Компьютерная Математика

Предлагается метод построения кубических интерполяционных полиномов Зламала – Женишека на произвольном треугольнике, основанный на использовании базисных полиномов 3-й степени на единичном треугольнике.

УДК 519.6

О.Н. ЛИТВИН, О.О. ЛИТВИН, О.И. ДЕНИСОВА

2D КУБИЧЕСКИЕ ИНТЕРПОЛЯЦИОННЫЕ СПЛАЙНЫ НА НЕРЕГУЛЯРНОЙ СЕТКЕ УЗЛОВ

Введение. В работе авторов [1] предложены явные формулы для построения кубических интерполяционных сплайнов, основанных на использовании кубических интерполяционных полиномов Зламала – Женишека [2 – 17] на треугольнике. Приведем ее основные утверждения.

Пусть $A_k\left(x_k, y_k\right), k=\overline{1,n}$ – про-извольная сетка узлов, $A_k \in D=[0,1]^2$, $k=\overline{1,n}$. Разобьем D на треугольники $T_{pqr} \subset D$ с вершинами A_p, A_q, A_r, $p \neq q \neq \neq r$; $p,q,r \in \{1,2,\ldots,n\}$.

Введем к рассмотрению систему функций двух переменных $h_{pqr}(x,y)$, $h_{r,\beta}^{pqr}(x,y)$, $\beta=(\beta_1,\beta_2), 0 \leq |\beta| \leq 1$, которые считаем определенными только в треугольнике T_{pqr},

$$w_{p,q}(x,y)=\begin{vmatrix} x & y & 1 \\ x_p & y_p & 1 \\ x_q & y_q & 1 \end{vmatrix}=$$

$$=\left(y-y_p\right)\left(x_q-x_p\right)-\left(y_q-y_p\right)\left(x-x_p\right),$$

$$h_{pqr}(x,y)=\frac{w_{p,q}(x,y)}{w_{p,q}\left(X_{pqr},Y_{pqr}\right)}\times$$

$$\times\frac{w_{q,r}(x,y)}{w_{q,r}\left(X_{pqr},Y_{pqr}\right)}\frac{w_{r,p}(x,y)}{w_{r,p}\left(X_{pqr},Y_{pqr}\right)}.$$

$$h_{r,\beta}^{pqr}(x,y)=\frac{(x-x_r)^{\beta_1}(y-y_r)^{\beta_2}}{\beta!}\cdot w_{p,q}^2(x,y)\cdot\left\{\frac{1}{w_{p,q}^2(x,y)}\right\}_{(x_r,y_r)}^{1-|\beta|},$$

где

$$\left\{\frac{1}{u_{p,q}(x,y)}\right\}_{(x_r,y_r)}^{1-|\beta|}=\sum_{0\le|\gamma|\le 1-|\beta|}\left(D^\gamma\frac{1}{u_{p,q}(x,y)}\right)_{(x_r,y_r)}\frac{(x-x_r)^{\gamma_1}(y-y_r)^{\gamma_2}}{\gamma!},\gamma!=\gamma_1!\gamma_2!$$

Лемма 1. Функция $h_{pqr}(x,y)$ – полином 3-й степени со свойствами

$$h_{pqr}(X_{pqr},Y_{pqr})=1,\ X_{pqr}=\frac{x_p+x_q+x_r}{3},\ Y_{pqr}=\frac{y_p+y_q+y_r}{3} \tag{1}$$

$$D^\gamma h_{pqr}(x_i,y_i)=0,\ 0\le|\gamma|\le 1, i\in\{p,q,r\}, \tag{2}$$

$$\gamma=(\gamma_1,\gamma_2),|\gamma|=\gamma_1+\gamma_2, D^\gamma=\frac{\partial^{|\gamma|}}{\partial x^{\gamma_1}\partial y^{\gamma_2}}, D^{0,0}h_{p,q,r}=h_{p,q,r}.$$

Лемма 2. Функции $h_{r,\beta}^{pqr}(x,y)$ – полиномы 3-й степени со свойствами

$$h_{k,\beta}^{pqr}(x_\ell,y_\ell)=\delta_{k,\ell}\delta_{0,|\beta|}; k,\ell\in\{p,q,r\},\ 0\le|\beta|\le 1,\ \beta=(\beta_1,\beta_2),\ |\beta|=\beta_1+\beta_2$$

$$D^\gamma h_{k,\beta}^{pqr}(x_\ell,y_\ell)=\delta_{k,\ell}\delta_{\gamma_1,\beta_1}\delta_{\gamma_2,\beta_2},\ |\gamma|=1,\ \gamma=(\gamma_1,\gamma_2),\ |\gamma|=\gamma_1+\gamma_2.$$

