КОМПЬЮТЕРНАЯ
МАТЕМАТИКА

Оптимизация вычислений

Предлагаются новые кубатурные формулы вычисления коэффициентов Фурье функции трех переменных f(x,y,z), использующие в своем построении операторы кусочно-постоянной сплайн-интерфлетации функции. Такие кубатурные формулы имеют преимущество над известными, так как для достижения заданой точности используют меньше значений функции f(x,y,z).

УДК 519.6

О.Н. ЛИТВИН, О.П. НЕЧУЙВИТЕР

КУБАТУРНЫЕ ФОРМУЛЫ ВЫЧИСЛЕНИЯ 3D КОЭФФИЦИЕНТОВ ФУРЬЕ НА КЛАССЕ ДИФФЕРЕНЦИРУЕМЫХ ФУНКЦИЙ НА ОСНОВЕ КУСОЧНО-ПОСТОЯННЫХ ИНТЕРПОЛЯНТОВ С ИСПОЛЬЗОВАНИЕМ ИНТЕРФЛЕТАЦИИ ФУНКЦИЙ

Введение. В математических моделях, где функцию трех переменных приближают симметрическими отрезками ряда Фурье, возникает вопрос о вычислении коэффициентов Фурье при различных исходных данных (следах функции на плоскостях, на линиях, значениях функции в узловых точках). В случае, когда исходные данные – это значения функции в узловых точках, то для приближенного вычисления 3D коэффициентов Фурье эффективны (с точки зрения достижения заданной точности при заданном количестве исходных данных) кубатурные формулы с использованием интерфлетации функций [1].

Общий подход к построению операторов финитного трехмерного дискретно-непрерывного и дискретного преобразования Фурье на основе метода Файлона, кусочно-постоянных сплайнов и сплайн-интерфлетации на классе дифференцируемых функций изложен в [2]. Суть данного метода состоит в замене функции $f(x,y,z)$ на оператор-интерполянт, построенный на основе оператора-интерфлетанта (в случае вычисления 2D коэффициентов Фурье – замене функции $f(x,y)$ на оператор-интерполянт, построенный на основе оператора-интерлинанта [3, 4]). В работе представлена оценка погрешности приближенного вычисления 3D коэффициентов Фурье кубатурной формулой с использованием интерфлетации функций.

Постановка задачи: на $H_1^{3,1}\left(M\right)$ – классе действительных функций, определенных на $G=\left[0,1\right]^3$ и таких, что $\left|f^{(1,0,0)}(x,y,z)\right|\le M$, $\left|f^{(0,1,0)}(x,y,z)\right|\le M$, $\left|f^{(0,0,1)}(x,y,z)\right|\le M$, $\left|f^{(1,1,0)}(x,y,z)\right|\le \bar{M}$, $\left|f^{(1,0,1)}(x,y,z)\right|\le \bar{M}$, $\left|f^{(0,1,1)}(x,y,z)\right|\le \bar{M}$, $\left|f^{(1,1,1)}(x,y,z)\right|\le \tilde{M}$ для вычисления интегралов:

$$I_1^3(m,n,p)=\int_0^1\int_0^1\int_0^1 f(x,y,z)\sin 2\pi mx \sin 2\pi ny \sin 2\pi pz dxdydz;$$

$$I_2^3(m,n,p)=\int_0^1\int_0^1\int_0^1 f(x,y,z)\cos 2\pi mx \cos 2\pi ny \cos 2\pi pz dxdydz;$$

$$I_3^3(m,n,p)=\int_0^1\int_0^1\int_0^1 f(x,y,z)e^{-i2\pi mx}e^{-i2\pi ny}e^{-i2\pi pz}dxdydz$$

построить кубатурную формулу на основе операторов интерфлетации. Представить оценку погрешности приближенного вычисления.

Введем обозначения

$$X_k=\left[x_{k-1/2},x_{k+1/2}\right],\quad Y_j=\left[y_{j-1/2},y_{j+1/2}\right],\quad Z_s=\left[z_{s-1/2},z_{s+1/2}\right];$$

$$\tilde{X}_{\tilde{k}}=\left[\tilde{x}_{\tilde{k}-1/2},\tilde{x}_{\tilde{k}+1/2}\right],\quad \tilde{Y}_{\tilde{j}}=\left[\tilde{y}_{\tilde{j}-1/2},\tilde{y}_{\tilde{j}+1/2}\right],\quad \tilde{Z}_{\tilde{s}}=\left[\tilde{z}_{\tilde{s}-1/2},\tilde{z}_{\tilde{s}+1/2}\right];$$

