

Для вибору більш адекватного рішення за умов невизначеності розглядаються способи оцінки результатів обчислення останньої. Наведені також приклади задач, які більш наочно ілюструють способи оцінки результатів різних підходів.

© О.В. Лапко, 2013

УДК 519.1

О.В. ЛАПКО

ПРО ОЦІНЮВАННЯ ОБЧИСЛЕНИХ НЕВИЗНАЧЕНОСТЕЙ

Вступ. Невизначеності, які розглядаються в роботі зустрічаються, як правило, у випадках недостатнього знання про предметну область та недостатньої інформації про конкретну ситуацію [1].

Наші знання про предметну область можуть бути нечіткими або неповними: в ній можуть використовуватися недостатньо чітко сформульовані концепції та поняття або недостатньо вивчені явища. Наприклад, у діагностиці психічних захворювань існує кілька відмінних теорій про походження і симптоматику шизофренії.

Невизначеність знань призводить у багатьох випадках до некоректних висновків. Маючи неповні знання, ми не можемо впевнено передбачити результат їх застосування. Наприклад, терапія, яка використовує нові препарати, досить часто дає абсолютно несподівані результати. І, нарешті, навіть коли ми маємо досить повне уявлення про предметну область, експерт може визначити, що ефективніше (з різних міркувань) використовувати не точні, а евристичні методи для розв'язання тієї чи іншої задачі. Так, методика усунення несправності в електронному блоці шляхом заміни підозрілих вузлів виявляється значно ефективнішою, ніж скуппульозний аналіз ланцюгів у пошуку деталі, що вийшла з ладу.

Крім неточних знань, невизначеність може бути внесена і неточними або ненадійними даними про конкретну ситуацію. Будь-який

сенсор має обмежену роздільну здатність і аж ніяк не стовідсоткову надійність. При складанні звітів можуть бути допущені помилки або в них можуть потрапити недостовірні відомості. На практиці далеко не завжди можна отримати повні відповіді на поставлені питання, і хоча можна скористатися різного роду додатковою інформацією, але цей шлях може бути як високовартісним, так і ризикованим. Крім усього іншого, існує ще і фактор часу. Не завжди є можливість швидко отримати необхідні дані, коли ситуація вимагає прийняття термінового рішення. Якщо робота ядерного реактора викликає підозру, навряд чи хтось буде чекати закінчення всього комплексу перевірок, перш ніж прийняти рішення про його зупинку.

Підсумовуючи викладене, відзначимо, що експерти використовують неточні методи з двох головних причин:

- точних методів не існує;
- точні методи існують, але не можуть бути застосовані на практиці через відсутність необхідного обсягу даних і неможливості їх накопичення з міркувань вартості, ризику або через відсутність часу на збір необхідної інформації.

Ймовірність та можливість. Більшість дослідників, що займаються проблемами штучного інтелекту, давно прийшли до єдиної думки, що неточні методи відіграють важливу роль у розробці експертних систем, але багато суперечок викликає питання, які саме методи мають використовуватися. Всі ці міркування привели до появи нового формального апарата для роботи з невизначеностями, який отримав назву теорія можливості. Цей апарат широко використовується при вирішенні задач штучного інтелекту і, особливо, при побудові експертних систем.

Змістовне тлумачення теоретико-можливісних методів істотно відрізняється від теоретико-ймовірнісних [2]. Можливість події, на відміну від імовірності, яка оцінює частоту його появи в регулярному стохастичному експерименті, орієнтована на відносну оцінку істинності даної події. Тобто змістовно можуть бути витлумачені лише відношення «більше», «менше» або «дорівнює». Разом з тим можливість не має подієво-частотної інтерпретації (на відміну від імовірності), яка пов'язує її з експериментом. Проте теорія можливостей дозволяє математично моделювати реальність на основі достовірних фактів, знань, гіпотез, міркувань дослідників.

Як відомо з [3, 4] розподіл можливостей визначається за допомогою апарата нечіткої множини. Саме функція належності нечіткої множини описує можливісний розподіл. В цьому й основні переваги та проблеми теорії можливості.

