

А. В. Тушев

О примитивных представлениях конечно порожденных линейных групп конечного ранга

(Представлено членом-корреспондентом НАН Украины В. П. Моторным)

Основной результат работы утверждает, что в классе конечно порожденных линейных групп конечного ранга только группы с нетривиальным FC-центром могут обладать точными примитивными неприводимыми представлениями над полем нулевой характеристики.

Пусть G — группа и k — поле, kG -модуль M называется импримитивным, если существуют подгруппа $H < G$ и kH -подмодуль $N \leq M$ такие, что модуль M индуцирован с подмодуля N , т. е. $M = N \otimes_{kH} kG$. Если модуль M не является импримитивным, то он называется примитивным. Представление группы G будем называть примитивным, если модуль этого представления обладает соответствующим свойством. Подгруппа H группы G называется изолированной, если для любого $h \in G$ и любого натурального числа n из соотношения $h^n \in H$ следует, что $h \in H$. Модуль M будем называть непроницаемым, если для любого элемента $0 \neq x \in M$ модуль xkG не индуцирован с подмодуля xkH , где $H \neq G$ — изолированная подгруппа группы G .

В [1] Харпер показал, что любая конечно порожденная нильпотентная группа, которая не является почти абелевой, обладает примитивным неприводимым представлением над любым не локально конечным полем. Тем самым был положительно решен вопрос А. Е. Залесского, поставленный им в [2]. Таким образом, бесконечные полициклические группы могут обладать примитивными представлениями. Хорошо известно, что любая полициклическая группа является конечно порожденной линейной группой конечного ранга над полем \mathbb{Q} .

Обозначим через $\Delta(G)$ множество элементов группы G , которые имеют конечные орбиты при действии группы G сопряжениями. Легко проверить, что $\Delta(G)$ является характеристической подгруппой группы G , которую называют FC-центром группы G .

Основным результатом данной работы является следующая теорема.

Теорема. Пусть G — конечно порожденная линейная группа конечного ранга с тривиальным FC-центром. Пусть k — поле нулевой характеристики и пусть M — неприводимый kG -модуль, такой что $C_G(M) = 1$. Тогда существуют собственная подгруппа $S \leq G$ и kS -подмодуль $U \leq M$ такие, что $M = U \otimes_{kS} kG$.

Следствие. Пусть G — конечно порожденная линейная группа конечного ранга. Если группа G обладает точным неприводимым примитивным представлением над полем нулевой характеристики k , то FC-центр группы G не тривиален.

Группа G имеет конечный свободный ранг, если она обладает конечным субнормальным рядом, каждый фактор которого либо локально конечный, либо бесконечный циклический. Количество $r_0(G)$ бесконечных циклических факторов в таком ряде называется свободным рангом группы G .

Пусть k — поле, G — группа и A — нормальная подгруппа группы G . Пусть M, V и W — kA -модули. Подмодули V и W будем называть сепарированными в M , если они не имеют изоморфных факторов, которые были бы изоморфны ненулевому подмодулю из M .

Подгруппу $\text{Sep}_{(G,A)}(M, W)$ группы G , порожденную элементами g такими, что модули W и Wg не сепарированы в M , будем называть сепаратором модуля W в G . Очевидно, для любого элемента $h \in G$ такого, что $h \notin \text{Sep}_{(G,A)}(M, W)$, модули W и Wh сепарированы в M (см. [3]).

При доказательстве теоремы ключевую роль играет следующее утверждение.

Предложение. Пусть N — нильпотентная минимаксная нормальная подгруппа без кручения разрешимой группы G конечного ранга с тривиальным FC -центром. Пусть k — поле нулевой характеристики и пусть M — непроницаемый kN -модуль такой, что для любой собственной изолированной G -инвариантной подгруппы K из N модуль M без kK -кручения. Если $r_0(G) = r_0(\text{Sep}_{(G,N)}(M, xkN))$ для любого элемента $0 \neq x \in M$, то подгруппа N — абелева.

1. Harper D. L. Primitive irreducible representations of nilpotent groups // Math. Proc. Cambridge Phil. Soc. — 1977. — **82**. — P. 241–247.
2. Залесский А. Е. Неприводимые представления конечно порожденных нильпотентных групп без кручения // Мат. заметки. — 1971. — **9**, № 2. — С. 199–210.
3. Тушев А. В. О примитивных представлениях разрешимых групп конечного ранга // Мат. сб. — 2000. — **191**, № 11. — С. 117–160.

Днепропетровский национальный университет

Поступило в редакцию 17.04.2012

А. В. Тушев

Про примітивні зображення скінченно породжених лінійних груп скінченного рангу

Основний результат роботи стверджує, що у класах скінченно породжених лінійних груп скінченного рангу лише групи з нетривіальним FC -центром можуть мати точні примітивні незвідні зображення над полем нульової характеристики.

A. V. Tushev

On the primitive representations of finitely generated linear groups of finite rank

It is shown that, in the class of finitely generated linear groups of finite rank, only the groups with nontrivial FC -center can have faithful irreducible primitive representations over a field of zero characteristic.