

М. В. Шовгенюк, М. Р. Крик

## Аналітичний розв'язок рівнянь автотипного синтезу зображення в колірному просторі ICaS

(Представлено членом-кореспондентом НАН України І. В. Стасюком)

*Записано загальне автотипне рівняння синтезу  $N$ -фарбового кольорового зображення в новому колірному просторі ICaS і сформульований основний принцип синтезу довільного кольору зображення двома кольоровими та чорною фарбами, які задовольняють умову мінімуму накладання фарб. Одержано аналітичні розв'язки частинних випадків автотипних рівнянь.*

Сучасні технології друкування кольорових зображень на папері використовують автотипний принцип синтезу зображення базовими кольоровими фарбами СМУК. Вперше М. Д. Нюберг [1] дав теоретичне формулювання принципу просторового змішування кольорів різних фарб, згідно з яким вектор синтезованого кольору дорівнює векторній сумі всіх кольорів фарб та їх взаємних накладань пропорційно їх площі. Незалежно Нейгебауер [2] записав більш детальну систему нелінійних автотипних рівнянь відносно колірних координат  $X$ ,  $Y$ ,  $Z$  всіх кольорів, які синтезуються на відбитку.

Рівняння Нюрнберга–Нейгебауера є основою теоретичного опису автотипного синтезу кольорів в  $N$ -фарбовому друці, проте, їх аналітичні розв'язки до цього часу не отримані. В загальному вигляді автотипні рівняння зводяться до системи трьох рівнянь степені  $N$ , які задаються колірними координатами  $2^N$  базових кольорів фарб на всіх комбінацій їх накладань. Тому задача розв'язання такої системи рівнянь за означенням неоднозначна. Автотипні рівняння мають багато розв'язків, з чим пов'язані труднощі визначення оптимального співвідношення кількостей фарб, необхідних для синтезу заданого кольору на репродукції. Відомо роботи [3–5], в яких для опису реального процесу  $N$ -фарбового друку досліджуються спектральні моделі рівнянь Нейгебауера із врахування показника нелінійності  $n$ . Такі моделі складніші і не мають теоретичного розв'язку. Тому для прикладних задач використовуються профілі СМУК, побудовані виключно на табличних даних понад 1,5 тис. кольорів різних комбінацій накладання кольорових та чорної фарб.

У роботі авторів [6] показано, що в колірному просторі ICaS загальне векторне рівняння (6) для фарб СМУК зводиться до трьох частинних систем автотипних рівнянь, кожна з яких має фізично реальні аналітичні розв'язки. В даній роботі така теорія автотипного синтезу зображення в колірному просторі ICaS і на основі принципу мінімуму фарб обґрунтовується можливість знаходження однозначних аналітичних розв'язків автотипних рівнянь для загального випадку  $N$ -фарбового друку.

Теоретична модель автотипного синтезу зображення описуються векторним рівнянням

$$\mathbf{F}_{AU} = \mathbf{F}^{(0)} + \mathbf{F}^{(1)} + \mathbf{F}^{(2)} + \mathbf{F}^{(3)} + \dots + \mathbf{F}^{(N)}. \quad (1)$$

Колірні вектори

$$\mathbf{F}^{(0)} = \mathbf{F}_W \prod_{n=1}^N (1 - S_n) = \sigma_{\min} \mathbf{F}_W, \quad \mathbf{F}^{(N)} = \mathbf{F}_{1,2,\dots,N} \prod_{n=1}^N S_n = \sigma_{\max} \mathbf{F}_{1,2,\dots,N} \quad (2)$$

характеризують мінімальну площу  $\sigma_{\min}$  пропорційно вектору  $\mathbf{F}_W$  кольору паперу і, відповідно, максимальну площу  $\sigma_{\max}$  пропорційно вектору  $\mathbf{F}_{1,2,3,\dots,N}$  накладання  $N$  фарб.

