

Т. Т. Лебедева, Н. В. Семенова, Т. И. Сергиенко

Исследование устойчивости векторных задач дискретной оптимизации с различными принципами оптимальности

(Представлено академиком НАН Украины И. В. Сергиенко)

Изучена проблема устойчивости относительно возмущений всех исходных данных векторной задачи дискретной оптимизации с различными принципами оптимальности на основе полученных результатов исследования ядра устойчивости, решения вопросов о его непустоте и совпадении со всем оптимальным множеством, равенстве множества неоптимальных допустимых решений задачи и множества тех допустимых решений, которые устойчиво не принадлежат оптимальному множеству.

Важное место в исследованиях, осуществляемых в последние десятилетия специалистами в области дискретной оптимизации, в частности, научными сотрудниками Института кибернетики им. В. М. Глушкова НАН Украины, занимает проблема устойчивости многокритериальных (векторных) задач [1–4]. Неослабевающее внимание к этой проблеме в значительной степени объясняется необходимостью при решении многих прикладных задач, которые могут быть формализованы с помощью дискретных оптимизационных моделей, учитывать факторы неопределенности и случайности, связанные с неточностью исходной информации, несоответствием математических моделей реальным процессам, ошибками округления, погрешностями вычислений и др. Современные исследования вопросов устойчивости векторных задач дискретной оптимизации осуществляются, в основном, в двух направлениях. Первый из них ориентирован на получение результатов “качественного” характера, а именно на определение и исследование условий, при которых множеству оптимальных решений (множеству Парето, Слейтера или Смейла) присуще то или иное свойство, характеризующее некоторым образом устойчивость задачи к малым возмущениям исходных данных. Второй подход направлен на получение и изучение количественных характеристик допустимых возмущений в исходных данных, в частности, радиуса устойчивости [5, 6].

Работы, проведенные специалистами Института кибернетики, главным образом принадлежат к первому из указанных направлений. В русле этих работ рассмотрены разные типы устойчивости задач целочисленной оптимизации. Исследована проблема регуляризации неустойчивых задач. Выяснена взаимосвязь устойчивости задачи векторной целочисленной оптимизации на конечном множестве допустимых решений с устойчивостью ее оптимальных и неоптимальных решений. Определены понятия, которые могут составить общую основу для описания разных типов устойчивости, для формулировки необходимых и достаточных условий устойчивости. Полученные результаты касаются устойчивости как относительно возмущений всех исходных данных задачи, так и относительно возмущений исходных данных, необходимых для представления ее векторного критерия или ограниче-

ний, что является важным, поскольку задача, устойчивая к возмущениям некоторой части своих исходных данных, может быть неустойчивой относительно возмущений другой их части.

Опишем некоторые полученные результаты.

Рассмотрим векторную задачу дискретной оптимизации

$$Z(M(F, X)): \max\{F(x) \mid x \in X\},$$

состоящую в поиске элементов некоторого множества оптимальных решений $M(F, X) \in \mathfrak{M}$, где $\mathfrak{M} = \{Sl(F, X), P(F, X), Sm(F, X)\}$; $P(F, X)$ — множество Парето-оптимальных (эффективных) решений задачи; $Sl(F, X)$ — множество оптимальных по Слейтеру (слабо эффективных) решений; $Sm(F, X)$ — множество оптимальных по Смейлу (строго эффективных) решений; $F = (f_1, f_2, \dots, f_l)$ — векторный критерий; $f_i: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^1$, $i \in N_l$, — частные критерии, $N_l = \{1, \dots, l\}$; $l \geq 2$; $X \subset \mathbb{Z}^n$; \mathbb{Z}^n — множество всех целочисленных векторов в \mathbb{R}^n ; $2 \leq |X| < \infty$. Согласно [1, 7, 8], справедливы соотношения:

$$M(F, X) = \{x \in X \mid \omega(x, M(F, X)) = \emptyset\}, \quad \text{где } M(F, X) \in \mathfrak{M},$$

