УДК 519.1

Г.А. ДОНЕЦ, Г.А. ШУЛИНОК

ОБ ИЗОМОРФИЗМЕ НАТУРАЛЬНЫХ АРИФМЕТИЧЕСКИХ ГРАФОВ

Для натуральных арифметических графов (NA-графов) с одной образующей указываются признаки, позволяющие найти все множество изоморфных графов. Доказывается ряд утверждений, позволяющих конструктивно перечислить это множество.

Числовые графы являются достаточно большим подклассом обычных графов. Они выделяются, прежде всего, способом представления. Существует достаточно обширная литература, в которой исследуются различные проблемы числовых графов [1-6].

Числовым графом $G=(X,U,F)$ называется совокупность непустого множества вершин $X=\{x_1,x_2,\ldots,x_n\}\in N$, непустого множества образующих $U=\{u_1,u_2,\ldots,u_m\}\in N$ и числовой функции смежности F, определенной на множестве всех пар из X. Две вершины x_i и x_j, принадлежащие X, называются смежными, если $F(x_i,x_j)\in U$.

В данной работе положено начало исследования проблемы изоморфизма на множестве числовых графов. Известно [7], что для обычных графов задача ИЗОМОРФИЗМ ГРАФОВ не может быть отнесена ни к классу NP-полных задач, ни к классу полиномиальных задач. Здесь высказывается гипотеза, что на числовых графах существует полиномиальный алгоритм распознавания изоморфизма двух графов.

Как и для обычных графов, изоморфизм – это взаимно однозначное отображение вершин графов, сохраняющее смежность. Однако ввиду того, что связность числовых графов определяется функцией смежности, возможно исследовать изоморфизм в числовых графах основываясь на особенностях функции смежности F.

Два числовых графа $G_1 = (X, U_1, F)$ и $G_2 = (X, U_2, F)$ называются изоморфными, если существует взаимно однозначное отображение φ множества X на себя такое, что справедливо соотношение

$$\{\forall x_i,\, x_j \in X \,|\, F(x_i, x_j) \in U_1\} \Leftrightarrow \{F(\varphi x_i, \varphi x_l) \in U_2\}\,. \tag{1}$$

Рассмотрим самые простейшие числовые графы – натуральные арифметические графы с одной образующей, то есть числовые графы у которых $X = N_n$, $U = \{u\}$, а $F(x_i, x_j) = x_i + x_j$. Для них вопрос об изоморфизме решает следующая

Теорема 1. В классе NA-графов с одной образующей каждому графу $G = (X, u)$ с образующей $u \le n+1$ соответствует множество ему изоморфных, состоящее из

а) трех графов с образующими $u_1 = u - (-1)^u$, $u_2 = 2n + 2 - u$, $u_3 = 2n + 2 - u + (-1)^u$ для $u < n$;

б) из $3 - u (\bmod 2)$ графов тех же типов, где граф u_3 может не существовать при $u = n$;

в) из $1 + (-1)^u$ графов первых двух типов, которые могут не существовать для $u = n + 1$.

Доказательство. При распознавании изоморфных графов используются инварианты графа, среди которых наиболее важными являются 1) число вершин; 2) число ребер; 3) вектор степеней вершин $S = (s_1, s_2, \ldots s_n)$, выписанный в порядке неубывания $s_1 \le s_2 \le \cdots \le s_n$. Так как число вершин у рассматриваемых графов совпадает по условию, а степени вершин у NA-графов с одной образующей равны 0 или 1, то достаточно проверить совпадение у всех графов числа ребер.

Рассмотрим матрицу $A = (a_{ij})$ образующих n-вершинного полного NA-графа. В ней $a_{ii} = 0$, а $a_{ij} = i + j$, $(0 < i, j \le n)$.