На основі співвідношень Демішеля ділянки автотипного зображення, надруковані “чистими” фарбами, описуються сумарним вектором

$$\mathbf{F}^{(1)} = \sigma_{\min} \sum_{n=1}^N \frac{S_n}{(1 - S_n)} \mathbf{F}_n. \quad (3)$$

Особливістю автотипного синтезу є те, що на зображенні завжди формуються ділянки попарного та потрійного накладання фарб, які характеризуються сумарними векторами

$$\mathbf{F}^{(2)} = \sigma_{\min} \sum_{n=1}^N \sum_{m=n+1}^N \frac{S_n S_m}{(1 - S_n)(1 - S_m)} \mathbf{F}_{n,m}, \quad (4)$$

$$\mathbf{F}^{(3)} = \sigma_{\min} \sum_{n=1}^N \sum_{m=n+1}^N \sum_{k=m+1}^N \frac{S_n S_m S_k}{(1 - S_n)(1 - S_m)(1 - S_k)} \mathbf{F}_{n,m,k}. \quad (5)$$

Вектори (3)–(5) мають біноміальне число  $B_N^j = \binom{N}{j}$  доданків, які характеризують внесок всіх  $N$  фарб та їх попарних і потрійних накладань. Кожен такий доданок вже буде задаватися базовими векторами  $\mathbf{F}_n$ ,  $\mathbf{F}_{n,m}$  і  $\mathbf{F}_{n,m,k}$  пропорційно добуткам площ накладання фарб. Аналогічно розраховуються вектори  $\mathbf{F}^{(4)}$ ,  $\mathbf{F}^{(5)}$  накладання чотирьох, п’яти фарб і т. д.

Підставляючи формули (2)–(5) в рівняння (1), отримуємо загальне автотипне рівняння у вигляді біноміальної суми із  $2^N$  доданків для довільного колірному простору  $RGB$ , в якому визначені колірні координати базових векторів  $\mathbf{F}_n$ ,  $\mathbf{F}_{n,m}$ ,  $\mathbf{F}_{n,m,k}$ ,  $\dots$ ,  $\mathbf{F}_{n,m,k,\dots,N}$  всіх комбінацій накладання фарб.

Враховуючи субтрактивну модель  $CMY$  накладання фарб, де базові кольори тріадних фарб вибираються як доповнюючі кольори до адитивної колірної системи  $RGB$ , за степені біноміального ряду виберемо скалярні коефіцієнти  $S_i^0 = 1 - S_i$ . Тоді векторне автотипне рівняння (1) набуває вигляду біноміального ряду за степенями коефіцієнтів  $S_i^0$

$$\begin{aligned} \mathbf{F}_{AU} = & \mathbf{F}^{(0)} + \sum_{n=1}^N S_n^0 \mathbf{F}_n^{(1)} + \sum_{n=1}^N \sum_{m=n+1}^N S_n^0 S_m^0 \mathbf{F}_{n,m}^{(2)} + \\ & + \sum_{n=1}^N \sum_{m=n+1}^N \sum_{k=m+1}^N S_n^0 S_m^0 S_k^0 \mathbf{F}_{n,m,k}^{(3)} + \dots + S_1^0 S_2^0 S_3^0 \dots S_N^0 \mathbf{F}_{1,2,3,\dots,N}^{(N)}. \end{aligned} \quad (6)$$

Тут вектори  $\mathbf{F}^{(0)}$ ,  $\mathbf{F}_n^{(1)}$ ,  $\mathbf{F}_{n,m}^{(2)}$ ,  $\dots$ ,  $\mathbf{F}_{1,2,3,\dots,N}^{(N)}$  біноміального розкладу записуються сумами базових векторів  $\mathbf{F}_n$  кольорових фарб та векторів  $\mathbf{F}_{n,m}$ ,  $\mathbf{F}_{n,m,k}$ ,  $\dots$ ,  $\mathbf{F}_{n,m,k,\dots,N}$  всіх комбінацій взаємного накладання різних фарб. Для розв’язання рівняння (6) необхідно мати числові значення  $2^N$  базових векторів. В цьому полягає принципова складність розв’язання автотипного рівняння, оскільки один і той же колір  $\mathbf{F}_{AU}^{(4)}$  практично можна синтезувати різними комбінаціями кольорових і чорної фарб.