Теорема 1. Оператор

$$O_{pqr}f(x,y)=\sum_{k\in\{p,q,r\}}\sum_{0\le|\beta|\le 1}D^\beta f(x,y)\Big|_{(x_k,y_k)}h_{k,\beta}^{pqr}(x,y)+$$
$$+\big(f(X_{pqr},Y_{pqr})-z_{pqr}\big)h_{pqr}(x,y),$$

$$z_{pqr}=\sum_{k\in\{p,q,r\}}\sum_{0\le|\beta|\le 1}D^\beta f(x,y)\Big|_{(x_k,y_k)}h_{k,\beta}^{pqr}(X_{pqr},Y_{pqr}) \tag{3}$$

ставит в соответствие каждой функции $f(x,y)\in C^1(T_{pqr})$ полином 3-й степени от 2-х переменных со свойствами

$$O_{pqr}f(X_{pqr},Y_{pqr})=f(X_{pqr},Y_{pqr}), \tag{4}$$

$$D^\gamma O_{pqr}f(x,y)\Big|_{(x_i,y_i)}=D^\gamma f(x,y)\Big|_{(x_i,y_i)}, 0\le|\gamma|\le 1, i\in\{p,q,r\}. \tag{5}$$

Теорема 2. Оператор

$$Of(x,y)=O_{pqr}f(x,y),\ (x,y)\in T_{pqr}\subset D \tag{6}$$

имеет свойства

$$Of(X_{ijk},Y_{ijk})=f(X_{ijk},Y_{ijk}),\ T_{ijk}\in D,$$

$$D^\gamma Of(x_i,y_i)=D^\gamma f(x_i,y_i), i\in\{1,2,\ldots,M\}, 0\le|\gamma|\le 1. \tag{7}$$

Следствие.

$$Of(x,y)=f(x,y)\forall f(x,y)=P_3(x,y)=\sum_{0\le i+j\le 3} a_{i,j}x^i y^j. \tag{8}$$

Явные формулы для базисных кубических полиномов для «единичного» треугольника. Для «единичного» треугольника T_{kpq}^u с вершинами $A_k(0,0)$, $A_p(1,0),A_q(0,1)$ приведем явные выражения для всех 10-и базисных функций.

$$e_{k,0,0}^{kpq}(x,y)=(1-x-y)^2(1+2x+2y), e_{p,0,0}^{kpq}(x,y)=x^2(3-2x),$$

$$e_{q,0,0}^{kpq}(x,y)=y^2(3-2y), e_{k,1,0}^{kpq}(x,y)=x(1-x-y)^2, e_{p,1,0}^{kpq}(x,y)=x^2(x-1),$$

$$e_{q,1,0}^{kpq}(x,y)=xy^2, e_{k,0,1}^{kpq}(x,y)=y(1-x-y)^2, e_{p,0,1}^{kpq}(x,y)=yx^2,$$

$$e_{q,0,1}^{kpq}(x,y)=y^2(1-y), e^{kpq}(x,y)=27xy(1-x-y). \tag{9}$$

Явные формулы для базисных кубических полиномов на произвольном треугольнике. Используем формулы (9) для представления всех 10-и функций $h^{pqr}(x,y)$, $h_{k,\beta}^{pqr}(x,y)$, $k\in\{p,q,r\},0\le|\beta|\le\beta_1+\beta_2\le 1$. Введем замену переменных, устанавливающую взаимно однозначное соответствие между точками треугольника $(x,y)\in T_{pqr}$ и точками $(u,v)\in T_{kpq}^u$:

$$x=x_{kpq}(u,v)=x_k+u\cdot(x_p-x_k)+v\cdot(x_q-x_k),$$

$$y=y_{kpq}(u,v)=y_k+u\cdot(y_p-y_k)+v\cdot(y_q-y_k),$$

$$(u,v)=(0,0)\Rightarrow(x,y)=(x_k,y_k),$$

$$(u,v)=(1,0)\Rightarrow(x,y)=(x_p,y_p),\ (u,v)=(0,1)\Rightarrow(x,y)=(x_q,y_q), \tag{10}$$

$$\frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)}=\begin{vmatrix} x_p-x_k & y_p-y_k \\ x_q-x_k & y_q-y_k \end{vmatrix}=\Delta_{kpq},$$

$$u=u_{kpq}(x,y)=\frac{\begin{vmatrix} (x-x_k) & (x_q-x_k) \\ (y-y_k) & (y_q-y_k) \end{vmatrix}}{\Delta_{kpq}},\ v=v_{kpq}(x,y)=\frac{\begin{vmatrix} (x_p-x_k) & (x-x_k) \\ (y_p-y_k) & (y-y_k) \end{vmatrix}}{\Delta_{kpq}},$$

$$u_{kpq}(X_{kpq},Y_{kpq})=1/3,\ v_{kpq}(X_{kpq},Y_{kpq})=1/3.$$

В дальнейшем будем использовать формулы

$$D^{1,0}u_{kpq}(x,y)=\Delta_{kpq}^{-1}(y_q-y_k);\quad D^{0,1}u_{kpq}(x,y)=-\Delta_{kpq}^{-1}(x_q-x_k);$$

$$D^{1,0}v_{kpq}(x,y)=-\Delta_{kpq}^{-1}(y_p-y_k);\quad D^{0,1}v_{kpq}(x,y)=\Delta_{kpq}^{-1}(x_p-x_k);$$

$$u_{kpq}\left(x_k,y_k\right)=0;\ u_{kpq}\left(x_p,y_p\right)=1;\ u_{kpq}\left(x_q,y_q\right)=0;$$
$$v_{kpq}\left(x_k,y_k\right)=0;\ v_{kpq}\left(x_p,y_p\right)=0;\ v_{kpq}\left(x_q,y_q\right)=1.$$