$$\omega(x, P(F, X)) = \{z \in X \mid F(z) \geq F(x), F(z) \neq F(x)\},$$

$$\omega(x, Sl(F, X)) = \{z \in X \mid F(z) > F(x)\},$$

$$\omega(x, Sm(F, X)) = \{z \in X \mid z \neq x, F(z) \geq F(x)\}.$$

Пусть $u = (u_1, u_2)$ — набор исходных данных задачи $Z(M(F, X))$, являющийся элементом некоторого пространства U всех исходных данных задачи. Это пространство можно представить как декартово произведение $U = U_1 \times U_2$ пространства U_1 исходных данных, необходимых для описания векторного критерия F , и пространства U_2 тех исходных данных, которые описывают допустимое множество X . Например, если частные критерии задачи представлены квадратичными функциями $f_i(x) = \langle x, D_i x \rangle + \langle c_i, x \rangle$, $i \in N_l$, то положим $u_1 = (D, C) \in U_1 = \mathbb{R}^{n \times n \times l} \times \mathbb{R}^{l \times n}$, где $D = (D_1, \dots, D_l) \in \mathbb{R}^{n \times n \times l}$, $D_i \in \mathbb{R}^{n \times n}$, $C = [c_{ij}] \in \mathbb{R}^{l \times n}$, $c_i = (c_{i1}, \dots, c_{in}) \in \mathbb{R}^n$. Если же допустимая область X задачи — непустое конечное множество вида $X_G = G(Q, p, h) \cap \mathbb{Z}^n$, где $G(Q, p, h) = \{x \in \mathbb{R}^n \mid g_i(x) \leq 0, i \in N_m\}$ — выпуклое множество, $g_i(x) = \langle x, Q_i x \rangle + \langle p_i, x \rangle + h_i$, $p_i = (p_{i1}, \dots, p_{in}) \in \mathbb{R}^n$, $h_i \in \mathbb{R}$, $Q_i \in \mathbb{R}^{n \times n}$ — симметричная неотрицательно определенная матрица, $i \in N_m$, $Q = (Q_1, \dots, Q_m) \in \mathbb{R}^{n \times n \times m}$, $p = [p_{ij}] \in \mathbb{R}^{m \times n}$, $h = (h_1, \dots, h_m) \in \mathbb{R}^m$, то положим $u_2 = (Q, p, h) \in U_2 = \mathbb{R}^{m \times m \times n} \times \mathbb{R}^{m \times n} \times \mathbb{R}^m$.

Исследовано пять типов устойчивости задачи $Z(M(F, X))$, где $M(F, X) \in \mathfrak{M}$, относительно возмущений ее исходных данных. При этом рассмотрено три возможных варианта учета таких возмущений, а именно:

1) берутся во внимание только возмущения в исходных данных для векторного критерия; 2) учитываются возмущения только в исходных данных, необходимых для описания ограничений задачи; 3) рассматриваются возмущения во всех исходных данных, которые привлекаются к описанию задачи. Термины “устойчивость”, “устойчивая задача”, “устойчиво принадлежит” используем далее при любом из указанных трех вариантов учета возмущений в исходных данных. Тем не менее при необходимости отдельно рассмотреть первый вариант пользуемся термином “устойчивость по векторному критерию”, а для второго варианта — термином “устойчивость по ограничениям”.

Для набора $u = (u_1, u_2) \in U$ исходных данных задачи $Z(M(F, X))$ и любого числа $\delta > 0$ определим множество $O_\delta(u)$ возмущенных исходных данных согласно одной из следующих формул:

$$O_\delta(u) = \{u(\delta) = (u_1(\delta), u_2(\delta)) \mid u_1(\delta) \in O_\delta(u_1), u_2(\delta) = u_2\},$$

если учитываются возмущения данных только в векторном критерии;

$$O_\delta(u) = \{u(\delta) = (u_1(\delta), u_2(\delta)) \mid u_1(\delta) = u_1, u_2(\delta) \in O_\delta(u_2)\},$$

когда рассматриваются возмущения исходных данных только в ограничениях;

$$O_\delta(u) = \{u(\delta) = (u_1(\delta), u_2(\delta)) \mid u_1(\delta) \in O_\delta(u_1), u_2(\delta) \in O_\delta(u_2)\},$$

если речь идет о возмущении всех исходных данных задачи. Здесь $O_\delta(u_i) = \{u_i(\delta) \in U_i \mid \|u_i(\delta) - u_i\|_i < \delta\}$, $\|\cdot\|_i$ — норма в пространстве U_i , $i = 1, 2$.