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 3 & 4 & 5 & \ldots & n+1 \\ 3 & 0 & 5 & 6 & \ldots & n+2 \\ 4 & 5 & 0 & 7 & \ldots & n+3 \\ 5 & 6 & 7 & 0 & \ldots & n+4 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ n+1 & n+2 & n+3 & n+4 & n+5 & 0 \end{pmatrix}. \tag{2}$$

Каждой образующей $u = i + j$ соответствует диагональ (линия) ортогональная основной диагонали, все элементы которой равны u. Исключение составляют четные u, линия которых пересекается с главной диагональю с нулевыми элементами. Обозначим $r(u)$ - число ребер, соответствующих образующей u. Раньше [3] было показано, что $r(u) = r(2n + 2 - u)$. Образующая $u' = 2n + 2 - u$ называется двойственной к u. Для $u \le n+1$ справедливо

$$r(u) = \left\lfloor \frac{u-1}{2} \right\rfloor = k\,. \tag{3}$$

Если решить это уравнение относительно u, то получим

$$u \in \{2k+1, 2k+2\}\,. \tag{4}$$

Нетрудно убедиться, что элементы в скобках выражаются один через другой по формуле

$$u_i = u_j - (-1)^{u_j}, \quad j = 1,2\,. \tag{5}$$

Таким образом, если NA-граф с одной образующей u имеет k ребер, то столько же ребер имеет и NA-граф с образующей $u-(-1)^u$. Если еще взять NA-графы с соответствующими двойственными образующими, то получим еще 2 графа с тем же количеством ребер. Все четыре графа имеют k ребер и $n-2k$ изолированных вершин. Очевидно, что все они изоморфны, что и требовалось доказать.

Пусть $u = n$. Если $n \equiv 0 (\bmod 2)$, то число ребер графа равно $\frac{n}{2}-1$. Такое же число ребер дают и образующие $u_1 = n-1$, $u_2 = 2n+2-n = n+2$ и $u_3 = 3n+2-(n-1) = n+3$. В результате получим четыре изоморфных графа. Если $n \equiv 1 (\bmod 2)$, то число ребер графа равно $\frac{n-1}{2}$. Такое же число ребер дает и образующая $u_1 = n+1$. Но последняя образующая двойственна сама себе, поэтому добавляется только один изоморфный граф с образующей $u_3 = 2u+2-n = n+2$, что в сумме дает только три изоморфных графа, а всего добавляется к исходному $3-u(\bmod 2)$ графов.

Осталось рассмотреть случай $u = n+1$. Если $n \equiv 0 (\bmod 2)$, то граф содержит $\frac{n}{2}$ ребра и ни одной изолированной вершины. Если уменьшить значение u, то число ребер уменьшится. Если увеличить u, то двойственная образующая уменьшится, то есть опять число ребер уменьшится. Так как $u = n+1$ самодвойственная образующая, то ей будет соответствовать единственный граф. Если $n \equiv 1(\bmod 2)$, то этот случай сводится к $u = n$ и $n \equiv 1(\bmod 2)$, то есть получится всего три изоморфных графа. В общем случае к исходному графу добавляется $1+(-1)^u$ изоморфных графов. Этим и завершается доказательство теоремы.

На рис. 1 приведен пример для NA-графа с $n = 10$ и $u = 8$.

Теорема 1 дает исчерпывающий ответ об изоморфизме NA-графов с одной образующей. Однако можно предположить, что NA-граф с одной образующей может быть изоморфным другому графу с несколькими образующими, если число ребер одного графа равно сумме ребер другого, а степени вершин обеих графов равны 0 или 1. Некоторые прояснения в этот вопрос вносит следующая

Лемма 1. NA-граф с одной образующей не может быть изоморфным NA-графу с числом образующих больше 2.