В результате получаем, что для произвольного треугольника T_{pqr} функции $h_{k,\beta}^{pqr}\left(x,y\right),k\in\left\{p,q,r\right\}$, $h_{pqr}\left(x,y\right)$ можно представить в виде, указывающемся в следующих теоремах. Объединяем формулирование и доказательство теорем.

Теорема 3. Для произвольного $k\in\left\{p,q,r\right\}$ функция $h_{k,0,0}^{kpq}\left(x,y\right)=e_{k,0,0}^{kpq}\left(u_{kpq}\left(x,y\right),v_{kpq}\left(x,y\right)\right)$ удовлетворяет условиям:

$$h_{k,0,0}^{kpq}\left(x_k,y_k\right)=e_{k,0,0}^{kpq}\left(0,0\right)=1,\ h_{k,0,0}^{kpq}\left(x_p,y_p\right)=e_{k,0,0}^{kpq}\left(1,0\right)=0,$$
$$h_{k,0,0}^{kpq}\left(x_q,y_q\right)=e_{k,0,0}^{kpq}\left(0,1\right)=0,$$
$$D^{1,0}h_{k,0,0}^{kpq}\left(x,y\right)\Big|_{\left(x_k,y_k\right)}=D^{1,0}e_{k,0,0}^{kpq}\left(u,v\right)\Big|_{(0,0)}D^{1,0}u_{kpq}+D^{0,1}e_{k,0,0}^{kpq}\left(u,v\right)\Big|_{(0,0)}D^{1,0}v_{kpq}=0,$$
$$D^{0,1}h_{k,0,0}^{kpq}\left(x,y\right)\Big|_{\left(x_k,y_k\right)}=D^{1,0}e_{k,0,0}^{kpq}\left(u,v\right)\Big|_{(0,0)}D^{0,1}u_{kpq}+D^{0,1}e_{k,0,0}^{kpq}\left(u,v\right)\Big|_{(0,0)}D^{0,1}v_{kpq}=0,$$
$$D^{1,0}h_{k,0,0}^{kpq}\left(x,y\right)\Big|_{\left(x_p,y_p\right)}=D^{1,0}e_{k,0,0}^{kpq}\left(u,v\right)\Big|_{(1,0)}D^{1,0}u_{kpq}+D^{0,1}e_{k,0,0}^{kpq}\left(u,v\right)\Big|_{(1,0)}D^{1,0}v_{kpq}=0,$$
$$D^{0,1}h_{k,0,0}^{kpq}\left(x,y\right)\Big|_{\left(x_p,y_p\right)}=D^{1,0}e_{k,0,0}^{kpq}\left(u,v\right)\Big|_{(1,0)}D^{0,1}u_{kpq}+D^{0,1}e_{k,0,0}^{kpq}\left(u,v\right)\Big|_{(1,0)}D^{0,1}v_{kpq}=0,$$
$$D^{1,0}h_{k,0,0}^{kpq}\left(x,y\right)\Big|_{\left(x_q,y_q\right)}=D^{1,0}e_{k,0,0}^{kpq}\left(u,v\right)\Big|_{(0,1)}D^{1,0}u_{kpq}+D^{0,1}e_{k,0,0}^{kpq}\left(u,v\right)\Big|_{(0,1)}D^{1,0}v_{kpq}=0,$$
$$D^{0,1}h_{k,0,0}^{kpq}\left(x,y\right)\Big|_{\left(x_q,y_q\right)}=D^{1,0}e_{k,0,0}^{kpq}\left(u,v\right)\Big|_{(0,1)}D^{0,1}u_{kpq}+D^{0,1}e_{k,0,0}^{kpq}\left(u,v\right)\Big|_{(0,1)}D^{0,1}v_{kpq}=0.$$

Для доказательства использованы следующие равенства:

$$e_{k,0,0}^{kpq}\left(0,0\right)=1;e_{k,0,0}^{kpq}\left(1,0\right)=0;e_{k,0,0}^{kpq}\left(0,1\right)=0;$$
$$D^{1,0}e_{k,0,0}^{kpq}\left(u,v\right)\Big|_{(0,0)}=0;D^{0,1}e_{k,0,0}^{kpq}\left(u,v\right)\Big|_{(0,0)}=0;D^{1,0}e_{k,0,0}^{kpq}\left(u,v\right)\Big|_{(1,0)}=0;$$
$$D^{0,1}e_{k,0,0}^{kpq}\left(u,v\right)\Big|_{(1,0)}=0;\ D^{1,0}e_{k,0,0}^{kpq}\left(u,v\right)\Big|_{(0,1)}=0;\ D^{0,1}e_{k,0,0}^{kpq}\left(u,v\right)\Big|_{(0,1)}=0.$$