Символами $F_{u_1(\delta)}$ и $X_{u_2(\delta)}$ обозначены соответственно векторный критерий и допустимая область задачи при возмущенных начальных данных $u(\delta) = (u_1(\delta), u_2(\delta)) \in O_\delta(u)$.

Задача $Z(M(F, X))$, где $M(F, X) \in \mathfrak{M}$, является T_1 -устойчивой, если $\exists \delta > 0$ такое, что $\forall (u_1(\delta), u_2(\delta)) \in O_\delta(u): M(F, X) \cap M(F_{u_1(\delta)}, X_{u_2(\delta)}) \neq \emptyset$.

Задача $Z(M(F, X))$, где $M(F, X) \in \mathfrak{M}$, является T_2 -устойчивой, если $\exists \delta > 0$ и $\exists x \in M(F, X)$ такие, что $\forall (u_1(\delta), u_2(\delta)) \in O_\delta(u): x \in M(F_{u_1(\delta)}, X_{u_2(\delta)})$.

Задача $Z(M(F, X))$, где $M(F, X) \in \mathfrak{M}$, является T_3 -устойчивой, если $\exists \delta > 0$ такое, что $\forall (u_1(\delta), u_2(\delta)) \in O_\delta(u): M(F_{u_1(\delta)}, X_{u_2(\delta)}) \subseteq M(F, X)$.

Задача $Z(M(F, X))$, где $M(F, X) \in \mathfrak{M}$, является T_4 -устойчивой, если $\exists \delta > 0$ такое, что $\forall (u_1(\delta), u_2(\delta)) \in O_\delta(u): M(F, X) \subseteq M(F_{u_1(\delta)}, X_{u_2(\delta)})$.

Задача $Z(M(F, X))$, где $M(F, X) \in \mathfrak{M}$, является T_5 -устойчивой, если $\exists \delta > 0$ такое, что $\forall (u_1(\delta), u_2(\delta)) \in O_\delta(u): M(F, X) = M(F_{u_1(\delta)}, X_{u_2(\delta)})$.

Очевидно, что из устойчивости определенного типа относительно возмущений всех исходных данных задачи следует ее устойчивость этого же типа относительно возмущений исходных данных для векторного критерия и возмущений исходных данных, необходимых для описания ограничений. В общем случае обратное утверждение является ошибочным.

Относительно устойчивости типа T_1 отметим, в частности, что задача $Z(M(F, X))$, где $M(F, X) \in \mathfrak{M}$, со всеми линейными и квадратичными частными критериями всегда T_1 -устойчива по векторному критерию [2]. Для задачи $Z(M(F, X))$, в которой $X = X_G$, понятие T_1 - и T_2 -устойчивости по ограничениям эквивалентны. Понятие T_1 -устойчивости к возмущениям всех начальных данных задачи $Z(P(F, X))$ с квадратичными частными критериями и допустимым множеством $X = X_G$ эквивалентно понятию T_2 -устойчивости по ограничениям.

Установлены необходимые и достаточные условия T_2 -, T_3 -, T_4 - и T_5 -устойчивости задачи $Z(M(F, X))$, где $M(F, X) \in \mathfrak{M}$ [2–4]. Показано, что понятия устойчивости этих типов можно свести к двум более очевидным определенным ниже понятиям, которые касаются устойчивости допустимых решений и помогают раскрыть природу действия возмущений в исходных данных на множества допустимых, оптимальных и неоптимальных решений задачи.

Обозначим $\overline{\mathfrak{M}} = \mathfrak{M} \cup \{X, X \setminus P(F, X), X \setminus Sl(F, X), X \setminus Sm(F, X)\}$ — совокупность подмножеств множества X . Пусть M — любой элемент из $\overline{\mathfrak{M}}$. Выберем произвольно число $\delta > 0$ и набор возмущенных исходных данных $u(\delta) = (u_1(\delta), u_2(\delta)) \in O_\delta(u)$. Обозначим

$\mathcal{M}_{u(\delta)}$ подмножество возмущенного допустимого множества $X_{u_2(\delta)}$, соответствующее множеству \mathcal{M} как подмножеству допустимого множества X . Например, если $\mathcal{M} = X \setminus P(F, X)$, то $\mathcal{M}_{u(\delta)} = X_{u_2(\delta)} \setminus P(F_{u_1(\delta)}, X_{u_2(\delta)})$.