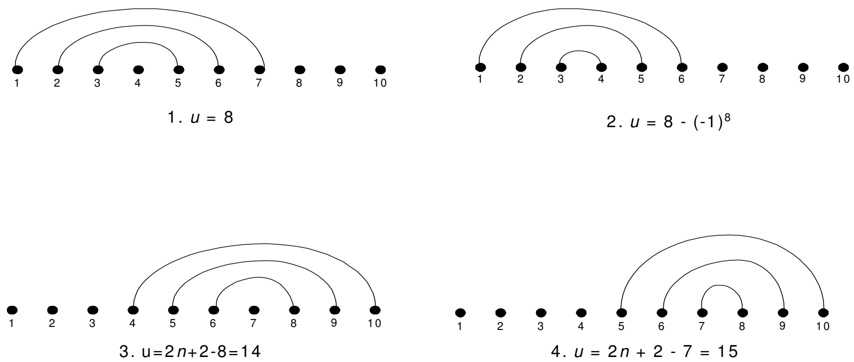

РИС. 1. Изоморфизмы NA-графа с $n = 10$, $u = 8$

Действительно, в этом случае во втором графе найдутся две образующие v_1 и v_2**,** которые либо обе меньше $n+2$, либо обе больше n. В первом случае существуют ребра $(1, v_1 - 1)$ и $(1, v_2 - 1)$, а во втором случае – ребра $(n, v_1 - n)$ и $(n, v_2 - n)$. Это означает, что во втором графе либо вершина 1, либо вершина n имеют степень, превышающую 1. А это противоречит тому, что первый граф таких вершин не имеет.

NA-графы с двумя образующими при определенных условиях могут иметь вершины степень которых не превышает 1. Как следствие леммы 1 можно считать, что для них $v_1 \le n+1$, а $v_2 \ge n+1$.

Лемма 2. Необходимым и достаточным условиями того, что NA-граф с двумя образующими $V = \{v_1, v_2\}$ имеет степени вершин не больше 1, является

а) $v_1 \le n-1$; б) $v_2 \ge n+3$; в) $v_2 - v_1 > n-1$. (6)

Первое условие вытекает из того, что если v_2 соответствует только одному ребру, то это ребро $(n-1, n)$. Тогда максимальное значение v_1 соответствует ребру $(1, n-2)$, то есть $v_1 \le 1 + (n-2) = n-1$. Аналогично, если v_1 может представлять только одно ребро, а именно $(1,2)$, то минимальное v_2 соответствует ребру $(3, n)$, откуда $v_2 \ge n+3$. Максимальный номер для v_1 соответствует ребру $(1, v_1 - 1)$, а минимальный номер вершины для v_2 соответствует ребру $(v_2 - n, n)$. Чтобы ребра не были инцидентными, необходимо $v_2 - n > v_1 - 1$ или $v_2 - v_1 > n-1$, что и требовалось доказать.

Пусть k – количество ребер в NA-графе с одной образующей u, то есть $k = \lfloor (u-1)/2 \rfloor$. На основание двух лемм можно доказать более сильный результат.

Теорема 2. В классе NA-графов $G=(X,V)$ с двумя образующими $V=\{v_1,v_2\}$ каждому NA-графу $G=(X,u)$ с одной образующей $5\le u\le n+1$ соответствует множество ему изоморфных, состоящее из

а) $4(k-1)$ графов с образующими

$V^{(1)}=\{2i+1,2n-2k+2i+1\}$, $V^{(2)}=\{2i+1,2n-2k+2i\}$,

$V^{(3)}=\{2i+2,2n-2k+2i+1\}$, $V^{(4)}=\{2i+2,2n-2k+2i\}$,

$(i=1,2,\ldots,k-1)$ для $u<n$;

б) $[4-u(\mathrm{mod}\,2)](k-1)$ графов тех же типов, где граф с $V^{(4)}$ может не существовать, для $u=n$;

в) $\lfloor 2+(-1)^u\rfloor(k-1)$ графов первых трех типов, где последние два типа могут не существовать , для $u=n+1$.

Доказательство. Пусть в NA-графе с одной образующей $u<n$, и по условию число ребер в нем $k\ge 2$. Это число можно разбить на $k-1$ сумму из двух чисел: $(1,k-1),(2,k-2),(3,k-3),\ldots,(k-1,1)$. Возьмем какую либо пару из этого разбиения $(i,k-i)$ и поставим в соответствие каждой составляющей две образующие v_1 и v_2', которые в точности соответствуют i ребрам и $k-i$ ребрам соответственно. Как было показано раньше, это может быть при условии $v_1\in\{2i+1,2i+2\}$ и $v_2'\in\{2(k-i)+1,2(k-i)+2\}$. При таких значениях $v_1,v_2'\le n+1$ и по лемме 2 граф с такими образующими не может быть изоморфным NA-графу с одной образующей. Для этого необходимо заменить v_2' на двойственную образующую $v_2=2n+2-v_2'$, или $v_2\in\{2n-2k+2i,$ $2n-2k+2i+1\}$. В этом случае полученный граф будет иметь степени вершин не более единицы, а число ребер будет равно k. Комбинируя значения v_1 и v_2, получим для фиксированного значения i четыре различных изоморфных графа, а всего таких графов будет ровно $4(k-1)$.

