Компьютерная математика

УДК 517.934:532.546

Т.Ю. БЛАГОВЕЩЕНСКАЯ, В.М. БУЛАВАЦКИЙ,
А.В. ГЛАДКИЙ

# АНАЛИТИЧЕСКОЕ РЕШЕНИЕ ЗАДАЧИ МАТЕМАТИЧЕСКОГО МОДЕЛИРОВАНИЯ ОДНОГО ЛОКАЛЬНО-НЕРАВНОВЕСНОГО ИЗОТЕРМИЧЕСКОГО ГЕОМИГРАЦИОННОГО ПРОЦЕССА

*Построена дробно-дифференциальная математическая модель для исследования локально-неравновесных геомиграционных процессов с учетом химического осмоса и ультрафильтрации. Поставлена соответствующая данной модели краевая задача и получено ее аналитическое решение.*



**Введение.** Проблема повышения степени адекватности классических количественных моделей процессов геомиграции в системах со сложной пространственно-временной структурой, для которых характерны эффекты памяти, пространственной нелокальности и самоорганизации является весьма актуальной для современной геоинформатики и геогидромеханики. Сложностью данной проблемы обусловлен пересмотр основных положений классической теории переноса в геопористых средах, в частности, значительный прогресс в этом направлении достигнут с использованием формализма интегро-дифференцирования дробного порядка [1–7]. Поскольку в вышеуказанных случаях систем со сложной пространственно-временной структурой рассматриваемые математические модели базируются на системах дифференциальных уравнений дробного порядка [3, 4], то отсюда следует, что данные геомиграционные процессы являются существенно нелокальными во времени и пространстве.

Отметим, что различным аспектам разработки методов математического моделирования локально-неравновесных геомиграционных процессов в насыщенных солевыми растворами геопористых средах посвящены, в частности, работы [5–7]. При этом в [5] построено ряд новых математических моделей для описания динамики процессов массотеплопереноса в условиях сильной временной нелокальности и, в рамках указанных моделей, построены замкнутые решения некоторых краевых задач теории аномальной геофильтрации. В работах [6, 7] построены неклассические математические модели геофильтрации солевых растворов с учетом осмотических явлений в условиях временной нелокальности для неизотермического и изотермического случаев.

В настоящей работе, в рамках развития идей [5–7], построена новая дробно-дифференциальная математическая модель для изучения локально-неравновесных во времени изотермических процессов в насыщенной солевыми растворами геопористой среде с учетом химического осмоса и ультрафильтрации. Поставлена соответствующая предложенной модели краевая задача и получено ее аналитическое решение.

**1. Построение математической модели процесса и постановка краевой задачи.** Для математического моделирования фильтрационно-консолидационного процесса в геопористом массиве, насыщенном солевым раствором с учетом временной нелокальности, осмоса и ультрафильтрации [8], обобщим законы Дарси и Фика таким образом [6, 7]:

$$u_x = D_t^{1-\beta}\left(-k\frac{\partial H}{\partial x}+\nu\frac{\partial C}{\partial x}\right), \tag{1}$$

$$q = D_t^{1-\beta}\left[-d\frac{\partial C}{\partial x}+C\left(-k\frac{\partial H}{\partial x}+\nu\frac{\partial C}{\partial x}\right)+\gamma d_u\frac{\partial H}{\partial x}\right], \tag{2}$$

где $u_x$ – скорость геофильтрации; $H$ – избыточный напор [9, 10]; $C$ – концентрация солей в жидкой фазе; $d$ – коэффициент диффузии; $k$ – коэффициент фильтрации [10]; $\nu$ – коэффициент осмоса; $d_u$ – коэффициент ультрафильтрации [8]; $\gamma$ – удельный вес жидкости; $D_t^{1-\beta}$ – оператор дробного дифференцирования Римана – Лиувилля [3, 4] порядка $1-\beta$ $(0<\beta<1)$ по переменной $t$.

Тогда, из уравнения неразрывности фильтрационного потока [9, 11] получаем следующее уравнение для определения избыточного напора $H$:

$$\frac{\partial H}{\partial t} = D_t^{1-\beta}\left(c_\nu\frac{\partial^2 H}{\partial x^2}-\mu\frac{\partial^2 C}{\partial x^2}\right) \tag{3}$$

или

$$D_t^{(\beta)}H = c_\nu\frac{\partial^2 H}{\partial x^2}-\mu\frac{\partial^2 C}{\partial x^2}, \tag{4}$$

где $c_\nu$ – коэффициент консолидации [10, 12], $\mu=\dfrac{\nu c_\nu}{k}$, $D_t^{(\beta)}$ – оператор регуляризованной дробной производной порядка $\beta$ [3, 4].