Переваги можливісного підходу. Основною метою обчислення невизначеності є прийняття вірного рішення, що наближає до поставлених цілей. При обчисленні невизначеності отримуємо ймовірнісні або можливісні розподіли, за оцінками яких приймається рішення. Тому чим достовірнішими будуть результати обчислення, тим легше буде примати рішення.

Як уже зазначалось, імовірнісні методи дозволяють обчислювати невизначеність лише з подієво-частотної сторони. Можливісні ж методи, в яких розподіл можливостей задається нечіткою множиною є більш гнучкими, оскільки

способи побудови можливісного розподілу можна обирати виходячи з поставлених цілей.

Розглянемо приклад. Нехай маємо 5 пацієнтів, у яких діагностується грип, що проявляється такими симптомами як «температура», «головний біль», «нежить». Пацієнтів будемо лікувати експериментальними ліками. Потрібно визначити чи є ці ліки ефективними при лікуванні грипу.

Після прийому ліків ми отримуємо результати приведені в табл. 1.

ТАБЛИЦЯ 1

Симптом\Пацієнт	1	2	3	4	5
Температура	1	1	1	1	0
Головний біль	1	0	1	0	1
Нежить	0	1	1	0	0

Примітка: якщо у таблиці навпроти симптом\пацієнт стоїть 1, то це означає, що симптом у пацієнта зник, якщо ж 0 – то залишився.

Виходячи з отриманих результатів підрахуємо ймовірність події «ліки виліковують грип» як частку від ділення суми кількості симптомів, що зникли, на загальну кількість симптомів усіх пацієнтів, тобто на 15. Отже маємо

$$P(\text{«ліки виліковують грип»}) = (2+2+3+1+1)/15 = 9/15 = 0,6.$$

Таким чином, ймовірність того, що ліки діють, дорівнює 0,6. Іншими словами, 60 відсотків симптомів у пацієнтів зникає.

З іншого боку підрахуємо можливість події «ліки виліковують грип». Спочатку побудуємо можливісний розподіл дії ліків на певні симптоми. Визначимо такий розподіл за допомогою нечіткої множини «дія ліків на симптоми», елементами якої є «температура», «головний біль», «нежить», а міра належності кожного елемента це сума кількості пацієнтів, у яких зникли симптоми, поділеною на кількість пацієнтів:

$$\begin{aligned} \text{«дія ліків на симптоми»} &= 0,8/\text{«температура»} + 0,6/\text{«головний біль»} + \\ &+ 0,4/\text{«нежить»}. \end{aligned}$$

Визначимо можливісний розподіл виліковування грипу в залежності від симптомів. Задамо такий розподіл за допомогою нечіткої множини «ефективність виліковування грипу», елементами якої є «температура», «головний біль», «нежить», а міра належності кожного елемента це відносне значення (важливість) симптому.

$$\begin{aligned} \text{«ефективність виліковування грипу»} &= 0,8/\text{«температура»} + \\ &+ 0,4/\text{«головний біль»} + 0,4/\text{«нежить»}. \end{aligned}$$

Підрахуємо тепер розподіл можливостей події «ліки виліковують грип» як об'єднання нечітких множин «дія ліків на симптоми» та «ефективність виліковування грипу». це буде нечітка множина, елементами якої є «температура», «головний біль», «нежить», а міра належності визначатиметься як мінімум двох мір належності. Тобто

$$\begin{aligned} \text{«ліки виліковують грип»} &= \min(0,8; 0,8)/\text{«температура»} + \\ &+ \min(0,4; 0,6)/\text{«головний біль»} + \min(0,8; 0,4)/\text{«нежить»} = \\ &= 0,8/\text{«температура»} + 0,4/\text{«головний біль»} + 0,4/\text{«нежить»}. \end{aligned}$$

Тоді можливість настання події «ліки виліковують грип» буде дорівнювати максимуму мір можливостей розподілу, тобто 0,8. Іншими словами ми можемо бути впевнені на 80 %, що експериментальні ліки будуть виліковувати від грипу.