Полагаем, что точка $x \in \mathcal{M} \in \overline{\mathfrak{M}}$ **устойчиво принадлежит множеству \mathcal{M}** , если $\exists \delta > 0$ такое, что $\forall u(\delta) \in O_\delta(u)$: $x \in \mathcal{M}_{u(\delta)}$, и **неустойчиво принадлежит множеству \mathcal{M}** в ином случае. Множество $\text{Ker}(\mathcal{M})$ всех точек, которые устойчиво принадлежат множеству $\mathcal{M} \in \overline{\mathfrak{M}}$, составляет **ядро устойчивости множества \mathcal{M}** :

$$\text{Ker}(\mathcal{M}) = \{x \in \mathcal{M} \mid \exists \delta > 0 \forall u(\delta) \in O_\delta(u) (x \in \mathcal{M}_{u(\delta)})\}.$$

Очевидно, из включения $\mathcal{M}' \subset \mathcal{M}$, где $\mathcal{M}, \mathcal{M}' \in \overline{\mathfrak{M}}$, следует включение $\text{Ker}(\mathcal{M}') \subset \text{Ker}(\mathcal{M})$.

Полагаем, что точка $x \in X$ **устойчиво не принадлежит множеству $\mathcal{M} \in \overline{\mathfrak{M}} \setminus \{X\}$** , если $\exists \delta > 0$ такое, что $\forall u(\delta) \in O_\delta(u)$: $x \notin \mathcal{M}_{u(\delta)}$. Обозначим $\Omega(\mathcal{M})$ множество всех точек $x \in X$, устойчиво не принадлежащих множеству \mathcal{M} :

$$\Omega(\mathcal{M}) = \{x \in X \mid \exists \delta > 0 \forall u(\delta) \in O_\delta(u) (x \notin \mathcal{M}_{u(\delta)})\}.$$

Очевидно, $\forall \mathcal{M} \in \overline{\mathfrak{M}} \setminus \{X\}$: $\text{Ker}(X \setminus \mathcal{M}) \subseteq \Omega(\mathcal{M}) \subseteq X \setminus \mathcal{M}$.

В случае, когда рассматриваются вопросы устойчивости по векторному критерию задачи $Z(M(F, X))$, где $M(F, X) \in \mathfrak{M}$, каждое ее решение $x \in X$, которое устойчиво не принадлежит множеству $M(F, X)$, будет устойчиво принадлежать его дополнению $X \setminus M(F, X)$ и $\text{Ker}(X \setminus M(F, X)) = \Omega(M(F, X))$.

Очевидна справедливость следующих утверждений, которые связывают понятия T_2 - и T_4 -устойчивости задачи $Z(M(F, X))$ с понятием ее допустимого решения, которое устойчиво принадлежит множеству $M(F, X)$.

Теорема 1. *Задача $Z(M(F, X))$, где $M(F, X) \in \mathfrak{M}$, T_2 -устойчива тогда и только тогда, когда среди ее допустимых решений существует хотя бы одно, которое устойчиво принадлежит множеству $M(F, X)$, т. е. $\text{Ker}(M(F, X)) \neq \emptyset$.*

Теорема 2. *Задача $Z(M(F, X))$, где $M(F, X) \in \mathfrak{M}$, T_4 -устойчива тогда и только тогда, когда все ее оптимальные решения устойчиво принадлежат множеству $M(F, X)$, т. е.*

$$\text{Ker}(M(F, X)) = M(F, X). \tag{1}$$

Следующей теоремой понятие T_3 -устойчивости задачи $Z(M(F, X))$ связывается с понятием допустимого решения, которое устойчиво не принадлежит множеству $M(F, X)$.