$$\bar{X}_{\bar{k}}=\left[\bar{x}_{\bar{k}-1/2},\bar{x}_{\bar{k}+1/2}\right],\quad \bar{Y}_{\bar{j}}=\left[\bar{y}_{\bar{j}-1/2},\bar{y}_{\bar{j}+1/2}\right],\quad \bar{Z}_{\bar{s}}=\left[\bar{z}_{\bar{s}-1/2},\bar{z}_{\bar{s}+1/2}\right].$$

$$h_{1k}(x)=\begin{cases}1, x\in X_k,\\ 0, x\notin X_k,\end{cases}\quad h_{2j}(y)=\begin{cases}1, y\in Y_j,\\ 0, y\notin Y_j,\end{cases}\quad h_{3s}(z)=\begin{cases}1, z\in Z_s,\\ 0, z\notin Z_s,\end{cases};$$

$$\tilde{h}_{1\tilde{k}}(x)=\begin{cases}1, x\in \tilde{X}_{\tilde{k}},\\ 0, x\notin \tilde{X}_{\tilde{k}},\end{cases}\quad \tilde{h}_{2\tilde{j}}(y)=\begin{cases}1, y\in \tilde{Y}_{\tilde{j}},\\ 0, y\notin \tilde{Y}_{\tilde{j}},\end{cases}\quad \tilde{h}_{3\tilde{s}}(z)=\begin{cases}1, z\in \tilde{Z}_{\tilde{s}},\\ 0, z\notin \tilde{Z}_{\tilde{s}},\end{cases};$$

$$\bar{h}_{1\bar{k}}(x)=\begin{cases}1, x\in \bar{X}_{\bar{k}},\\ 0, x\notin \bar{X}_{\bar{k}},\end{cases}\quad \bar{h}_{2\bar{j}}(y)=\begin{cases}1, y\in \bar{Y}_{\bar{j}},\\ 0, y\notin \bar{Y}_{\bar{j}},\end{cases}\quad \bar{h}_{3\bar{s}}(z)=\begin{cases}1, z\in \bar{Z}_{\bar{s}},\\ 0, z\notin \bar{Z}_{\bar{s}},\end{cases}.$$

$$x_k=k\Delta-\frac{\Delta}{2},\ y_j=j\Delta-\frac{\Delta}{2},\ z_s=s\Delta-\frac{\Delta}{2},\quad \Delta=\frac{1}{\ell},\ k,j,s=\overline{1,\ell};$$

$$\tilde{x}_{\tilde{k}}=\tilde{k}\Delta_1-\frac{\Delta_1}{2},\ \tilde{y}_{\tilde{j}}=\tilde{j}\Delta_1-\frac{\Delta_1}{2},\ \tilde{z}_{\tilde{s}}=\tilde{s}\Delta_1-\frac{\Delta_1}{2},\quad \Delta_1=\frac{1}{\ell^{3/2}},\quad \tilde{k},\tilde{j},\tilde{s}=\overline{1,\ell^{3/2}};$$

$$\bar{x}_{\bar{k}}=\bar{k}\Delta_2-\frac{\Delta_2}{2},\quad \bar{y}_{\bar{j}}=\bar{j}\Delta_2-\frac{\Delta_2}{2},\quad \bar{z}_{\bar{s}}=\bar{s}\Delta_2-\frac{\Delta_2}{2},\quad \Delta_2=\frac{1}{\ell^3},\quad \bar{k},\bar{j},\bar{s}=\overline{1,\ell^3}.$$

Рассмотрим операторы

$$O_1 f(x,y,z)=\sum_{k=1}^{\ell} f(x_k,y,z)h_{1k}(x),\qquad O_2 f(x,y,z)=\sum_{j=1}^{\ell} f(x,y_j,z)h_{2j}(y),$$

$$O_3 f(x,y,z)=\sum_{s=1}^{\ell} f(x,y,z_s)h_{3s}(z);$$

$$\tilde{O}_1 f(x,y,z)=\sum_{\tilde{k}=1}^{\ell^{3/2}} f(\tilde{x}_{\tilde{k}},y,z)h_{1\tilde{k}}(x),\qquad \tilde{O}_2 f(x,y,z)=\sum_{\tilde{j}=1}^{\ell^{3/2}} f(x,\tilde{y}_{\tilde{j}},z)\tilde{h}_{2\tilde{j}}(y),$$

$$\tilde{O}_3 f(x,y,z)=\sum_{\tilde{s}=1}^{\ell^{3/2}} f(x,y,\tilde{z}_{\tilde{s}})\tilde{h}_{3\tilde{s}}(z);$$

$$\bar{O}_1 f(x,y,z)=\sum_{\bar{k}=1}^{\ell^{3}} f(\bar{x}_{\bar{k}},y,z)h_{1\bar{k}}(x),\qquad \bar{O}_2 f(x,y,z)=\sum_{\bar{j}=1}^{\ell^{3}} f(x,\bar{y}_{\bar{j}},z)\bar{h}_{2\bar{j}}(y),$$

$$\bar{O}_3 f(x,y,z)=\sum_{\bar{s}=1}^{\ell^{3}} f(x,y,\bar{z}_{\bar{s}})\bar{h}_{3\bar{s}}(z).$$