Аналогично доказываются соответствующие интерполяционные свойства для функций

$$h_{p,0,0}^{kpq}\left(x,y\right)=e_{p,0,0}^{kpq}\left(u_{kpq}\left(x,y\right),v_{kpq}\left(x,y\right)\right),\ h_{q,0,0}^{kpq}\left(x,y\right)=e_{q,0,0}^{kpq}\left(u_{kpq}\left(x,y\right),v_{kpq}\left(x,y\right)\right).$$

Теорема 4. Для произвольного $k\in\left\{p,q,r\right\}$ функция $h_{k,1,0}^{kpq}\left(x,y\right)=$ $=e_{k,1,0}^{kpq}\left(u_{kpq}\left(x,y\right),v_{kpq}\left(x,y\right)\right)$ удовлетворяет условиям:

$$h_{k,1,0}^{kpq}\left(x_q,y_q\right)=e_{k,1,0}^{kpq}\left(0,1\right)=0,$$

$$D^{1,0}h_{k,1,0}^{kpq}(x,y)\Big|_{(x_k,y_k)} = D^{1,0}e_{k,1,0}^{kpq}(u,v)\Big|_{(0,0)} D^{1,0}u_{kpq} + D^{0,1}e_{k,1,0}^{kpq}(u,v)\Big|_{(0,0)} D^{1,0}v_{kpq} =$$
$$= 1D^{1,0}u_{kpq} + 0D^{1,0}v_{kpq} = D^{1,0}u_{kpq} = \Delta_{kpq}^{-1}\left(y_q - y_k\right),$$
$$D^{0,1}h_{k,1,0}^{kpq}(x,y)\Big|_{(x_k,y_k)} = D^{1,0}e_{k,1,0}^{kpq}(u,v)\Big|_{(0,0)} D^{0,1}u_{kpq} + D^{0,1}e_{k,1,0}^{kpq}(u,v)\Big|_{(0,0)} D^{0,1}v_{kpq} =$$
$$= 1D^{0,1}u_{kpq} + 0D^{0,1}v_{kpq} = D^{0,1}u_{kpq} = \Delta_{kpq}^{-1}\left(x_q - x_k\right),$$
$$D^{1,0}h_{k,1,0}^{kpq}(x,y)\Big|_{(x_p,y_p)} = D^{1,0}e_{k,1,0}^{kpq}(u,v)\Big|_{(1,0)} D^{1,0}u_{kpq} + D^{0,1}e_{k,1,0}^{kpq}(u,v)\Big|_{(1,0)} D^{1,0}v_{kpq} = 0,$$
$$D^{0,1}h_{k,1,0}^{kpq}(x,y)\Big|_{(x_p,y_p)} = D^{1,0}e_{k,1,0}^{kpq}(u,v)\Big|_{(1,0)} D^{0,1}u_{kpq} + D^{0,1}e_{k,1,0}^{kpq}(u,v)\Big|_{(1,0)} D^{0,1}v_{kpq} = 0,$$
$$D^{1,0}h_{k,1,0}^{kpq}(x,y)\Big|_{(x_q,y_q)} = D^{1,0}e_{k,1,0}^{kpq}(u,v)\Big|_{(0,1)} D^{1,0}u_{kpq} + D^{0,1}e_{k,1,0}^{kpq}(u,v)\Big|_{(0,1)} D^{1,0}v_{kpq} = 0,$$
$$D^{0,1}h_{k,1,0}^{kpq}(x,y)\Big|_{(x_q,y_q)} = D^{1,0}e_{k,1,0}^{kpq}(u,v)\Big|_{(0,1)} D^{0,1}u_{kpq} + D^{0,1}e_{k,1,0}^{kpq}(u,v)\Big|_{(0,1)} D^{0,1}v_{kpq} = 0.$$

Для доказательства использованы следующие равенства:

$$e_{k,1,0}^{kpq}(0,0) = 0; e_{k,1,0}^{kpq}(1,0) = 0; e_{k,1,0}^{kpq}(0,1) = 0;$$
$$D^{1,0}e_{k,1,0}^{kpq}(u,v)\Big|_{(0,0)} = 1; D^{0,1}e_{k,1,0}^{kpq}(u,v)\Big|_{(0,0)} = 0; D^{1,0}e_{k,1,0}^{kpq}(u,v)\Big|_{(0,1)} = 0;$$
$$D^{0,1}e_{k,1,0}^{kpq}(u,v)\Big|_{(0,1)} = 0; D^{1,0}e_{k,1,0}^{kpq}(u,v)\Big|_{(1,0)} = 0; D^{0,1}e_{k,1,0}^{kpq}(u,v)\Big|_{(1,0)} = 0.$$