Теорема 3. *Пусть $M(F, X) \in \mathfrak{M}$, $M(F, X) \neq X$. Необходимым условием T_3 -устойчивости задачи $Z(M(F, X))$ является такое:*

$$X \setminus M(F, X) = \Omega(M(F, X)). \tag{2}$$

Если $X = X_G$, то (2) является и достаточным условием T_3 -устойчивости задачи $Z(M(F, X))$.

Очевидно, что при условии $M(F, X) = X$ задача $Z(M(F, X))$ является T_3 -устойчивой по векторному критерию. Если, кроме того, $X = X_G$, то такая задача T_3 -устойчива относительно любого из трех рассмотренных здесь вариантов учета возмущений в исходных данных.

Из приведенных выше определений различных типов устойчивости следует, что задача $Z(M(F, X))$ T_5 -устойчива тогда и только тогда, когда она одновременно T_3 -устойчива

и T_4 -устойчива. Сформулируем необходимые и достаточные условия T_5 -устойчивости задачи $Z(M(F, X))$, которые указывают на взаимосвязь этого типа устойчивости с устойчивостью решений, принадлежащих множествам $M(F, X)$ и $X \setminus M(F, X)$.

Теорема 4. Пусть $M(F, X) \in \mathfrak{M}$, $M(F, X) \neq X$ и $X = X_G$. Задача $Z(M(F, X))$ T_5 -устойчива тогда и только тогда, когда выполняются условия (1) и (2).

Если $M(F, X) = X$, то задача $Z(M(F, X))$ T_5 -устойчива по векторному критерию тогда и только тогда, когда выполняется условие (1). Если, кроме того, $X = X_G$, то это условие является также необходимым и достаточным для T_5 -устойчивости относительно возмущений всех исходных данных задачи.

Таким образом, изучение вопросов устойчивости относительно возмущений исходных данных задачи $Z(M(F, X))$, где $M(F, X) \in \mathfrak{M}$, может основываться на результатах исследования ядра устойчивости $\text{Ker}(M(F, X))$, решения вопросов о его непустоте и совпадении со всем оптимальным множеством $M(F, X)$, о равенстве множества неоптимальных допустимых решений $X \setminus M(F, X)$ и множества $\Omega(M(F, X))$ тех допустимых решений задачи, которые устойчиво не принадлежат оптимальному множеству $M(F, X)$.

Приведем формулы, которые описывают множества $\text{Ker}(M(F, X))$ и $\Omega(M(F, X))$ в некоторых частных случаях.

При исследовании устойчивости задачи $Z(M(F, X))$, где $M(F, X) \in \mathfrak{M}$, к возмущениям векторного критерия $F = (f_1, \dots, f_l)$, где $f_i: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^1$, $i \in N_l$, — квадратичные функции, получены следующие соотношения:

$$\text{Ker}(\text{Sl}(F, X)) = \text{Ker}(\text{P}(F, X)) = \text{Ker}(\text{Sm}(F, X)) = \text{Sm}(F, X),$$

$$\Omega(\text{Sl}(F, X)) = \Omega(\text{P}(F, X)) = \Omega(\text{Sm}(F, X)) = X \setminus \text{Sl}(F, X).$$

Для задачи $Z(M(F, X))$, где $M(F, X) \in \mathfrak{M}$, в которой учитываются возмущения исходных данных лишь в ограничениях, описывающих допустимое множество $X = X_G$, справедливы такие соотношения:

$$\text{Ker}(\text{Sl}(F, X)) = \text{Sl}(F, X) \cap \text{int } G(Q, p, h),$$

$$\text{Ker}(\text{P}(F, X)) = \text{P}(F, X) \cap \text{int } G(Q, p, h),$$

$$\text{Ker}(\text{Sm}(F, X)) = \text{Sm}(F, X) \cap \text{int } G(Q, p, h).$$

Если, кроме того, все частичные критерии, составляющие векторный критерий $F = (f_1, f_2, \dots, f_l)$ этой задачи, являются вогнутыми непрерывно дифференцируемыми функциями, то имеют место и такие формулы:

$$\Omega(\text{Sl}(F, X)) = \{x \in X \setminus \text{Sl}(F, X) \mid \omega(x, \text{Sl}(F, X)) \cap \text{int } G(Q, p, h) \neq \emptyset\},$$

$$\Omega(\text{P}(F, X)) = \{x \in X \setminus \text{P}(F, X) \mid \omega(x, \text{P}(F, X)) \cap \text{int } G(Q, p, h) \neq \emptyset\},$$

$$\Omega(\text{Sm}(F, X)) = \{x \in X \setminus \text{Sm}(F, X) \mid \omega(x, \text{Sm}(F, X)) \cap \text{int } G(Q, p, h) \neq \emptyset\}.$$