Лемма 1. [1] Оператор кусочно-постоянной интерфлетации

$$Of(x,y,z)=O_1 f(x,y,z)+O_2 f(x,y,z)+O_3 f(x,y,z)-$$
$$-O_1O_2 f(x,y,z)-O_2O_3 f(x,y,z)-O_1O_3 f(x,y,z)+O_1O_2O_3 f(x,y,z)$$

обладает свойством: $\left|f(x,y,z)-Of(x,y,z)\right|=O\left(\frac{1}{\ell^3}\right)$.

Лемма 2. [1] Оператор кусочно-постоянной интерлинации, построенный на основе сплайн-интерфлетации

$$\tilde{O}f(x,y,z)=O_1\tilde{O}_2 f(x,y,z)+O_1\tilde{O}_3 f(x,y,z)-O_1\tilde{O}_2\tilde{O}_3 f(x,y,z)+$$
$$+O_2\tilde{O}_1 f(x,y,z)+O_2\tilde{O}_3 f(x,y,z)-O_2\tilde{O}_1\tilde{O}_3 f(x,y,z)+$$
$$+O_3\tilde{O}_1 f(x,y,z)+O_3\tilde{O}_2 f(x,y,z)-O_3\tilde{O}_1\tilde{O}_2 f(x,y,z)-$$
$$-O_1O_2 f(x,y,z)-O_1O_3 f(x,y,z)-O_2O_3 f(x,y,z)+O_1O_2O_3 f(x,y,z)$$

обладает следующим свойством: $\left|f(x,y,z)-\tilde{O}f(x,y,z)\right|=O\left(\frac{1}{\ell^3}\right)$.

Лемма 3. [1] Оператор кусочно-постоянной интерполяции, построенный на основе интерфлетации

$$\bar{O}f(x,y,z)=O_1\tilde{O}_2\bar{O}_3 f(x,y,z)+O_1\tilde{O}_3\bar{O}_2 f(x,y,z)-O_1\tilde{O}_2\tilde{O}_3 f(x,y,z)+$$

$$+O_2\tilde{O}_1\bar{O}_3 f(x,y,z)+O_2\tilde{O}_3\bar{O}_1 f(x,y,z)-O_2\tilde{O}_1\tilde{O}_3 f(x,y,z)+$$

$$+O_3\tilde{O}_1\bar{O}_2 f(x,y,z)+O_3\tilde{O}_2\bar{O}_1 f(x,y,z)-O_3\tilde{O}_1\tilde{O}_2 f(x,y,z)-$$

$$-O_1O_2\bar{O}_3 f(x,y,z)-O_1O_3\bar{O}_2 f(x,y,z)-O_2O_3\bar{O}_1 f(x,y,z)+O_1O_2O_3 f(x,y,z)$$

так же обладает свойством: $\left|f(x,y,z)-\bar{O}f(x,y,z)\right|=O\left(\dfrac{1}{\ell^3}\right)$.

Лемма 4. [1] Пусть $f(x,y,z)\in C^{1,1,1}\left(R^3\right)$, тогда

$$f(x,y,z)-Of(x,y,z)=\int\limits_{x_k}^{x}\int\limits_{y_j}^{y}\int\limits_{z_s}^{z} f^{(1,1,1)}(\xi,\eta,\zeta)\,d\xi d\eta d\varsigma.$$

Для вычисления, например, интеграла $I_1^3(m,n,p)$ предлагается формула:

$$\bar{\Phi}_1^3(m,n,p)=\int\limits_0^1\int\limits_0^1\int\limits_0^1 \bar{O}f(x,y,z)\sin 2\pi mx\sin 2\pi ny\sin 2\pi pz dxdydz.$$

Теорема 1. Пусть $f(x,y,z)\in H_1^{3,1}(M)$. Справедлива следующая оценка:

$$\left|I_1^3(m,n,p)-\bar{\Phi}_1^3(m,n,p)\right|\le\left(\frac{\overset{\square}{M}}{64}+\frac{3\bar{M}}{16}+\frac{9}{4}M\right)\frac{1}{\ell^3}.$$