Пусть $k=n$. В этом случае значения двух образующих могут не удовлетворять условиям (6). Легко проверяются условия а) и б), которые удовлетворяются. Рассмотрим последовательно все типы множеств образующих $V^{(j)}$ $(j=1,2,3,4)$ и проверим для них условие в). При этом воспользуемся значениями $k=\left\lfloor\dfrac{n-1}{2}\right\rfloor$ и $2k=n-2+n(\mathrm{mod}\,2)$. Получаем неравенства

$$j=1:\quad n+2-n(\mathrm{mod}\,2)>n-1;\qquad j=2:\quad n+1-n(\mathrm{mod}\,2)>n-1;$$

$$j=3:\quad n+1-n(\mathrm{mod}\,2)>n-1;\qquad j=4:\quad n-n(\mathrm{mod}\,2)>n-1. \tag{7}$$

Как видно, первые три неравенства удовлетворяются всегда, а четвертое удовлетворяется лишь при $n\equiv 0(\mathrm{mod}\,2)$. Это означает, что из четырех типов изоморфных графов, приведенных в пункте а) один тип графа с множеством образующих $V^{(4)}$ при нечетном n не существует. Общее количество изоморфных графов при фиксированном i в этом случае можно выразить как $4-u(\mathrm{mod}\,2)$, что и требовалось доказать.

Пусть $u=n+1$. Очевидно, что в этом случае трудностей с построением графов будет больше. Проверим условие (6,в) для каждого типа образующих $V^{(j)}$ $(j=1,2,3,4)$. При этом подставим значения $k=\left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor$ и $2k=n-n(\mathrm{mod}\,2)$.

Получаем неравенства типа (7):

$$j=1:\quad n+n(\mathrm{mod}\,2)>n-1;\qquad j=2:\quad n+n(\mathrm{mod}\,2)-1>n-1;$$

$$j=3:\quad n+n(\mathrm{mod}\,2)-1>n-1;\quad j=4:\quad n+n(\mathrm{mod}\,2)-2>n-1. \tag{8}$$

Здесь четвертое неравенство не выполняется ни при каких n. Второе и третье неравенства выполняются лишь для $n\equiv 1(\mathrm{mod}\,2)$, а первое неравенство выполняется всегда. Это означает, что при четном n существует единственный изоморфный граф с множеством образующих $V^{(1)}$. При нечетном n таких графов уже 3, имеющих множества образующих $V^{(1)}, V^{(2)}$ и $V^{(3)}$ соответственно. В общем случае количество таких графов при фиксированном i равно $2-(-1)^n$, что и завершает доказательство теоремы.

Рассмотрим пример на рис.2 для $n=9$, $u=8$.