Покажемо, що для загального випадку  $N > 4$  кольорових фарб векторне автотипне рівняння (6) також зводиться до  $N$  частинних систем автотипних рівнянь, які мають однозначні аналітичні розв’язки.

Для теоретичного опису властивостей формування  $N$ -фарбового кольорового зображення на основі загального векторного автотипного рівняння (9) перейдемо до колірному простору  $ICaS$  на основі ортогонального перетворення Хартлі [7]

$$\mathbf{F}_{ICaS}^{(N)} = \hat{\mathbf{H}}\mathbf{F}_{AU}^{(N)}, \quad (7)$$

при якому унітарний оператор  $\hat{\mathbf{H}}$  прямого і оберненого перетворення колірному простору автотипного зображення описується симетричною матрицею Хартлі  $3 \times 3$

$$\mathbf{H} = \frac{1}{\sqrt{3}} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & \text{cas} \frac{2\pi}{3} & \text{cas} \frac{4\pi}{3} \\ 1 & \text{cas} \frac{4\pi}{3} & \text{cas} \frac{2\pi}{3} \end{bmatrix}, \quad \text{cas}(\pi x) = \cos(\pi x) + \sin(\pi x). \quad (8)$$

Нами встановлено, що ортогональне перетворення (12)–(13) — єдине симетричне перетворення кольорового зображення, при якому зберігаються всі колірні та метричні характеристики колірному простору  $RGB$ . Всі відомі моделі переходу від простору  $RGB$  до опонентних колірних просторів  $YC_1C_2$  при виконанні умови ортогональності  $(\mathbf{C}_1, \mathbf{C}_2) = 0$  хроматичних векторів зводяться до загального вигляду матриці Хартлі (8).

Принциповою перевагою колірному простору  $ICaS$  є те, що кожен колір  $\mathbf{F}(I, C, S)$  зображення описується трьома новими колірними координатами — ахроматичною координатою  $I$ , яка характеризує нейтрально-сірі відтінки зображення від “білого” до “чорного” кольорів, та двома хроматичними координатами  $C$  і  $S$ , які дають повну інформацію про колірні характеристики зображення, синтезованого різними кольоровими фарбами.

Колірний простір  $ICaS$  характеризується цінними властивостями, використання яких дозволяє отримати аналітичні розв’язки рівнянь автотипного синтезу зображення.

*Властивість 1.* Існує нелінійне перетворення колірних координат  $R_{AU} = R^{1/\gamma}$ ,  $G_{AU} = G^{1/\gamma}$ ,  $B_{AU} = B^{1/\gamma}$ , де показник  $\gamma$  є характеристикою нелінійності друкарського процесу [8], при якому в результаті переходу до колірному простору  $ICaS$  однофарбові зображення кольорових фарб з достатньою точністю описуються лінійними рівняннями

$$\mathbf{F}_{ICaS}^{(1)} = \hat{\mathbf{H}}\mathbf{F}_i + S_i^0 \hat{\mathbf{H}}(\mathbf{F}_W - \mathbf{F}_i) \quad (i = 1, 2, \dots, N). \quad (9)$$

Це дає підстави стверджувати, що лише для конкретного значення показника нелінійності  $\gamma$  в колірному просторі  $ICaS$  буде виконуватися загальне автотипне рівняння 6) синтезу кольорового зображення при  $N$ -фарбовому друці.

*Властивість 2.* В просторі  $ICaS$  всі кольори зображення, синтезовані чорною фарбою, будуть знаходитися строго по ахроматичній координаті  $I$ . Теоретично можна вважати, що в автотипному рівнянні (6) всі базові вектори  $\mathbf{F}_{K,n}$ ,  $\mathbf{F}_{K,n,m}$ ,  $\dots$ ,  $\mathbf{F}_{K,n,m,\dots,N}$  комбінацій взаємного накладання чорної фарби з всіма кольоровими фарбами теж будуть тотожні “нульовому” вектору  $\mathbf{F}_K$  чорної фарби. Тоді кількість доданків біноміального ряду зменшується вдвічі і векторне автотипне рівняння 6) спрощується до вигляду

