УДК 519.21

Т.В. ПЕПЕЛЯЕВА

К ВОПРОСУ ОБ ОПТИМАЛЬНЫХ СТРАТЕГИЯХ НА РЫНКЕ ЦЕННЫХ БУМАГ

Исследованы некоторые торговые стратегии на рынке ценных бумаг. Рассмотрен метод нахождения среди них оптимальной. Указаны условия существования оптимальной стратегии в случае компактности множества состояний и множества выбора стратегий. Доказаны соответствующие теоремы.

© Т.В. Пепеляева, 2003

Для агентов, оперирующих на фондовых и финансовых рынках, существует проблема выбора среди возможных стратегий именно той, которая бы приносила им наибольшую прибыль. Этой проблематике в современной научной литературе уделяется постоянное и пристальное внимание, ввиду её практической важности, поскольку от строго обоснованных решений в этой области во многом зависят инвестиционные процессы в экономике и, как следствие, её устойчивый рост и стабильность. В рамках этой проблемы особое внимание уделяется определению оптимальных стратегий с использованием функций полезности. Именно решению этой задачи и посвящена настоящая работа.

В данной работе исследуется метод отыскания оптимальной стратегии на рынке ценных бумаг, центральное место в котором занимает понятие управляемых цепей Маркова. Приведены условия существования такой стратегии. Доказаны соответствующие теоремы.

Ранее в [1] была доказана теорема существования оптимального марковского управления в случае конечных множества состояний и множества выбора стратегий. В работе [2] был указан метод нахождения торговой стратегии на рынке ценных бумаг при тех же условиях . Настоящая же робота рассматривает более общий случай, когда эти два пространства являются компактными.

В основном будем использовать определения и обозначения, которые подробно изложены в работе [2]. Приведём основные из них.

Пусть (Ω,F,P) – вероятностное пространство. И пусть $\forall t\geq 0$ $F_t\subset F$ множество событий, соответствующее информации, полученной до момента времени t, $\forall$ $t<s$ $F_t\subset F_s$.

Пусть L – это пространство ограниченных адаптированных процессов, то есть пространство последовательностей случайных величин вида $c=\{c_0, c_1, c_2,\ldots\}$ таких, что существует константа k $\forall t\geq 0$ c_t – F_t-измерима и $|c_t|\leq k$.

Рассмотрим рынок ценных бумаг. Введём некоторые обозначения, которые касаются ценных бумаг.

Обозначим δ_t – дивиденды, заплаченные от ценной бумаги в момент времени t, S_t – цена ценной бумаги в момент времени t.

Пусть N ценных бумаг определены $\mathbf{R}^N$-измеримым адаптированным процессом $\delta=(\delta^1,\ldots,\delta^N)$. С ценными бумагами связаны некоторые процессы цен $S=(S^1,\ldots,S^N)$.

Под термином торговая стратегия будем понимать адаптированный процесс θ в $\mathbf{R}^N$, а $\theta_t=(\theta_t^1,\ldots,\theta_t^N)$ означает портфель, полученный после торговли в момент времени t. Торговая стратегия $\theta=(\theta^1,\ldots,\theta^N)\in\Theta\equiv L^N$.

Дивидендный процесс δ^θ определим с помощью торговой стратегии θ следующим образом:

$$\delta^\theta_t=\theta_{t-1}(S_t+\delta_t)-\theta_t S_t,\quad \theta_{-1}=0.$$

Агент, оперирующий на рынке ценных бумаг, ставит перед собой задачу максимизировать прибыль от выбранной им стратегии. Введём строго возрастающую функцию полезности U, определенную на множестве L_+ (множестве неотрицательных адаптированных процессов потребления), и процесс вклада $e\in L_+$.

Для решения задачи нахождения оптимальной для агента стратегии (с целью максимизации дохода), нам необходимо найти $\sup\limits_{c,\theta} U(c)$, $c\in\{e+\delta^\theta\in L_+:$ $\theta\in\Theta\}$.

Рассмотрим теперь множество состояний $Z=\{1,\ldots,k\}$.

Для любого t X_t: $F_t\to Z$ – случайная величина и $X_t(z_0, z_1, z_2,\ldots)= z_t$.

$\forall i\in Z$: P_i – вероятностная мера на (Ω, F) определена единственным образом двумя условиями:

$$P_i(X_0=i)=1,$$
$$P_i(X_{t+1}=j\ /\ X_0, X_1,\ldots, X_t)= q_{X(t),j}, \tag{1}$$

где $q_{X(t)}$ – переходная матрица.

Соотношение (1) означает, что $X=\{X_0, X_1,\ldots\}$ – марковский процесс.