Аналогично доказываются соответствующие интерполяционные свойства для функций $h_{p,1,0}^{kpq}(x,y) = e_{p,1,0}^{kpq}\left(u_{kpq}(x,y), v_{kpq}(x,y)\right)$,

$$h_{q,1,0}^{kpq}(x,y) = e_{q,1,0}^{kpq}\left(u_{kpq}(x,y), v_{kpq}(x,y)\right),$$
$$h_{k,0,1}^{kpq}(x,y) = e_{k,0,1}^{kpq}\left(u_{kpq}(x,y), v_{kpq}(x,y)\right),$$
$$h_{p,0,1}^{kpq}(x,y) = e_{p,0,1}^{kpq}\left(u_{kpq}(x,y), v_{kpq}(x,y)\right),$$
$$h_{q,0,1}^{kpq}(x,y) = e_{q,0,1}^{kpq}\left(u_{kpq}(x,y), v_{kpq}(x,y)\right).$$

Теорема 5. Для произвольного треугольника T_{pqr} функция $h_{pqr}(x,y) = e^{pqr}\left(u_{kpq}(x,y), v_{kpq}(x,y)\right)$ удовлетворяет условиям:

$$h_{pqr}(x_k, y_k) = e^{kpq}(0,0) = 0, \ h_{pqr}(x_p, y_p) = e^{kpq}(1,0) = 0,$$
$$h_{pqr}(x_q, y_q) = e^{kpq}(0,1) = 0,$$
$$D^{1,0}h_{pqr}(x,y)\Big|_{(x_k,y_k)} = D^{1,0}e^{kpq}(u,v)\Big|_{(0,0)} D^{1,0}u_{kpq} + D^{0,1}e^{kpq}(u,v)\Big|_{(0,0)} D^{1,0}v_{kpq} = 0,$$

$$D^{0,1}h_{pqr}(x,y)\Big|_{(x_k,y_k)} = D^{1,0}e^{kpq}(u,v)\Big|_{(0,0)} D^{0,1}u_{kpq} + D^{0,1}e^{kpq}(u,v)\Big|_{(0,0)} D^{0,1}v_{kpq} = 0,$$

$$D^{1,0}h_{pqr}(x,y)\Big|_{(x_p,y_p)} = D^{1,0}e^{kpq}(u,v)\Big|_{(1,0)} D^{1,0}u_{kpq} + D^{0,1}e^{kpq}(u,v)\Big|_{(1,0)} D^{1,0}v_{kpq} = 0,$$

$$D^{0,1}h_{pqr}(x,y)\Big|_{(x_p,y_p)} = D^{1,0}e^{kpq}(u,v)\Big|_{(1,0)} D^{0,1}u_{kpq} + D^{0,1}e^{kpq}(u,v)\Big|_{(1,0)} D^{0,1}v_{kpq} = 0,$$

$$D^{1,0}h_{pqr}(x,y)\Big|_{(x_q,y_q)} = D^{1,0}e^{kpq}(u,v)\Big|_{(0,1)} D^{1,0}u_{kpq} + D^{0,1}e^{kpq}(u,v)\Big|_{(0,1)} D^{1,0}v_{kpq} = 0,$$

$$D^{0,1}h_{pqr}(x,y)\Big|_{(x_q,y_q)} = D^{1,0}e^{kpq}(u,v)\Big|_{(0,1)} D^{0,1}u_{kpq} + D^{0,1}e^{kpq}(u,v)\Big|_{(0,1)} D^{0,1}v_{kpq} = 0,$$

$$h_{pqr}(x,y)\Big|_{(X_{pqr},Y_{pqr})} = e^{kpq}\left(u_{kpq}\left(X_{pqr},Y_{pqr}\right), v_{kpq}\left(X_{pqr},Y_{pqr}\right)\right) = e^{kpq}\left(1/3, 1/3\right) = 1.$$

Для доказательства используются следующие равенства:

$$e^{kpq}(0,0)=0; e^{kpq}(1,0)=0; e^{kpq}(0,1)=0;$$

$$D^{1,0}e^{kpq}(u,v)\Big|_{(0,0)} = 0;\ D^{0,1}e^{kpq}(u,v)\Big|_{(0,0)} = 0;$$

$$D^{1,0}e^{kpq}(u,v)\Big|_{(1,0)} = 0; D^{0,1}e^{kpq}(u,v)\Big|_{(1,0)} = 0;$$

$$D^{1,0}e^{kpq}(u,v)\Big|_{(0,1)} = 0;\ D^{0,1}e^{kpq}(u,v)\Big|_{(0,1)} = 0; e^{kpq}\left(1/3, 1/3\right) = 27\cdot 1/27 = 1.$$

Введем к рассмотрению оператор

$$B_{pqr}f(x,y) = \sum_{k\in\{p,q,r\}} f(A_k)h^{pqr}_{k,0,0}(x,y) + \sum_{k\in\{p,q,r\}} C^{pqr}_{k,1,0}(f)h^{pqr}_{k,1,0}(x,y) +$$
$$+\sum_{k\in\{p,q,r\}} C^{pqr}_{k,0,1}(f)h^{pqr}_{k,0,1}(x,y).$$