Доказательство теоремы осуществляется по такой схеме:

$$\left|\ I_1^3(m,n,p)-\bar{\Phi}_1^3(m,n,p)\ \right|\le\int\limits_0^1\int\limits_0^1\int\limits_0^1 \left|f(x,y,z)-\bar{O}f(x,y,z)\right|dxdydz\le$$

$$\le\int\limits_0^1\int\limits_0^1\int\limits_0^1 \left|f(x,y,z)-Of(x,y,z)\right|dxdydz+$$

$$+\int\limits_0^1\int\limits_0^1\int\limits_0^1 \left|Of(x,y,z)-\tilde{O}f(x,y,z)\right|dxdydz+$$

$$+\int\limits_0^1\int\limits_0^1\int\limits_0^1 \left|\tilde{O}f(x,y,z)-\bar{O}f(x,y,z)\right|dxdydz\le$$

$$\le\sum_{k=1}^{\ell}\sum_{j=1}^{\ell}\sum_{s=1}^{\ell}\int\limits_{x_{k-\frac12}}^{x_{k+\frac12}}\int\limits_{y_{j-\frac12}}^{y_{j+\frac12}}\int\limits_{z_{s-\frac12}}^{z_{s+\frac12}}\left|\int\limits_{x_k}^{x}\int\limits_{y_j}^{y}\int\limits_{z_s}^{z} f^{(1,1,1)}(\xi,\eta,\zeta)\,d\xi d\eta d\varsigma\right|dxdydz+$$

$$+\sum_{k=1}^{\ell}\sum_{\tilde{j}=1}^{\ell^{3/2}}\sum_{\tilde{s}=1}^{\ell^{3/2}}\int\limits_{x_{k-\frac12}}^{x_{k+\frac12}}\int\limits_{\tilde{y}_{\tilde{j}-\frac12}}^{\tilde{y}_{\tilde{j}+\frac12}}\int\limits_{\tilde{z}_{\tilde{s}-\frac12}}^{\tilde{z}_{\tilde{s}+\frac12}}\int\limits_{\tilde{y}_{\tilde{j}}}^{y}\int\limits_{\tilde{z}_{\tilde{s}}}^{z}\left|f^{(0,1,1)}(x_k,\eta,\zeta)\right|d\eta d\zeta dxdydz+$$

$$+\sum_{j=1}^{\ell}\sum_{\tilde{k}=1}^{\ell^{3/2}}\sum_{\tilde{s}=1}^{\ell^{3/2}}\int\limits_{\tilde{x}_{\tilde{k}-\frac{1}{2}}}^{\tilde{x}_{\tilde{k}+\frac{1}{2}}}\int\limits_{y_{j-\frac{1}{2}}}^{y_{j+\frac{1}{2}}}\int\limits_{\tilde{z}_{\tilde{s}-\frac{1}{2}}}^{\tilde{z}_{\tilde{s}+\frac{1}{2}}}\int\limits_{\tilde{x}_{\tilde{k}}}^{x}\int\limits_{\tilde{z}_{\tilde{s}}}^{z}\left|f^{(1,0,1)}(\xi,y_j,\zeta)\right|d\xi d\zeta dxdydz+$$

$$+\sum_{s=1}^{\ell}\sum_{\tilde{k}=1}^{\ell^{3/2}}\sum_{\tilde{j}=1}^{\ell^{3/2}}\int\limits_{\tilde{x}_{\tilde{k}-\frac{1}{2}}}^{\tilde{x}_{\tilde{k}+\frac{1}{2}}}\int\limits_{\tilde{y}_{\tilde{j}-\frac{1}{2}}}^{\tilde{y}_{\tilde{j}+\frac{1}{2}}}\int\limits_{z_{s-\frac{1}{2}}}^{z_{s+\frac{1}{2}}}\int\limits_{\tilde{x}_{\tilde{k}}}^{x}\int\limits_{\tilde{y}_{\tilde{j}}}^{y}\left|f^{(1,1,0)}(\xi,\eta,z_s)\right|d\xi d\eta dxdydz\le$$

$$=\sum_{k=1}^{\ell}\sum_{\tilde{j}=1}^{\ell^{3/2}}\sum_{\overline{s}=1}^{\ell^{3}}\int\limits_{x_{k-\frac{1}{2}}}^{x_{k+\frac{1}{2}}}\int\limits_{\tilde{y}_{\tilde{j}-\frac{1}{2}}}^{\tilde{y}_{\tilde{j}+\frac{1}{2}}}\int\limits_{\overline{z}_{\overline{s}-\frac{1}{2}}}^{\overline{z}_{\overline{s}+\frac{1}{2}}}\left|\int\limits_{\overline{z}_{\overline{s}}}^{z}f^{(0,0,1)}(x_k,\tilde{y}_{\tilde{j}},\zeta)d\zeta\right|dxdydz+$$