Зафиксируем начальное состояние i, и рассмотрим функцию полезности U^i:$L_+\to\mathbf{R}$, которую определяет величина переоценки $\rho\in(0, 1)$ и строго возрастающая, ограниченная, вогнутая и непрерывная функция u:$\mathbf{R}_+\to\mathbf{R}$, такая что

$$U^i(c)= E^i\left[\sum_{t=0}^{\infty}\rho^t u(c_t)\right],$$

где E^i означает математическое ожидание по вероятностной мере P_i, согласованное с начальным состоянием X_0=i.

Вместе с функцией U^i рассмотрим также другую функцию полезности

$$U_1^i(c) = \lim_{T\to\infty} \inf \frac{1}{T} \sum_{t=0}^{T} E^i u(c_t).$$

Определим ещё несколько функций, необходимых нам при рассмотрении рынка ценных бумаг. Пусть функции g: $Z\to\mathbf{R}_{++}$, f: $Z\to R_{++}^N$ такие, что для любого t вклад и дивиденды определяются следующими соотношениями соответственно: $e_t=g(X_t)$, $\delta_t = f(X_t)$. Стоимости ценных бумаг заданы с помощью некоторой функции S: $Z\to R_{++}^N$ следующим образом $\forall t$: $S_t=S(X_t)$.

Зафиксируем портфель $b\in R_{++}^N$ и пусть – b есть нижняя граница короткой позиции. Обозначим $\underline{w} = \min_{i\in Z}$ - b[S(i)+f(i)] нижнюю границу стоимости. Пусть $D=Z\times[\underline{w}, \infty)$. Обозначим B(D) пространство таких функций F: D→R, для которых $\forall i \in Z$ $F(i, \cdot)$: $[\underline{w}, \infty)\to R$ – ограниченная, непрерывная и вогнутая функция.

Функции $U_1^i(c)$ поставим в соответствие функцию $V\in B(D)$ такую, что

$$V(i,w) = \sup_{(c,\theta)\in L_+\times\theta} U_1^i(c), \tag{2}$$

которая удовлетворяет следующим условиям

$$W_0^\theta = w, \tag{3}$$

$$W_t^\theta = \theta_{t-1}[S(X_t) + f(X_t)], \qquad t\ge 1 \tag{4}$$

$$c_t + \theta_t S(X_t) \le W_t^\theta + g(X_t), \qquad t\ge 0 \tag{5}$$

$$\theta_t \ge -b, \qquad t\ge 0 . \tag{6}$$

Стратегия θ^* называется U-оптимальной (U_1 -оптимальной), если

$U(c, \theta^*) = \sup_{\theta\in\theta} U(c,\theta)$, (U_1 $(c, \theta^*) = \sup_{\theta\in\theta} U_1(c,\theta)$).

Для некоторой функции $F\in B(D)$ определим $\mathcal{U}$F:D→R следующим образом

$$\mathcal{U}F(i,w) = \sup_{(\bar{c},\bar{\theta})\in R_+\times R^N} \rho(1-\rho)u(\bar{c}) + \rho E^i[F(X_2, \bar{\theta}\,[S(X_2) + f(X_2)])], \tag{7}$$

$$\bar{c} + \bar{\theta}\cdot S(i) \le w + g(i), \tag{8}$$

$$\bar{\theta} \ge -b . \tag{9}$$

Уравнение (7) – (9) называется уравнением Беллмана. Функцию V будем искать как решение уравнений $\mathcal{U}$F=F ([3]).

Рассмотрим функции C: $D\to R_+$, Φ: $D\to R^N$, для которых [C(i,w), Φ(i,w)] – решение (7) – (9). При заданных начальных условиях (i,w) в (2) – (6) пусть

$W_0^\bullet = w$, $W_t^\bullet = \Phi(X_{t-1}, W_{t-1}^\bullet)$, $t\ge 1$.

Пусть (c^*, θ^*) определены следующим образом

$c_t^{\bullet}$=C(X_t, $W_t^{\bullet}$), $\theta_t^{\bullet}$=Φ(X_t, $W_t^{\bullet}$).

Пара (c^*, θ^*) называется оптимальной политикой обратной связи.

Приведём несколько утверждений и обозначений, которые нам понадобятся для дальнейшего изложения.

Обозначим $\mathfrak{R}$ – класс стационарных нерандомизированных стратегий; M(Z) – банахово пространство ограниченных измеримых по Борелю функций на Z; C(Z) – банаховое пространство ограниченных непрерывных на Z функций; C_1(Z) – полное метрическое пространство ограниченных полунепрерывных сверху функций на Z.