Теорема 6. Для того чтобы оператор $B_{pqr}f(x,y)$ удовлетворял условиям

$$B_{pqr}f(x,y)\Big|_{A_l} = f(x,y)\Big|_{A_l}, D^{1,0}B_{pqr}f(x,y)\Big|_{A_l} = D^{1,0}f(x,y)\Big|_{A_l},$$
$$D^{0,1}B_{pqr}f(x,y)\Big|_{A_l} = D^{0,1}f(x,y)\Big|_{A_l}, l\in\{p,q,r\}$$

постоянные коэффициенты $C^{pqr}_{k,1,0}(f), C^{pqr}_{k,0,1}(f), k\in\{p,q,r\}$ должны быть решениями следующих систем линейных алгебраических уравнений:

$$\begin{cases} C^{pqr}_{k,1,0}(f)D^{1,0}u_{k,1,0}(x,y,X,Y) + C^{pqr}_{k,0,1}(f)D^{1,0}v_{k,1,0}(x,y,X,Y) = D^{1,0}f(x,y)\Big|_{A_l} \\ C^{pqr}_{k,1,0}(f)D^{0,1}u_{k,1,0}(x,y,X,Y) + C^{pqr}_{k,0,1}(f)D^{0,1}v_{k,1,0}(x,y,X,Y) = D^{0,1}f(x,y)\Big|_{A_l} \end{cases},$$
$$l\in\{p,q,r\}. \tag{11}$$

Доказательство. Учитывая свойства базисных функций $e^{kpq}_{k,0,0}, e^{kpq}_{p,0,0}, e^{kpq}_{q,0,0}$, $e^{kpq}_{k,1,0}, e^{kpq}_{p,1,0}, e^{kpq}_{q,1,0}, e^{kpq}_{k,0,1}$, $e^{kpq}_{p,0,1}, e^{kpq}_{q,0,1}, e^{kpq}$ и функций $u_{kpq}(x,y), v_{kpq}(x,y)$ можно написать следующую цепочку равенств:

$$B_{pqr} f(x,y)\Big|_{A_l} = \sum_{k\in\{p,q,r\}} f(A_k)\, h^{pqr}_{k,0,0}(x,y)\Big|_{A_l} + \sum_{k\in\{p,q,r\}} C^{pqr}_{k,1,0}(f)\, h^{pqr}_{k,1,0}(x,y)\Big|_{A_l} +$$

$$+\sum_{k\in\{p,q,r\}} C^{pqr}_{k,0,1}(f)\, h^{pqr}_{k,0,1}(x,y)\Big|_{A_l} = \sum_{k\in\{p,q,r\}} f(A_k)\,\delta_{k,l} = f(A_l), l\in\{p,q,r\},$$

$$D^{1,0}B_{pqr} f(x,y)\Big|_{A_l} = \sum_{k\in\{p,q,r\}} f(A_k)\, D^{1,0}h^{pqr}_{k,0,0}(x,y)\Big|_{A_l} +$$

$$+\sum_{k\in\{p,q,r\}} C^{pqr}_{k,1,0}(f)\, D^{1,0}h^{pqr}_{k,1,0}(x,y)\Big|_{A_l} + \sum_{k\in\{p,q,r\}} C^{pqr}_{k,0,1}(f)\, D^{1,0}h^{pqr}_{k,0,1}(x,y)\Big|_{A_l} =$$

$$= C^{pqr}_{l,1,0}(f)\, D^{1,0}e^{pqr}_{k,1,0}\left(u_{kpq}(x,y), v_{kpq}(x,y)\right)\Big|_{A_l} +$$

$$+C^{pqr}_{l,0,1}(f)\, D^{1,0}e^{pqr}_{l,0,1}\left(u_{kpq}(x,y), v_{kpq}(x,y)\right)\Big|_{A_l} =$$

$$= C^{pqr}_{l,1,0}(f)\, D^{1,0}u_{kpq}(x,y) + C^{pqr}_{l,0,1}(f)\, D^{1,0}v_{kpq}(x,y);$$

$$D^{0,1}B_{pqr} f(x,y)\Big|_{A_l} = \sum_{k\in\{p,q,r\}} f(A_k)\, D^{0,1}h^{pqr}_{k,0,0}(x,y)\Big|_{A_l} +$$

$$+\sum_{k\in\{p,q,r\}} C^{pqr}_{k,1,0}(f)\, D^{0,1}h^{pqr}_{k,1,0}(x,y)\Big|_{A_l} + \sum_{k\in\{p,q,r\}} C^{pqr}_{k,0,1}(f)\, D^{0,1}h^{pqr}_{k,0,1}(x,y)\Big|_{A_l} =$$

$$= C^{pqr}_{l,1,0}(f)\, D^{0,1}e^{pqr}_{k,1,0}\left(u_{kpq}(x,y), v_{kpq}(x,y)\right)\Big|_{A_l} +$$

$$+C^{pqr}_{l,0,1}(f)\, D^{0,1}e^{pqr}_{l,0,1}\left(u_{kpq}(x,y), v_{kpq}(x,y)\right)\Big|_{A_l} =$$

$$= C^{pqr}_{l,1,0}(f)\, D^{0,1}u_{kpq}(x,y) + C^{pqr}_{l,0,1}(f)\, D^{0,1}v_{kpq}(x,y); l\in\{p,q,r\}.$$

Приравнивая эти выражения к производным $D^{1,0} f(x,y)\Big|_{A_l}$, $D^{0,1} f(x,y)\Big|_{A_l}$, $l\in\{p,q,r\}$ получаем систему уравнений (11). Теорема 6 доказана.