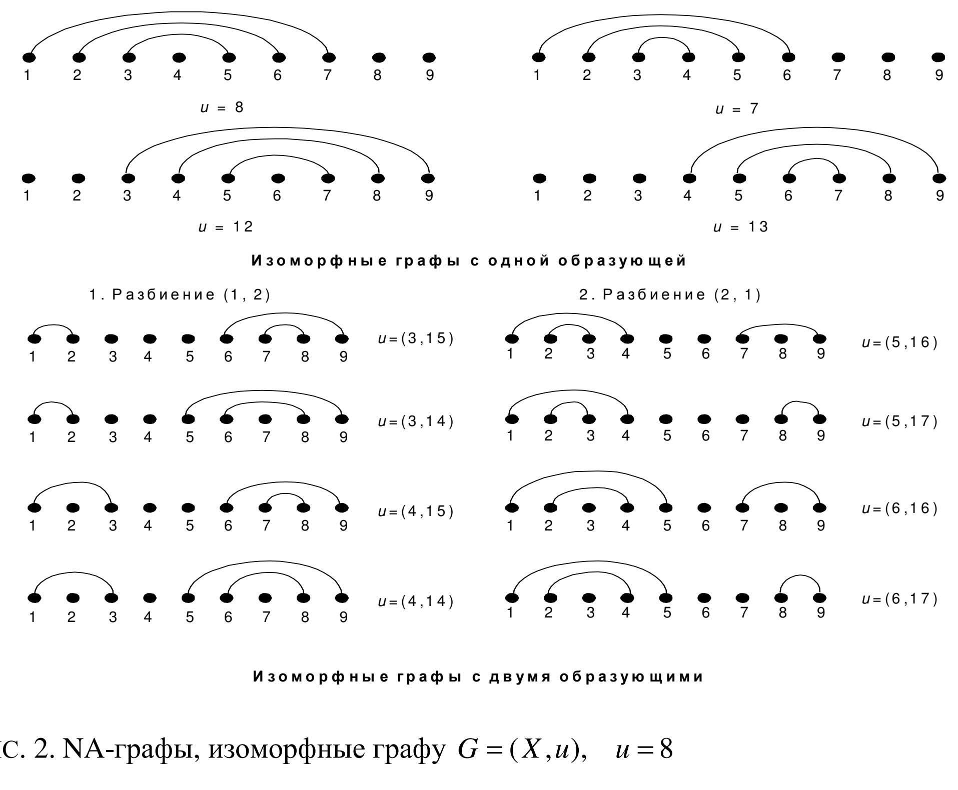

РИС. 2. NA-графы, изоморфные графу $G=(X,u)$, $u=8$

Объединив теоремы 1 и 2, можно получить следующий вывод.

Следствие. Каждому NA-графу с одной образующей $u \le n+1$ соответствует множество изоморфных NA-графов, состоящее

а) из $4k$ графов для $u < n$;

б) из $[4 - u(\mathrm{mod}\ 2)]k$ графов для $u = n$;

в) из $[2-(-1)^n]k$ графов для $u = n+1$, где $k = \left\lfloor \frac{u-1}{2} \right\rfloor$.

Очевидно, что алгоритм проверки изоморфизма для NA-графов с одной образующей является полиномиальным. В последующих работах будет показано что это можно распространить на все NA-графы.

Г.П. Донець,   Г.О. Шулінок

ПРО ІЗОМОРФІЗМ НАТУРАЛЬНИХ АРИФМЕТИЧНИХ ГРАФІВ

Розглядається задача ІЗОМОРФІЗМ ГРАФІВ для одного підкласу числових графів – натуральних арифметичних графів (NA-графів). Для графів з однією твірною знайдено алгоритм конструктивного переліку всіх ізоморфних графів. Доведено ряд тверджень, які обґрунтовують цей алгоритм.

G.P.Donets,   G.A.Shulinok

ABOUT ISOMORPHISM OF NATURAL ARITHMETIC GRAPHS

For natural arithmetic graphs (NA-graphs) with single generatrix the features to find complete set of isomorphic graphs was shown. A number of assertions to allow constructive enumeration of the set were proved.

1. *Донец Г.А.* О графах, задаваемых аналитическим способом // Теория оптимальных решений. – Киев: Ин-т кибернетики им. В.М.Глушкова АН УССР, 1987. – С. 20–27.
2. *Шулинок И.Э.* Об одном классе числовых графов // Теория и приложения методов оптимизации. – Киев: Ин-т кибернетики им. В.М.Глушкова НАН Украины, 1998. – С. 24–29.
3. *Донець Г.О., Нєженцев Ю.І.* Арифметичні графи та їх представлення // Доп. АН УССР . Сер. А. – 1990. – № 11. – С. 5–8.
4. *Донец Г.А. Неженцев Ю. И.* Об оценке сложности алгоритмов в арифметических графах // Методы решения задач нелинейного и дискретного программирования. – Киев: Ин-т кибернетики им. В.М. Глушкова АН УССР, 1991. – С. 79–88.
5. *Донец Г.А. Шулинок И.Э.* Об оценке сложности алгоритмов для натуральных модульных графов // Теория оптимальных решений. – Киев: Ин-т кибернетики им. В.М.Глушкова НАН Украины, 2001. – С. 61–68.
6. *Шулинок И.Э.* О связности натуральных модульных графов // Кибернетика и системный анализ. – 1998. – С. 24–29.
7. *Гэри М., Джонсон Д.* Вычислительные машины и труднорешаемые задачи. – М.: Мир, 1982. – 416 с.

Получено 27.08.2003