Теорема 1 [4]. Пусть существуют постоянная g и ограниченная борелевская функция v(c) на Z, такие что

$$g+ v(c)= \sup_{\theta\in\Theta}\left\{ u(c,\theta)+\int v(y)P(dy/c,\theta)\right\} ,$$

тогда $\sup\limits_{\theta\in\Theta} U_1(c,\theta)\le$g.

Если при этом

$$g+ v(c)= \max_{\theta\in\Theta}\left\{ u(c,\theta)+\int v(y)P(dy/c,\theta)\right\} \qquad (10)$$

и для некоторой стратегии $\theta^*\in\Theta$

g+ v(c)= $u(c,\theta)+\int v(y)P(dy/c,\theta)$, то

θ^* является U_1 - оптимальной стратегией и $U_1(c,\theta^*)\equiv$g.

Следующие теоремы определяют достаточные условия U-оптимальной стратегии.

Теорема 2 [5]. Пусть Θ – конечно. Тогда $\forall\rho\in(0,1)$ в $\mathfrak{R}$ существует U-оптимальная стратегия θ_ρ и оптимальный доход U_ρ= U_ρ(c, θ_ρ) является единственным в M(Z) решением уравнения

$$U(c)= \max_{\theta\in\Theta}\left\{ u(c,\theta)+\rho\int U(y)P(dy/c,\theta)\right\}. \qquad (11)$$

Теорема 3 [6]. Пусть Θ – компакт и 1) функция u(c, θ) полунепрерывна сверху на Z×Θ; 2) переходная вероятность P(· / c, θ) слабо непрерывна по c, θ .

Тогда $\forall\rho\in(0,1)$ в $\mathfrak{R}$ существует U- оптимальная стратегия θ_ρ и оптимальный доход U_ρ= U_ρ(c, θ_ρ) является единственным в C_1(Z) решением уравнения (11).

Для нашего случая компактности множеств состояний и выбора стратегий нам понадобится следующая функция:

$$v_\rho(c) = U_\rho(c) - U_\rho(z),$$

где z – некоторая фиксированная точка пространства Z.

Очевидно, что для $v_\rho(c)$ выполнено соотношение

$$g_\rho + v_\rho(c) = \max_{\theta\in\Theta}\Big\{ u(c,\theta) + \rho\int v_\rho(y)P(dy/c,\theta)\Big\}, \tag{12}$$

где

$$g_\rho = (1-\rho)\,U_\rho(z).$$

Пусть также выполнено предположение:
существуют последовательность $\{\rho_n\}\uparrow 1$, точка $z\in Z$ и число $N<\infty$:

$$\left|v_{\rho_n}(c)\right| < N,\ c\in L_+,\ n=1,2,\ldots \tag{13}$$

Теперь мы можем сформулировать и доказать следующее утверждение.

Теорема 4. Пусть Z – компакт, Θ – конечное множество, и выполнены предположение (13) и 1) функция $u(c,\theta)$ непрерывна по c $\forall\theta\in\Theta$; 2) $\theta(X/c,c',\theta)\to 0$ при $c'\to c$ $\forall\theta\in\Theta$, где $\theta(\cdot/c,c',\theta)$ есть полная вариация меры $Q(\cdot/c,c',\theta)==P(\cdot/c,\theta)-P(\cdot/c',\theta)$.

Тогда функция V является единственной неподвижной точкой U . Оптимальная политика обратной связи (c^*, θ^*) – является решением (2) – (6).

Доказательство. Предположим, что F – единственное решение уравнения Беллмана (7) – (9). Покажем, что F совпадает с нашей функцией стоимости V. Для этого зафиксируем произвольное начальное состояние $i\in Z$ и начальную стоимость $w\in[\underline{w},\infty)$. И пусть (c,θ) – произвольная допустимая политика.

Из уравнений (7) – (9) для t получаем, что

$$F(X_t, W_t^\theta)\ge(1-\rho)\rho\, u(c_t) + E^i[F(X_{t+1}, W_{t+1}^\theta)/X_t].$$

Теперь умножим это неравенство на ρ^{t-1} , получим

$$\rho^{t-1}F(X_t, W_t^\Theta) - \rho^t E^i[F(X_{t+1}, W_{t+1}^\theta)/X_t] \ge (1-\rho)\rho^t u(c_t). \tag{14}$$

В левой и в правой части возьмём математическое ожидание:

$$E^i[\rho^{t-1}F(X_t, W_t^\theta)] - \rho^t E^i[F(X_{t+1}, W_{t+1}^\theta) \ge (1-\rho)E^i[\rho^t u(c_t)].$$

После того, как мы просуммируем обе части полученного неравенства по t от 0 до T, T≥1, получили следующее соотношение:

$$\rho^{-1}E^i[F(X_0, W_0^\theta)] - \rho^T E^i[F(X_{T+1}, W_{T+1}^\theta) \ge (1-\rho)E^i[\sum_{t=0}^{T}\rho^t u(c_t)]. \tag{15}$$