Введем оператор $O_{pqr} f(x,y) = B_{pqr} f(x,y) + \Big(f\left(X_{pqr}, Y_{pqr}\right) -$

$$-B_{pqr} f\left(X_{pqr}, Y_{pqr}\right)\Big) h_{pqr}(x,y)\,(x,y)\in T_{pqr}. \qquad (12)$$

Теорема 7. Для каждой $f(x,y)\in C^1\left(R^2\right)$ оператор $O_{pqr} f(x,y)$ имеет свойства

$$D^{\beta}O_{pqr} f(x,y)\Big|_{(x_l,y_l)} = D^{\beta} f(x,y)\Big|_{(x_l,y_l)}, k\in\{p,q,r\}; 0\le\beta_1+\beta_2\le 1,$$

$$O_{pqr} f\left(X_{pqr}, Y_{pqr}\right) = f\left(X_{pqr}, Y_{pqr}\right).$$

Доказательство. Функция $h_{pqr}\left(x, y\right)$ равна нулю одновременно со своими частными производными 1-го порядка в каждой вершине треугольника. Поэтому

$$D^{\beta}O_{pqr}\,f\left(x,y\right)\Big|_{\left(x_l,y_l\right)} = D^{\beta}B_{pqr}\,f\left(x,y\right)\Big|_{\left(x_l,y_l\right)} +$$
$$+\left(f\left(X_{pqr},Y_{pqr}\right) - B_{pqr}\,f\left(X_{pqr},Y_{pqr}\right)\right)D^{\beta}h_{pqr}\left(x,y\right)\Big|_{\left(x_l,y_l\right)} =$$
$$= D^{\beta}B_{pqr}\ f\left(x,y\right)\Big|_{\left(x_l,y_l\right)} = D^{\beta}f\left(x,y\right)\Big|_{\left(x_l,y_l\right)},\, l\in\left\{p,q,r\right\};0\le\beta_1+\beta_2\le 1.$$

То есть, первую группу утверждений теоремы 7 доказано. Для доказательства последнего утверждения теоремы 7 напишем следующую цепочку равенств:

$$O_{pqr}\,f\left(X_{pqr},Y_{pqr}\right) = B_{pqr}\,f\left(X_{pqr},Y_{pqr}\right)+$$
$$+\left(f\left(X_{pqr},Y_{pqr}\right) - B_{pqr}\,f\left(X_{pqr},Y_{pqr}\right)\right)h^{pqr}\left(X_{pqr},Y_{pqr}\right)=$$
$$= B_{pqr}\,f\left(X_{pqr},Y_{pqr}\right)+\left(f\left(X_{pqr},Y_{pqr}\right) - B_{pqr}\,f\left(X_{pqr},Y_{pqr}\right)\right)\cdot 1 = f\left(X_{pqr},Y_{pqr}\right).$$

Теорема 7 доказана.

Теорема 8. Каждой $f\left(x,y\right)\in C^1\left(R^2\right)$ оператор

$$O_D\,f\left(x,y\right) = O_{pqr}\,f\left(x,y\right),\left(x,y\right)\in T_{pqr}\subset D.$$

Ставит в соответствие сплайн 3-ей степени со свойствами

$$D^{\gamma}O_D\,f\left(x,y\right)\Big|_{\left(x_l,y_l\right)} = D^{\gamma}f\left(x,y\right)\Big|_{\left(x_l,y_l\right)},\, l\in\left\{1,2,...,n\right\},0\le\left|\gamma\right|\le 1,$$
$$O_D\,f\left(X_{pqr},Y_{pqr}\right)\Big|_{\left(x_l,y_l\right)} = f\left(X_{pqr},Y_{pqr}\right)\forall T_{pqr}\subset D.$$

Доказательство. Предположим, что точка $\left(x_l, y_l\right)$ – вершина некоторого треугольника $T_{lpq}\subset D$. Тогда, в соответствии с теоремой 7 можно написать

$$D^{\gamma}O_D\,f\left(x,y\right)\Big|_{\left(x_l,y_l\right)} = D^{\gamma}O_{lpq}\,f\left(x,y\right)\Big|_{\left(x_l,y_l\right)} = D^{\gamma}f\left(x,y\right)\Big|_{\left(x_l,y_l\right)},\, l\in\left\{1,2,...,n\right\},$$
$$0\le\left|\gamma\right|\le 1, O_D\,f\left(X_{lpq},Y_{lpq}\right)\Big|_{\left(x_l,y_l\right)} = O_{lpq}\,f\left(X_{lpq},Y_{lpq}\right) = f\left(X_{lpq},Y_{lpq}\right).$$

Теорема 8 доказана.