Проблеми можливісного підходу. З іншого боку, визначивши нечітку множину, що описує можливісний розподіл найбільш підходящим чином, стикаємось з проблемою визначення функції належності цієї множини. На відміну від імовірності, можливість не має обмеження та може бути визначена не одним способом (розподіл можливостей побудований на основі відносних оцінок істинності, тобто переваг одного елемента події над іншим). Наприклад, у випадку оцінки можливості споживати певну рідину без шкоди для життя, розподіл можливості побудований на основі оргонологічних показників або хімічного аналізу будуть різними.

Тому в теорії можливості важливим є не тільки змістове формулювання нечіткої множини, що визначатиме розподіл можливостей, а й побудова самої нечіткої множини з її функцією належності. Розглянемо основні способи оцінювання результатів обчислення, що допоможуть визначити, який з методів обчислення працює краще в тому чи іншому випадку.

Оцінка результату обчислення невизначеності. В результаті обчислення невизначеності як і в теорії можливості, так і в теорії імовірності ми отримуємо певний результат, а саме розподіл мір від 0 до 1, який ще необхідно інтерпретувати з тим, щоб прийняти вірне рішення, виходячи з поставлених цілей. Тому спосіб оцінки результату обчислення невизначеності є дуже важливим.

Інформаційна ентропія. Для оцінки результатів обчислення невизначеності будемо використовувати поняття інформаційної ентропії [5, 6], що є мірою невизначеності або непередбачуваності інформації.

Основоположник теорії інформації Клод Шеннон визначав інформацію, як зняту невизначеність. Точніше кажучи, отримання інформації – необхідна умова для зняття невизначеності. Невизначеність виникає у ситуації вибору. Завдання, яке вирішується в ході зняття невизначеності – зменшення кількості розглянутих варіантів (зменшення різноманітності), і в підсумку вибір одного відповідного варіанта з числа можливих. Зняття невизначеності дає можливість приймати обґрунтовані рішення і діяти.

Уявіть, що ви зайшли в магазин і попросили продати вам жувальну гумку. Продавщиця, в якій скажімо 16 сортів жувальної гумки, знаходиться в стані невизначеності. Вона не може виконати ваше прохання без отримання додаткової інформації. Якщо ви уточнили, скажімо, – «Orbit», і з 16 початкових варіантів продавщиця розглядає тепер тільки 8, ви зменшили її невизначеність у два рази. Якщо ви, не мудруючи лукаво, просто вказали пальцем на вітрині – «ось цю!», то невизначеність була знята повністю.

Ситуація максимальної невизначеності припускає наявність декількох рівно імовірних (рівно можливих) альтернатив (варіантів), тобто жоден з варіантів не є кращим. Причому, чим більше рівно імовірних (рівно можливих) варіантів спостерігається, тим більше невизначеність, тим складніше зробити однозначний вибір і тим більше інформації потрібно для цього отримати. Наприклад, для N варіантів ця ситуація описується таким розподілом імовірностей: $\{1/N, 1/N, \dots, 1/N\}$.

Мінімальна невизначеність дорівнює 0, тобто ця ситуація повної визначеності, що означає що вибір зроблено, і вся необхідна інформація отримана. Розподіл імовірностей для ситуації повної визначеності виглядає так: $\{1, 0, \dots, 0\}$.

Величина, що характеризує кількість невизначеності в теорії інформації Клода Шеннона позначається символом H і має назву ентропія, точніше інформаційна ентропія. Ентропія (H) – міра невизначеності, виражена в бітах. Так само ентропію можна розглядати як міру рівномірності розподілу невизначеної величини [7].

Клод Шеннон також описав вимоги до функції вимірювання ентропії.

1. Міра має бути неперервною, тобто зміни значень імовірності (можливості) на малу величину має спричинити малу зміну значення ентропії:

$H(p_1, \dots, p_n)$, визначена та неперервна для всіх p_1, \dots, p_n , де $p_i \in [0, 1]$, для всіх $i = 1, \dots, n$.