Аналогично из соотношения баланса массы солей в жидкой фазе в предположении слабой сжимаемости жидкой фазы получаем следующее уравнение для определения концентрации $C$:

$$\sigma \frac{\partial C}{\partial t} = D_t^{1-\beta}\left[ d\frac{\partial^2 C}{\partial x^2} + \left( k\frac{\partial H}{\partial x} - \nu \frac{\partial C}{\partial x} \right)\frac{\partial C}{\partial x} - \gamma d_u \frac{\partial^2 H}{\partial x^2} \right] \tag{5}$$

или

$$\sigma D_t^{(\beta)} C = d\frac{\partial^2 C}{\partial x^2} + \left( k\frac{\partial H}{\partial x} - \nu \frac{\partial C}{\partial x} \right)\frac{\partial C}{\partial x} - \gamma d_u \frac{\partial^2 H}{\partial x^2}, \tag{6}$$

где $\sigma$ – пористость среды.

В случае фильтрационно-консолидационных процессов в глинистых геомассивах, ввиду малости соответствующих скоростей фильтрации, допустимо пренебречь конвективной составляющей в последнем уравнении. Тогда математическая модель изотермичного локально-неравновесного фильтрационно-консолидационного процесса в глинистом геомассиве, насыщенном солевым раствором, в условиях наличия химического осмоса и ультрафильтрации будет базироваться на системе уравнений с дробными производными вида

$$D_t^{(\beta)} H = c_\nu \frac{\partial^2 H}{\partial x^2} - \mu \frac{\partial^2 C}{\partial x^2}, \tag{7}$$

$$\sigma D_t^{(\beta)} C = d\frac{\partial^2 C}{\partial x^2} - \gamma d_u \frac{\partial^2 H}{\partial x^2}. \tag{8}$$

Отметим, что принимаемая в дальнейшем в качестве основной математическая модель, базирующаяся на уравнениях (7), (8), является естественным обобщением (на случай наличия временной нелокальности) известной [8] математической модели для описания рассматриваемого геомиграционного процесса в равновесных условиях. Действительно, при $\beta \to 1$ из (7), (8) получаем систему уравнений приведенную в [8]:

$$\frac{\partial H}{\partial t} = c_\nu \frac{\partial^2 H}{\partial x^2} - \mu \frac{\partial^2 C}{\partial x^2},$$

$$\sigma \frac{\partial C}{\partial t} = d\frac{\partial^2 C}{\partial x^2} - \gamma d_u \frac{\partial^2 H}{\partial x^2}.$$

В рамках рассматриваемой математической модели моделирование динамики полей избыточных напоров и концентраций при изотермической фильтрационной консолидации глинистых геомассивов, насыщенных солевыми растворами, в условиях временной нелокальности, осмоса и ультрафильтрации сводится, например, в случае массива конечной мощности $l$ с проницаемыми границами, к решению в области $(0,l)\times(0,\infty)$ системы уравнений (7), (8) с краевыми условиями

$$H(0,t)=0, \quad H(l,t)=0, \quad H(x,0)=H_0, \tag{9}$$

$$C(0,t)=C_0, \quad C(l,t)=0, \quad C(x,0)=0, \tag{10}$$

где $H_0$ – начальное значение избыточного напора в массиве, $C_0$ – заданное значение концентрации солей на входе фильтрационного потока.

Введем в рассмотрение безразмерные переменные и параметры соотношениями

$$x'=\frac{x}{l},\ t'=\left(\frac{c_\nu}{l^2}\right)^{1/\beta} t,\ C'=\frac{C}{C_0},\ H'=\frac{H}{H_0},\ \mu'=\frac{\mu C_0}{c_\nu H_0},$$
$$d'=\frac{d}{\sigma c_\nu},\ d_u'=\frac{\gamma d_u H_0}{\sigma c_\nu C_0}. \tag{11}$$

Переходя в соотношениях (7) – (10) к безразмерным переменным согласно соотношениям (11) и опуская в дальнейшем знак «штрих» над безразмерными величинами, получаем следующую краевую задачу:

$$D_t^{(\beta)}H=\frac{\partial^2 H}{\partial x^2}-\mu\frac{\partial^2 C}{\partial x^2}, \tag{12}$$

$$D_t^{(\beta)}C=d\,\frac{\partial^2 C}{\partial x^2}-d_u\,\frac{\partial^2 H}{\partial x^2}, \tag{13}$$

$$H(0,t)=0, \quad H(1,t)=0, \quad H(x,0)=1, \tag{14}$$

$$C(0,t)=1, \quad C(1,t)=0, \quad C(x,0)=0. \tag{15}$$

**2. Решение краевой задачи (12) – (15).** Умножая уравнения (12), (13) на некоторые неопределенные коэффициенты $q_1$, $q_2$ и складывая результаты, получаем

$$D_t^{(\beta)}(q_1H+q_2C)=\frac{\partial^2}{\partial x^2}\left[(q_1-q_2d_u)H+(dq_2-\mu q_1)C\right]. \tag{16}$$