Выводы. Предложены явные формулы для построения кубических полиномов Зламала – Женишека на произвольном треугольнике, основанные на использовании базисных кубических полиномов.

Для предложенных формул планируется исследовать погрешность приближения и использовать их для построения кубатурной формулы на произвольной сетке узлов.

1. *Литвин О.М., Литвин О.О., Денисова О.І.* Побудова 2D кубічних інтерполяційних сплайнів класу $C_1(D)$ // Вісник Запорізького університету. – 2011. – № 1. – С. 66–74.
2. *Zlamal M.* On the finite element method // Numer. Math. – 1968. – **12**. – P. 394 – 409.
3. *Zlamal M.* On some finite element procedures for solving second order boundary value problems, ibid. – 1969. – **14**. – P. 42 – 48.
4. *Zlamal M.* A finite element procedure of the second order accuracy, ibid. – 1969. – **14**. – P. 394 – 402.
5. *Zenisek A.* Interpolation polynomials on the triangle // Numer. Math. – 1970. – Vol. 15. – P. 283 – 296.
6. *Zlamal M., Zenisek A.* Mathematical aspect of the finite element method // Technical, physical and mathematical principles of the finite element method (V. Kolar et. al. eds.) Praha: Acad. VED. – 1971. – P. 15 – 39.
7. *Варга Р.* Функциональный анализ и теория аппроксимации в численном анализе / Перевод с англ. – М.: Мир, 1974. – 126 с.
8. *Babushka I., Aziz A.K.* On the engle condition in the finite element method // SIAM J. Numer. Anal. – 1976. – Vol. 13, N 2. – P. 214 – 226.
9. *Bramble J.H., Zlamal M.* Triangular elements in the finite element method // Math. Comp. – 1970. – Vol. 24. – P. 809 – 820.
10. *Субботин Ю.Н.* Зависимость оценок многомерной кусочно полиномиальной аппроксимации от геометрических характеристик триангуляции // Труды МИАН СССР. – 1989. – **189**. – С. 117 – 137.
11. *Латыпова Н.В.* Погрешность кусочно-кубической интерполяции на треугольнике // Вестн. Удмрт. ун-та. Сер. математика. – 2003. – С. 3 – 10.
12. *Zenisek A.* Maximum-angle condition and triangular finite elements of hermite type // Math. Comp. – 1995. – Vol. 64, N 211. – P. 929 – 941.
13. *Субботин Ю.Н.* Новый кубический элемент в МКЭ // Труды Института математики и механики. Теория функций. – Екатеринбург: УрО РАН, 2005. – **11**. – № 2. – С. 120 – 130.
14. *Байдакова Н.В.* Об одном способе эрмитовой интерполяции многочленами третьей степени на треугольнике // Труды Института математики и механики. Теории функций. – Екатеринбург: УрО РАН, 2005. – **11**, № 2. – С. 47 – 52.
15. *Матвеева Ю.В.* Об интерполяции кубическими многочленами третей степени на треугольнике с использованием смешанных производных // Известия Саратовского университета. Новая серия. Серия математика. Механика. Информатика. – 2007. – **7.** – Вып. 1. – С. 28 – 32.
16. *Куприянова Ю.В.* Об одной теореме из теории сплайнов // Журнал вычислительной математики и математической физики. – 2008. – **48**, № 2. – С. 206 – 211.
17. *Матвеева Ю.В.* Приближение функций многочленами на треугольной сетке // Дис. ... канд. физ.-мат. наук. – Саратов, 2008. – 107 с.

Получено 25.10.2012

О.М. Литвин, О.О. Литвин, О.І. Денисова

2D КУБІЧНІ ІНТЕРПОЛЯЦІЙНІ СПЛАЙНИ НА НЕРЕГУЛЯРНІЙ СІТЦІ ВУЗЛІВ

Пропонується метод побудови кубічних інтерполяційних поліномів Зламала – Женішека на довільному трикутнику, оснований на використанні базисних поліномів 3-го степеня для одиничного трикутника.

O.M. Lytvyn, O.O. Lytvyn, O.I. Denisova

2D CUBIC INTERPOLATION SPLINES ON IRREGULAR GRID OF NODES

We propose a method of constructing of Zlamal – Zhenishek cubic interpolation polynomials on an arbitrary triangle, based on the use of basis third-degree polynomials for a unit triangle.

Об авторах:

Литвин Олег Николаевич,
доктор физико-математических наук, профессор,
заведующий кафедрой высшей и прикладной математики
Украинской инженерно-педагогической академии,
E-mail: academ.kharkov@ukr.net

Литвин Олег Олегович,
кандидат физико-математических наук, доцент кафедры высшей и прикладной математики
Украинской инженерно-педагогической академии,
E-mail: loo71@bk.ru

Денисова Оксана Игоревна,
соискатель кафедры высшей и прикладной математики
Украинской инженерно-педагогической академии.
E-mail*:* loo71@bk.ru