$$\mathbf{F}_{ICaS}^{(N)} = S_K^0 \mathbf{F}_{CaS}^{(N-1)}, \quad (10)$$

де колірні координати  $(I_{AU}, C_{AU}, S_{AU})$  будуть пропорційні скалярному множнику  $S_K^0$ , який характеризує кількість чорної фарби на  $N$ -фарбовому автотипному зображенні. Таким чином, досягається розділення чорної фарби від кольорових і на  $CaS$ -діаграмі вектор  $\mathbf{F}_{CaS}^{(N-1)}$  характеризуватиме виключно кольорові фарби.

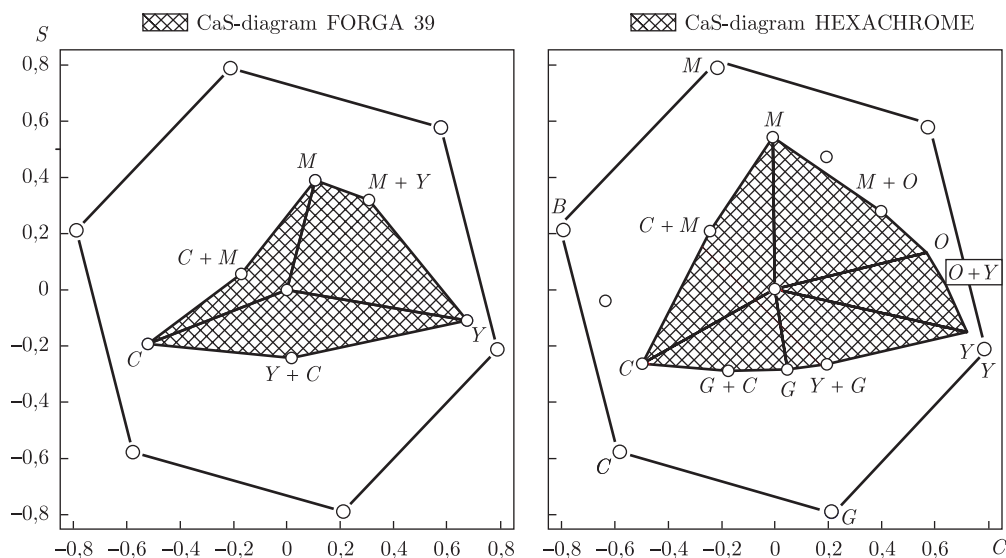


Рис. 1. CaS-діаграми фарб: *СМУК* (ліворуч); *СМОУГК* Pantone Нехасхроме (праворуч)

Використання колірному простору  $ICaS$  дозволяє сформулювати *основний принцип синтезу кольорового зображення*. Довільний колір  $\mathbf{F}_{AU}(I_{AU}, C_{AU}, S_{AU})$  зображення, який входить в область колірному охоплення  $N$  кольорових фарб, однозначно і точно відтворюються двома кольоровими і чорною (К) фарбами, сумарне накладання яких задовольняє умові мінімуму

$$TAC = S_i + S_j + S_K = \min \quad (11)$$

кількостей фарб відносно всіх можливих варіантів відтворення цього кольору іншими комбінаціями  $N$  кольорових фарб.

Умову мінімуму (11) завжди задовольняють дві сусідні кольорові фарби. На площині хроматичних координат  $(C, S)$ , яку називаємо *CaS-діаграмою* (рис. 1). Тоді всі кольорові зображення, які на *CaS-діаграмі* знаходяться в секторі  $i$ -ї і сусідньої  $j$ -ї фарб, саме цими кольоровими і третьою чорною фарбами будуть синтезовані на папері і виконуватиметься умова (11).