Предположим, что действительная постоянная $r$ такая, что имеют место соотношения

$$q_1-q_2d_u=rq_1, \quad dq_2-\mu q_1=rq_2. \tag{17}$$

Необходимое и достаточное условие наличия у системы линейных однородных уравнений (17) нетривиальных решений дает уравнение

$$r^2-(1+d)r+d-\mu d_u=0. \tag{18}$$

Отсюда

$$r_{1,2}=\frac{1}{2}(1+d\pm\sqrt{\Delta}), \quad \Delta=(1-d)^2+4\mu d_u>0. \tag{19}$$

Определив нетривиальные решения системы (17) при $r=r_i$ $(i=1,2)$, например в виде $\{Q_i,1\}$, где $Q_i=\dfrac{d_u}{1-r_i}$ $(i=1,2)$, и вводя обозначения

$$\psi_i(x,t)=Q_iH(x,t)+C(x,t) \quad (i=1,2), \tag{20}$$

с учетом (16) получаем для отыскания неизвестных функций $\psi_i$ $(i=1,2)$ совокупность уравнений

$$D_t^{(\beta)}\psi_i = r_i \frac{\partial^2 \psi_i}{\partial x^2} \quad (i=1,2). \tag{21}$$

Краевые условия для (21) имеют вид

$$\psi_i(0,t)=1,\ \psi_i(1,t)=0,\ \psi_i(x,0)=Q_i\ (i=1,2). \tag{22}$$

Для физической корректности рассматриваемой задачи необходимо выполнение условия $\nu\gamma d_u < kd$ .

Приводя задачи (21), (22) к однородным граничным условиям и применяя конечное интегральное преобразование Фурье [13, 14] по переменной $x$ получаем задачи типа Коши для дробно-дифференциального уравнения вида:

$$D_t^{(\beta)}\overline{u}_{i_n}(t) + r_i\lambda_n^2\,\overline{u}_{i_n}(t) = 0 \quad (i=1,2), \tag{23}$$

$$\overline{u}_{i_n}(0) = \alpha_n^{(i)} \quad (i=1,2), \tag{24}$$

где

$$\begin{gathered} \overline{u}_{i_n}(t) = \int_0^1 \Psi_i(x,t)\sin(\lambda_n x)dx, \quad \Psi_i(x,t) = \psi_i(x,t) + x - 1, \\ \alpha_n^{(i)} = \frac{Q_i[1+(-1)^{n+1}]-1}{\lambda_n}, \quad \lambda_n = n\pi. \end{gathered} \tag{25}$$

Решая задачи (23), (24) и, возвращаясь в область оригиналов по геометрической переменной, получаем

$$\psi_i(x,t) = 1 - x + 2\sum_{n=1}^{\infty}\alpha_n^{(i)}E_\beta(-r_i\lambda_n^2 t^\beta)\sin(\lambda_n x) \quad (i=1,2), \tag{26}$$

где $E_\beta(z)$ – функция Миттаг – Леффлера [3, 4].

При этом переход к функциям напора $H$ и концентрации $C$ осуществляется по формулам:

$$H = \frac{\psi_1 - \psi_2}{Q_1 - Q_2}, \quad C = \frac{Q_1\psi_2 - Q_2\psi_1}{Q_1 - Q_2}. \tag{27}$$

Таким образом доказано следующее утверждение:

**Теорема.** Если $0<\beta<1$, то краевая задача (12) – (15) имеет решение ($H$, $C$), даваемое формулами (27), (26), при условии, что ряды в (26) сходятся.

Отметим, что из соотношений (27), (26) при $\beta \to 1$ получаем решение рассматриваемой задачи в классической постановке, без учета временной нелокальности процесса [8]. Это решение имеет вид (27), где $\psi_i$ $(i = 1,2)$ определяются соотношениями (26) при $\beta \to 1$, т. е.

$$\psi_i(x,t) = 1 - x + 2\sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n^{(i)} e^{-r_i \lambda_n^2 t} \sin(\lambda_n x) \quad (i = 1,2),$$

что совпадает с решением приведенным в [8].