Используя условия (12) и (13) ,мы получим следующее неравенство

$$\left|v_{\rho_n}(c) - v_{\rho_n}(c')\right| \le \max_{\theta\in\Theta}\{\,|u(c,\theta)-u(c',\theta)| + N\theta(X/c,c',\theta)\}.$$

Тогда из условий (1, 2) теоремы вытекает, что $\{v_{\rho_n}(c)\}$ равностепенно непрерывно, и , принимая во внимание (13) , по теореме Арцела – Асколи из последовательности $\{v_{\rho_n}\}$ можно выделить подпоследовательность $\{v_{\rho_{n_k}}\}$ которая сходится равномерно к некоторой функции $v\in C(Z)$. Так как $|g_\rho|<L$, то можно полагать,что $\{g_{\rho_{n_k}}\}$ сходится к некоторой постоянной g. В соотноше-

нии (12) положим $\rho = \rho_{n_k}$, и перейдём к пределу при $k\to\infty$. Тогда получим выражение (10), что указывает на существование U_1-оптимальной стратегии θ^* при условиях теоремы, и выполнено

$$U_1^i(c, \theta^*) \equiv g = \lim_{\rho\to 1} (1-\rho)\, U^i(c, \theta^*) .$$

Перейдя к пределу при $T\to\infty$, $\rho_\alpha\to 1$ в (15), получим

$F(i,w) \geq U_1^i(c)$. Откуда $F(i,w) \geq V(i,w)$.

Из неравенства (14) для пары (c^*, θ^*) вытекает, что $F(i,w)= U_1^i(c^*)$.

Поскольку (i,w) выбраны произвольно, поэтому V – действительно функция стоимости, и (c^*, θ^*) – оптимальная политика.

Доказательство следующего утверждения проводится по той же схеме, что и предыдущая, с использованием соответствующего утверждения из [4].

Теорема 5. Пусть Z и Θ– компакты, выполнены предположение (13) и следующие условия:

1) функция $u(c, \theta)$ непрерывна по c, θ;
2) $\theta(X/c,c',\theta)\to 0$ при $c' \to c$ равномерно по $\theta\in\Theta$;
3) переходная вероятность $P(\cdot\ /\ c, \theta)$ слабо непрерывна по c, θ.

Тогда функция V является единственной неподвижной точкой U. Оптимальная политика обратной связи (c^*, θ^*) – является решением (2) – (6).

Приведенные теоремы доказывают существование оптимальных торговых стратегий и, более того, определяют способ их нахождения.

Настоящие теоретические результаты могут быть доведены до разработки численных алгоритмических процедур с последующей программной реализацией на современной вычислительной технике. В сочетании с удобным пользовательским интерфейсом эти процедуры будут вполне пригодны для практического использования агентами и участниками фондовых и финансовых рынков.

Т.В. Пепелясва

ДО ПИТАННЯ ПРО ОПТИМАЛЬНІ СТРАТЕГІЇ НА РИНКУ ЦІННИХ ПАПЕРІВ

Досліджено деякі торгові стратегії на ринку цінних паперів. Розглянуто метод знаходження серед них оптимальної. Наведені умови існування оптимальної стратегії у випадку компактності множини станів та множини вибору стратегій. Доведені відповідні теореми.

T.V.Pepeljaeva

TO THE QUESTION ABOUT OPTIMAL STRATEGIES ON THE MARKET OF VALUABLE PAPERS

Trading strategies on the market of expensive papers are investigated. The method of founding of optimal strategy is considered. The conditions of optimal strategy existing is indicated in case of compact set of states and set of strategy choice. The corresponding theorems are proved.

1. *Висков О.В., Ширяев А.Н.* Об управлениях, приводящих к оптимальным стационарным режимам // Тр. МИАН, LXX1. – С. 35-45.
2. *Кнопов П.С., Пепеляева Т.В.* О некоторых торговых стратегиях на рынке ценных бумаг // Кибернетика и системный анализ. – 2002. – № 5. – С.117–121.
3. *Darrell Duffie*. Dynamic Asset Priciny Theory, Princeton. – 1992. –299 p.
4. *Губенко Л.Г., Штатланд Э.С.* Об управляемых марковских процессах с дискретным временем // Теория вероятности и математическая статистика. – 1972. – № 7. – С. 51–64.
5. *Blackwell D.* Discounted dynamic programming // Ann. Math. Statist. – 1965. – 36, N 1. – 290 p.
6. *Maitra A.* Discounted dynamic programming on compact metric spaces // Sankhya, ser. A. – 1968. – 30, N 2. – 310 p.

Получено 28.08.2003