2. У випадку, коли всі варіанти рівно імовірні (рівно можливі), збільшення кількості варіантів має завжди збільшувати значення ентропії:

для всіх цілих додатних n має виконуватися

$$H\left(\underbrace{\frac{1}{n}, \dots, \frac{1}{n}}_n\right) < H\left(\underbrace{\frac{1}{n+1}, \dots, \frac{1}{n+1}}_{n+1}\right).$$

3. При виборі в два кроки, значення функції у кінцевому результаті, має вигляд суми двох проміжних результатів:

для всіх цілих та додатних b_i , де $b_1 + \dots + b_k = n$, має виконуватися

$$H\left(\underbrace{\frac{1}{n}, \dots, \frac{1}{n}}_n\right) < H\left(\frac{b_1}{n} + \dots + \frac{b_k}{n}\right) + \sum_{i=1}^k \frac{b_i}{n} H\left(\underbrace{\frac{1}{b_i} + \dots + \frac{1}{b_i}}_{b_i}\right).$$

Шеннон показав, що єдина функція, що задовольняє таким умовам має вигляд

$$H(p_1, \dots, p_n) = -K \sum_{i=1}^n p_i \cdot \log_2(p_i),$$

де K – константа (необхідна для вибору одиниці виміру).

Використовуючи міру невизначеності Шеннона ми можемо порахувати міру невизначеності для будь-якого розподілу. Чим менша ця міра, тим менший рівень невизначеності в отриманому результаті й навпаки.

Як приклад, покажемо який з розподілів дає менш невизначений результат. Микола дуже любить їсти пироги з вишнями, але із-за цього він дуже часто переїдає. Необхідно визначити норму вживання пирогів для нього.

Визначатимемо норму наступним чином. Кожного разу коли Микола з'їдає пирог будемо ставити оцінку від 0 до 1, що описує його самопочуття. Чим ближча оцінка до одинці тим краще самопочуття. В результаті отримаємо цілий масив даних відповідності кількості з'їдених пирогів і міри самопочуття. Для цього масиву даних побудуємо імовірнісний та можливісний розподіли події «гарне самопочуття Миколи». Імовірнісний розподіл будуватимемо наступним чином: кількість гарних станів самопочуття (стан кращий за 0,6) при з'їданні певної кількості пирогів будемо ділити на кількість гарних станів самопочуття. Імовірнісний розподіл задамо через середнє значення рівня самопочуття при з'їданні певної кількості пирогів. Отримаємо наступний результат (табл. 2).

ТАБЛИЦЯ 2

Кількість пирогів	1	2	3	4	5
Імовірнісний розподіл	0,15	0,25	0,4	0,15	0,05
Можливісний розподіл	0,3	0,7	0,9	0,6	0,2

Підрахуємо для кожного отриманого розподілу міру невизначеності Шеннона, щоб дізнатися який з розподілів дає найменш невизначений результат:

$$H_{\text{імов.}} = -(0,15 * \log_2 0,15 + 0,25 * \log_2 0,25 + 0,4 * \log_2 0,4 + 0,15 * \log_2 0,15 + 0,05 * \log_2 0,05) = 2,06,$$

$$H_{\text{можл.}} = -(0,3 * \log_2 0,3 + 0,7 * \log_2 0,7 + 0,9 * \log_2 0,9 + 0,6 * \log_2 0,6 + 0,2 * \log_2 0,2) = 1,92.$$

Отже отримуємо, що можливісний розподіл менш невизначений, тобто на основі нього коректніше прийняти рішення щодо визначення норми споживання пирогів з вишнями для Миколи.

Міра чіткості. Крім інформаційної ентропії оцінити результат обчислення невизначеності можна за допомогою міри чіткості, що є показником того наскільки розподіл наближений до чіткої множини або числа. Міра чіткості визнача-

ється, як сума мір часткової чіткості імовірнісної чи можливісної міри елемента розподілу. Міра часткової чіткості має задовольняти наступним умовам:

- якщо імовірність (можливість) елемента дорівнює 0 чи 1, тобто чітко визначається його настання або не настання, тоді часткова міра чіткості дорівнює 0;
- чим ближче значення імовірності (можливості) до 0 чи 1, тим менше значення чіткості;
- найбільше значення часткової міри чіткості досягається при імовірності (можливості) елемента 0,5, коли про його настання не можна нічого сказати;
- часткова міра чіткості неперервна та невід'ємна.