При изучении устойчивости задачи $Z(M(F, X))$, где $M(F, X) \in \mathfrak{M}$, с учетом возмущений, которым подвергаются все ее исходные данные, необходимые для описания и частных критериев f_1, f_2, \dots, f_l , заданных в виде вогнутых квадратичных функций, и допустимого множества $X = X_G$, получены соотношения:

$$\text{Ker}(\text{Sl}(F, X)) = \text{Ker}(\text{P}(F, X)) = \text{Ker}(\text{Sm}(F, X)) = \text{Sm}(F, X) \cap \text{int } G(Q, p, h),$$

$$\Omega(P(F, X)) = \{x \in X \setminus Sl(F, X) \mid \omega(x, Sl(F, X)) \cap \text{int } G(Q, p, h) \neq \emptyset\}.$$

Работа выполнена при финансовой поддержке Государственного фонда фундаментальных исследований Украины (договор № Ф41/196-2012).

1. Сергиенко И. В., Козерацкая Л. Н., Лебедева Т. Т. Исследование устойчивости и параметрический анализ дискретных оптимизационных задач. – Киев: Наук. думка, 1995. – 170 с.
2. Лебедева Т. Т., Семенова Н. В., Сергиенко Т. И. Устойчивость векторных задач целочисленной оптимизации: взаимосвязь с устойчивостью множеств оптимальных и неоптимальных решений // Кибернетика и сист. анализ. – 2005. – № 4. – С. 90–100.
3. Лебедева Т. Т., Сергиенко Т. И. Разные типы устойчивости векторной задачи целочисленной оптимизации: общий подход // Там же. – 2008. – № 3. – С. 142–148.
4. Лебедева Т. Т., Сергиенко Т. И. Условия устойчивости по векторному критерию и ограничениям многокритериальных задач целочисленной оптимизации // Доп. НАН України. – 2011. – № 4. – С. 37–40.
5. Emetichev V., Podkoraev D. Quantitative stability analysis for vector problems of 0–1 programming // Discrete Optimization. – 2010. – 7, No 1–2. – P. 48–63.
6. Емеличев В. А., Кузьмин К. Г. О радиусе устойчивости векторной задачи целочисленного линейного программирования в случае регулярности нормы в критериальном пространстве // Кибернетика и систем. анализ. – 2010. – № 1. – С. 82–89.
7. Подиновский В. В., Ногин В. Д. Парето-оптимальные решения многокритериальных задач. – Москва: Наука, 1982. – 256 с.
8. Smale S. Global analysis and economics, V. Pareto theory with constraints // J. Math. Econ. – 1974. – No 1. – P. 213–221.

*Институт кибернетики им. В. М. Глушкова
НАН Украины, Киев*

Поступило в редакцию 20.04.2012

Т. Т. Лебедева, Н. В. Семенова, Т. И. Сергиенко

Дослідження стійкості векторних задач дискретної оптимізації з різними принципами оптимальності

Вивчено проблему стійкості щодо збурень всіх вхідних даних векторної задачі дискретної оптимізації на основі отриманих результатів дослідження ядра стійкості, вирішення питань про його непорожнечу, рівність його з усією оптимальною множиною та рівність множини неоптимальних допустимих розв'язків задачі з множиною тих допустимих розв'язків задачі, що стійко не належать оптимальній множині.

T. T. Lebedeva, N. V. Semenova, T. I. Sergienko

Research of the stability of vector problems of discrete optimization with different principles of optimality

The problem of stability to perturbations of all input data of the discrete optimization vector problem is studied. The results are got by studying the stability kernel, its unemptiness and coincidence with the whole optimum set, equality of the set of non-optimal feasible solutions of the problem and the set of feasible solutions which do not belong stably to the optimum set.