) \in F(t,T), \tag{2}$$

где $F(t,T)$ – многозначное отображение $[0,+\infty) \to 2^L$, определяемое следующим образом:

$$F(t,T) = \bigcap_{v(\cdot)\in\Omega_v} \left[M + \int_t^T \pi K(T-\theta)\varphi\big(U, v(\theta)\big)d\theta \right] . \tag{3}$$

Здесь $K(t)$ – матричная функция, удовлетворяющая следующим условиям:

$K(t) = 0$ при $t < 0$;

$K(0) = E$;

$K(t-\tau)$ непрерывна на $[0,+\infty)$;

$K(t)$ удовлетворяет уравнению $\dot{K}(t) = AK(t) + BK(t-\tau)$.

Интеграл от многозначного отображения в (3) определяется стандартным образом [3]. При построении множества $F(t,T)$ использовались конструкции из [2]. Отметим, что в случае, когда $\varphi(u,v) = u - v$, формула (3) значительно упрощается и приобретает вид

$$F(t,T)=\left(M+\int_t^T \pi K(\theta)Ud\theta\right)\underline{*}\int_t^T \pi K(\theta)Vd\theta ,$$

где $\underline{*}$ – операция геометрического вычитания множеств [3]. В силу предложений о параметрах игры, многозначное отображение $F(t,T)$ является выпуклозначным и полунепрерывным сверху [4]. В дальнейшем будет использоваться понятие опорной функции выпуклого множества X, $X \subset R^n$. Напомним ее определение: $C(X;p)=\sup_{x\in X}(x,p), \quad p\in R^n$.

Из теоремы об отделимости выпуклых множеств [1] следует, что включение в (2) имеет место тогда и только тогда, если

$$\min_{\|p\|=1}\left[\left(p,\pi\tilde{z}(t,T)\right)+C\left(\pi F(t,T),-p\right)\right]\geq 0 ,$$

где $C(\pi F(t,T),p)$ – опорная функция множества $F(t,T)$. Ввиду теоремы Ляпунова о векторных мерах [4], последняя может быть записана в явном виде

$$C(\pi F(t,T);p)=\mathrm{co}\left[C(M;p)+\int_t^T \min_{v\in V}\max_{u\in U}\left(p,\pi K(T-s),\varphi(u(s),v(s))\right)ds\right].$$

Заметим, что барьерным конусом множества M^* является множество L и $C(M^*;p)=C(M;p)$. Так как M является компактом, то функция $C(M;p)$ непрерывна на множестве L.

Введем в рассмотрение следующую функцию:

$$\lambda(t,T,\tilde{z})=\min_{\|p\|=1}\left[(p,\tilde{z})+C\left(\pi F(t,T),-p\right)\right]$$

и множество векторов p, $\|p\|=1$, $p\in L$, на котором этот минимум достигается

$$\Gamma(t,T,\tilde{z})=\left\{p, p\in L, \|p\|=1:(p,\tilde{z})+C\left(\pi F(t,T),-p\right)=\lambda(t,T,\tilde{z})\right\}.$$

Обозначим $T(t,\tilde{z})$ минимальный корень T уравнения $\lambda(t,T,\tilde{z})=0$, который больше или равен t. Если такой корень не существует, то полагаем $T(t,\tilde{z})=+\infty$. Очевидно, что $T(t,\tilde{z})=t$ только для $\pi z(t)\in M$. Если $T\left(0,\tilde{z}^0(\cdot)\right)<+\infty$, то какое бы управление $v(t)\in\Omega_v$ не выбрал наперед убегающий, у преследователя найдется управление $u(t)\in\Omega_u$, что $\pi z(t)\in M$.

Время $T_0=T\left(0,\tilde{z}(0)\right)$ назовем моментом первого поглощения.

Таким образом, с учетом содержательного смысла функции $T(t,\tilde{z})$, начальной позицией игры является пара $\left(0,\tilde{z}(0,T_0)\right)$.

Теорема. Пусть для заданного начального состояния системы (1) $T_0<+\infty$; кроме того, для произвольной позиции $(t_1,\tilde{z}_1)$, для которой $T(t_1,\tilde{z}_1)<T_0$,

множество $\Gamma(t,\tilde{z})$ состоит из единственного вектора $p(t,\tilde{z})$ для всех $(t,\tilde{z})$ из некоторой окрестности $\{\tilde{z}_1, T(\tilde{z}_1)\}$. Тогда преследователь может закончить игру за время не большее T_0 при любом допустимом управлении убегающего.

Доказательство проводится аналогично доказательству теорем, приведенных в [5,6]. Заметим, что утверждение теоремы остается справедливым и для систем нейтрального типа [7].

Г.Ц. Чикрій

ПОЗИЦІЙНЕ КЕРУВАННЯ В ДИФЕРЕНЦІЙНО-РІЗНИЦЕВІЙ ГРІ ПЕРЕСЛІДУВАННЯ

Одержані достатні умови для завершення диференціально-різницевої гри переслідування, а також засіб будування відповідного керування переслідувача.

G.Ts. Chikrii

POSITIONAL CONTROL IN DIFFERENCE-DIFFERENTIAL GAMES OF PURSUIT

Sufficient conditions, ensuring termination of difference-differential games of pursuit, are derived. Also, method of constructing corresponding control of the pursuer is provided.

1. *Пшеничный Б.Н.* Линейные дифференциальные игры // Автоматика и телемеханика. – 1968. – № 1. – С. 65–79.
2. *Чикрий А.А.* Дифференциальные игры с несколькими преследователями //Тр. Междунар. мат. центра им. С. Банаха. – Варшава, 1985. – 14. – С. 81-107.
3. *Понтрягин Л.С.* Избранные научные труды. – М.: Наука, 1988. – 2. – 576 с.
4. *Иоффе А.Д., Тихомиров В.М.* Теория экстремальных задач. – М.: Наука, 1974. – 479 с.
5. *Arkadii A. Chikrii, Greta Ts. Chikrii and Konstyantyn Yu. Volyansky.* Game Problems of Pursuit for Evolutionary Conflict-Controlled Processes // Proc. of X Intern. Symp, on Dynamic Games and Appls. – St. Petersburg, 2002. – 1. – P. 213-220.
6. *Чикрий Г.Ц., Волянский К.Ю.* О позиционном управлении в интегро-дифференциальных играх сближения // Кибернетика и системный анализ. – 2002. – № 5. – С. 100–117.
7. *Никольский М.С.* Линейные дифференциальные игры преследования при наличии запаздываний // ДАН СССР. – 1971. – 197, № 5. – С. 1018–1020.

Получено 02.09.2003