Тоді загальне автотипне рівняння (6) із врахуванням (10) зводиться до простого частинного випадку

$$\mathbf{F}_{CaS}^{(2)} = S_K^0 \{ \hat{\mathbf{H}} \mathbf{F}_{ij} + S_i^0 \hat{\mathbf{H}} (\mathbf{F}_j - \mathbf{F}_{ij}) + S_j^0 \hat{\mathbf{H}} (\mathbf{F}_i - \mathbf{F}_{ij}) + S_i^0 S_j^0 \hat{\mathbf{H}} (\mathbf{F}_W - \mathbf{F}_i - \mathbf{F}_j + \mathbf{F}_{ij}) \}, \quad (12)$$

який матиме фізично реальний розв'язок. В результаті отримуємо  $N - 1$  рівнянь (12), для розв'язання яких достатньо  $2(N - 1)$  базових векторів  $\mathbf{F}_i$  всіх кольорових фарб і попарних накладань  $\mathbf{F}_{ij}$  сусідніх фарб.

Знайдемо розв'язок цього рівняння відносно змінних  $S_i^0, S_j^0, S_K^0$ . Ахроматична координата  $I_{AU}$  дає аналітичний вираз для чорної фарби

$$S_K^0 = \frac{I_{AU}}{I_{ij} + (I_j - I_{ij})S_i^0 + (I_i - I_{ij})S_j^0 + (I_W + I_{ij} - I_i - I_j)S_i^0 S_j^0}. \quad (13)$$

Тоді для хроматичних координат  $(C_{AU}, S_{AU})$  одержуємо систему нелінійних однорідних рівнянь для двох кольорових фарб

$$\begin{cases} \alpha_{00} + \alpha_{10}S_i^0 + \alpha_{01}S_j^0 + \alpha_{11}S_i^0S_j^0 = 0, \\ \beta_{00} + \beta_{10}S_i^0 + \beta_{01}S_j^0 + \beta_{11}S_i^0S_j^0 = 0. \end{cases} \quad (14)$$

У цій системі рівнянь постійні коефіцієнти

$$\begin{aligned} \alpha_{00} &= \begin{vmatrix} I_{AU} & I_{ij} \\ C_{AU} & C_{ij} \end{vmatrix}; & \beta_{00} &= \begin{vmatrix} I_{AU} & I_{ij} \\ S_{AU} & S_{ij} \end{vmatrix}; \\ \alpha_{10} &= \begin{vmatrix} I_{AU} & I_j - I_{ij} \\ C_{AU} & C_j - C_{ij} \end{vmatrix}; & \beta_{10} &= \begin{vmatrix} I_{AU} & I_j - I_{ij} \\ S_{AU} & S_j - S_{ij} \end{vmatrix}; \\ \alpha_{01} &= \begin{vmatrix} I_{AU} & I_i - I_{ij} \\ C_{AU} & C_i - C_{ij} \end{vmatrix}; & \beta_{01} &= \begin{vmatrix} I_{AU} & I_i - I_{ij} \\ S_{AU} & S_i - S_{ij} \end{vmatrix}; \\ \alpha_{11} &= \begin{vmatrix} I_{AU} & I_W - I_i - I_j + I_{ij} \\ C_{AU} & C_W - C_i - C_j + C_{ij} \end{vmatrix}; & \beta_{11} &= \begin{vmatrix} I_{AU} & I_W - I_i - I_j + I_{ij} \\ S_{AU} & S_W - S_i - S_j + S_{ij} \end{vmatrix} \end{aligned} \quad (15)$$

задаються визначниками матриць  $2 \times 2$ . Перший стовпець матриць 16) складений із  $I, C, S$ -координат вектора синтезованого кольору  $\mathbf{F}_{AUj}$ , тоді як другий стовпець — із аналогічних координат векторів рівняння (12) для вибраної пари сусідніх кольорових фарб.