Найпростішим прикладом такої міри чіткості є функція наступного вигляду:

$$C(p_1, \dots, p_n) = \sum_{i=1}^n p_i(1 - p_i).$$

Для наочності розглянемо приклад. Візьмемо розподіли ймовірності та можливості з прикладу поїданням пирогів Миколою, та підрахуємо для них міру чіткості, щоб визначити, який з них є менш невизначеним:

$$\begin{aligned} C_{\text{ймов.}} &= 0,15 * (1 - 0,15) + 0,25 * (1 - 0,25) + 0,4 * (1 - 0,4) + \\ &\quad + 15 * (1 - 0,15) + 0,05 * (1 - 0,05) = 0,73, \\ C_{\text{можл.}} &= 0,3 * (1 - 0,3) + 0,7 * (1 - 0,7) + 0,9 * (1 - 0,9) + \\ &\quad + 0,6 * (1 - 0,6) + 0,2 * (1 - 0,2) = 0,91. \end{aligned}$$

Таким чином отримуємо, що міра чіткості й імовірнісного розподілу менша, отже він є менш невизначеним.

Розглянувши два різні підходи аналізу невизначеності до одного і того ж прикладу, отримали різні результати. Це можливо, оскільки природа способів аналізу різна. Зазначимо, що переваги можливісного розподілу при застосуванні принципу інформаційної ентропії та імовірнісного розподілу при застосуванні міри чіткості є досить незначними. Тому бажано при аналізі застосовувати обидва способи і тільки при однакових результатах, можна визначити менш невизначений розподіл однозначно.

Висновок. Способи оцінки результатів обчислення невизначеності, розглянуті у роботі, є лише першими кроками у вирішенні проблем пов'язаних з визначенням оцінок обчислених невизначеностей, але тим не менш вони дають змогу порівняти, хоча б за якоюсь характеристикою (чи то мірою інформаційної ентропії, чи то міри чіткості), ефективність використання імовірнісних та можливісних підходів при обчисленні невизначеності для прийняття рішень. Оскільки ці підходи незалежні і навіть можуть утворювати певний симбіоз, при

обчисленні невизначеності, то дуже важливо знати, який з підходів доцільно використовувати в тому чи іншому випадку. Передбачається, що наведені способи визначення оцінок можуть бути використані при побудові експертних систем з компонентою вибору того чи іншого методу обчислення невизначеностей у залежності від ефективності досягнення цілей.

А.В. Лапко

ОБ ОЦЕНКЕ ВЫЧИСЛЕНИЯ НЕОПРЕДЕЛЕННОСТЕЙ

Для выбора более эффективного подхода к вычислению неопределенности рассматриваются способы оценки результатов вычисления неопределенности. Приведены также примеры задач, которые более наглядно иллюстрируют способы оценки эффективности подходов.

О.В. Лапко

ABOUT EVALUATION OF CALCULATION UNCERTAINTY

In the article discusses how to assess the results of calculation of uncertainty to select a more efficient approach to the calculation of the uncertainty. Also there are given examples of problems which are more clearly illustrating the methods of evaluation approaches.

1. *Джексон П.* Введение в экспертные системы. – М.: Вильямс, 2001. – 624 с.
2. *Кофман А.* Введение в теорию нечетких множеств. – М.: Радио и связь, 1982. – 432 с.
3. *Zadeh L.A.* Fuzzy sets as a basis for a theory of possibility // Fuzzy Sets and Systems. – 1978. – N 1. – P. 3–28.
4. *Проватар А.И., Лапко А.В.* О некоторых подходах к вычислению неопределенностей // Проблемы програмування. – 2010. – № 2–3. – С. 22–28.
5. *Хэмминг Р.В.* Теория информации и теория кодирования. – М.: Радио и связь, 1985. – 176 с.
6. *Валькенштейн М.В.* Энтропия и информация. – М.: Наука, 1986. – 192 с.
7. *Проватар О.И., Лапко О.В.* Про нові методи опису невизначених величин // Там само. – № 4. – 2012. – С. 35-43.

Одержано 20.06.2013

Про автора:

Лапко Олександр Вікторович,
аспірант факультету кібернетики
Київського національного університету імені Тараса Шевченка.
E-mail: mrolapko@gmail.com