**Заключение**. Предложенная в работе математическая модель и полученные результаты дают возможность учета на аналитическом уровне новых важных факторов (не учитываемых классическими математическими моделями), тесно связанных с наличием существенной временной нелокальности процесса геомиграции солевых растворов.

*Т.Ю. Благовещенська, В.М. Булавацький, А.В. Гладкий*

АНАЛІТИЧНИЙ РОЗВ’ЯЗОК ЗАДАЧІ МАТЕМАТИЧНОГО МОДЕЛЮВАННЯ ОДНОГО ЛОКАЛЬНО-НЕРІВНОВАЖНОГО ІЗОТЕРМІЧНОГО ГЕОМІГРАЦІЙНОГО ПРОЦЕСУ

Побудована дробово-диференційна математична модель для дослідження локально-нерівноважних геоміграційних процесів з урахуванням хімічного осмосу і ультрафільтрації. Поставлена відповідна цій моделі крайова задача та одержано її аналітичний розв’язок.

*T.Y. Blagoveschenskaya, V.M. Bulavatsky, A.V. Gladky*

ANALYTICAL SOLUTION TO A MATHEMATICAL MODELING PROBLEM OF A LOCAL-NONEQUILIBRIUM ISOTHERMICAL GEOMIGRATION PROCESS

A fractional differential mathematical model for investigation of local-nonequilibrium geomigration processes with chemical osmosis and ultrafiltration is constructed. A statement of the corresponding boundary-value problem is given and its analytical solution is obtained.

1. *Gorenflo R., Mainardi F., Moretti D., Paradisi P.* Time fractional diffusion: a discrete random walk approach // Nonlinear Dynamics. – 2002. –29, N 1–4. – P. 129–143.
2. *Paradisi P., Cesari R., Mainardi F., Tampieri F.* The fractional Fick’s law for non-local transport processes // Physica A. – 2001. – 293, N 1–2. – P. 130–142.
3. *Podlubny I.* Fractional differential equation. –New York: Academ. Press, 1999. –341 p.
4. *Kilbas A.A., Srivastava H.M., Trujillo J.J.* Theory and application of fractional differential equation. – Amsterdam: Elsevier, 2006. – 523 p.
5. *Булавацкий В.М.* Некоторые математические модели геоинформатики для описания процессов переноса в условиях временной нелокальности // Проблемы управления и информатики. – 2011. – № 3. – С. 128–137.
6. *Булавацкий В.М.* Неклассическая математическая модель геоинформатики для решения задач динамики неравновесных неизотермических геофильтрационных полей // Кибернетика и системный анализ. – 2011. – № 6. – С. 79–88.

7. *Булавацкий В.М.* Математическая модель геоинформатики для исследования динамики локально-неравновесных геофильтрационных процессов // Проблемы управления и информатики. – 2011. – № 6. – С. 76–83.
8. *Kaczmarek M., Huekel T.* Chemo-mechanical consolidation of clays: analytical solution for a linearized one-dimensional problem // Transport in porous media. – 1998. – **32.** – P. 49–74.
9. *Ляшко И.И., Демченко Л.И., Мистецкий Г.Е.* Численное решение задач тепло- и массопереноса в пористых средах. – Киев: Наук. думка, 1991. – 264 с.
10. *Иванов П.Л.* Грунты и основания гидротехнических сооружений. – М.: Высш. шк., 1991. – 447 с.
11. *Баренблатт Г.И., Ентов В.М., Рыжик В.М.* Движение жидкостей и газов в природных пластах. – М.: Недра, 1984. – 208 с.
12. *Зарецкий Ю.К.* Теория консолидации грунтов. – М.: Недра, 1967. – 543 с.
13. *Sneddon I.* The use of integral transform. – New York: Mc. Graw-Hill Book Comp., 1973. – 539 p.
14. *Карташов Э.И.* Аналитические методы в теплопроводности твердых тел. – М.: Высш. шк. 1979. – 415 с.

Получено 15.10.2012

***Об авторах:***

*Благовещенская Татьяна Юрьевна*,
кандидат физико-математических наук, старший научный сотрудник
Института кибернетики имени В.М. Глушкова НАН Украины,
E-mail: dept175@gmail.ru

*Булавацкий Владимир Михайлович*,
доктор технических наук, профессор, ведущий сотрудник
Института кибернетики имени В.М. Глушкова НАН Украины,
E-mail: v_bulav@ukr.net

*Гладкий Анатолий Васильевич*,
доктор физико-математических наук, профессор,
зав. отделом Института кибернетики имени В.М. Глушкова НАН Украины.