Із першого рівняння системи (14) отримуємо вираз для  $j$ -ї фарби

$$S_j^0 = -\frac{\alpha_{00} + \alpha_{10}S_i^0}{\alpha_{01} + \alpha_{11}S_i^0}. \quad (16)$$

Тоді в результаті підстановки виразу (16) в друге рівняння системи (14) знаходимо квадратне рівняння, розв'язок якого

$$S_i^0 = -\frac{1}{2a}(b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}) \quad (17)$$

дає одне фізично реальне значення кількості  $i$ -ї фарби. Тут постійні коефіцієнти  $a, b, c$  записуються у вигляді визначників матриць  $3 \times 3$ :

$$a = \begin{vmatrix} I_{AU} & I_j & I_i - I_W \\ C_{AU} & C_j & C_i - C_W \\ S_{AU} & S_j & S_i - S_W \end{vmatrix}; \quad c = \begin{vmatrix} I_{AU} & I_i & I_{ij} \\ C_{AU} & C_i & C_{ij} \\ S_{AU} & S_i & S_{ij} \end{vmatrix}; \quad (18)$$

$$b = \begin{vmatrix} I_{AU} & I_{ij} & I_i + I_j - I_W \\ C_{AU} & C_{ij} & C_i + C_j - I_W \\ S_{AU} & S_{ij} & S_i + S_j - S_W \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} I_{AU} & I_i - I_{ij} & I_j - I_{ij} \\ C_{AU} & C_i - C_{ij} & C_j - C_{ij} \\ S_{AU} & S_i - S_{ij} & S_j - S_{ij} \end{vmatrix}. \quad (19)$$

Аналіз розв'язків автотипних рівнянь показує, що кольори, які синтезуються сусідніми кольоровими фарбами, в колірному просторі  $IC\phi S$  утворюють гіперболічні поверхні, що підтвержують експериментальні дані.

На основі отриманих аналітичних розв'язків автотипних рівнянь розроблена спеціалізована комп'ютерна програма ICaS-ColorPrint-2 та створена нова інформаційна технологія кольороподілу зображення для  $N$ -фарбового друку.

*Робота виконана за науково-технічним проектом НАН України № 16-2012.*

1. Нюберг Н. Д. Метод расчета цветоделения в автотипной трехцветке // Тр. НИИ ОГИЗ. – 1935. – Вып. II. – С. 173–183.
2. Neugebauer H. E. J. Die theoretischen Grundlagen des Mehrfarbendrucks // Z. fur wiss. Photographie, Photophysik und Photochemie. – 1937. – **36**. – P. 36–73.
3. Rogers G. L. Neugebauer revisited: random dots in halftone screening // J. Color. Res. Appl. – 1998. – **23**. – P. 104–113.
4. Rogers G. A. Generalized Clapper–Yule model of halftone reflectance // Ibid. – 2000. – **25**, No 6. – P. 402–407.
5. Amidror I., Hersch R. D. Neugebauer and Demichel: Dependence and independence in  $n$ -screen superpositions for colour printing // Ibid. – 2000. – **25**, No 4. – P. 267–277.
6. Шовгенюк М. В., Крик И. Р. Аналітичний розв'язок систем автотипних рівнянь // Наук. зап. УАД. – 2010. – № 2(18). – С. 37–48.
7. Брейсуэл Р. Преобразование Хартли. Теория и приложения. – Москва: Мир, 1990. – 175 с.
8. Шовгенюк М. В., Занько Н. В., Писанчин Н. С. Характеристики відбитків тріадних фарб у кольоровому просторі Adobe RGB // Комп'ютерні технології друкарства. – 2008. – № 19. – С. 203–222.

*Институт фізики конденсованих систем  
НАН України, Львів*

*Надійшло до редакції 24.05.2012*

**М. В. Шовгенюк, М. Р Крик**

### **Аналитическое решение уравнений автотипного синтеза изображения в цветовом пространстве ICaS**

*Записано общее автотипное уравнение синтеза  $N$ -красочного цветного изображения в новом цветовом пространстве ICaS и сформулирован основной принцип синтеза произвольного цвета изображения двумя цветными и черной красками, которые удовлетворяют условию минимума наложения красок. Получено аналитическое решение частных случаев автотипных уравнений.*

**M. V. Shovgenyuk, M. R Kryk**

### **Analytical solution of the equations of autotypical synthesis of images in color space ICaS**

*The general autotypical synthesis equation for an  $N$ -color-printing image in a new color space ICaS is presented, and the basic principle of the synthesis of arbitrary color images with two color inks and black inks that meets the condition of minimum compositing of color inks is formulated. The analytical solutions of partial cases of the autotypical equations are given.*