$$+\sum_{k=1}^{\ell}\sum_{\tilde{s}=1}^{\ell^{3/2}}\sum_{\overline{j}=1}^{\ell^{3}}\int\limits_{x_{k-\frac{1}{2}}}^{x_{k+\frac{1}{2}}}\int\limits_{\tilde{z}_{\tilde{s}-\frac{1}{2}}}^{\tilde{z}_{\tilde{s}+\frac{1}{2}}}\int\limits_{\overline{y}_{\overline{j}-\frac{1}{2}}}^{\overline{y}_{\overline{j}+\frac{1}{2}}}\left|\int\limits_{\overline{y}_{\overline{j}}}^{y}f^{(0,1,0)}(x_k,\eta,\tilde{z}_{\tilde{s}})d\eta\right|dxdydz+$$

$$+\sum_{\tilde{k}=1}^{\ell^{3/2}}\sum_{j=1}^{\ell}\sum_{\overline{s}=1}^{\ell^{3}}\int\limits_{\tilde{x}_{\tilde{k}-\frac{1}{2}}}^{\tilde{x}_{\tilde{k}+\frac{1}{2}}}\int\limits_{y_{j-\frac{1}{2}}}^{y_{j+\frac{1}{2}}}\int\limits_{\overline{z}_{\overline{s}-\frac{1}{2}}}^{\overline{z}_{\overline{s}+\frac{1}{2}}}\left|\int\limits_{\overline{z}_{\overline{s}}}^{z}f^{(0,0,1)}(\tilde{x}_{\tilde{k}},y_j,\zeta)d\zeta\right|dxdydz+$$

$$+\sum_{j=1}^{\ell}\sum_{\tilde{s}=1}^{\ell^{3/2}}\sum_{\overline{k}=1}^{\ell^{3}}\int\limits_{\overline{x}_{\overline{k}-\frac{1}{2}}}^{\overline{x}_{\overline{k}+\frac{1}{2}}}\int\limits_{\tilde{z}_{\tilde{s}-\frac{1}{2}}}^{\tilde{z}_{\tilde{s}+\frac{1}{2}}}\int\limits_{y_{j-\frac{1}{2}}}^{y_{j+\frac{1}{2}}}\left|\int\limits_{\overline{x}_{\overline{k}}}^{x}f^{(1,0,0)}(\xi,y_j,\tilde{z}_{\tilde{s}})d\xi\right|dxdydz+$$

$$+\sum_{s=1}^{\ell}\sum_{\tilde{k}=1}^{\ell^{3/2}}\sum_{\overline{j}=1}^{\ell^{3}}\int\limits_{\tilde{x}_{\tilde{k}-\frac{1}{2}}}^{\tilde{x}_{\tilde{k}+\frac{1}{2}}}\int\limits_{z_{s-\frac{1}{2}}}^{z_{s+\frac{1}{2}}}\int\limits_{\overline{y}_{\overline{j}-\frac{1}{2}}}^{\overline{y}_{\overline{j}+\frac{1}{2}}}\left|\int\limits_{\overline{y}_{\overline{j}}}^{y}f^{(0,1,0)}(\tilde{x}_{\tilde{k}},\eta,z_s)d\eta\right|dxdydz+$$

$$+\sum_{s=1}^{\ell}\sum_{\tilde{j}=1}^{\ell^{3/2}}\sum_{\overline{k}=1}^{\ell^{3}}\int\limits_{\overline{x}_{\overline{k}-\frac{1}{2}}}^{\overline{x}_{\overline{k}+\frac{1}{2}}}\int\limits_{z_{s-\frac{1}{2}}}^{z_{s+\frac{1}{2}}}\int\limits_{\tilde{y}_{\tilde{j}-\frac{1}{2}}}^{\tilde{y}_{\tilde{j}+\frac{1}{2}}}\left|\int\limits_{\overline{x}_{\overline{k}}}^{x}f^{(1,0,0)}(\xi,\tilde{y}_{\tilde{j}},z_s)d\xi\right|dxdydz+$$

$$+\sum_{k=1}^{\ell}\sum_{j=1}^{\ell}\sum_{\overline{s}=1}^{\ell^{3}}\int\limits_{x_{k-\frac{1}{2}}}^{x_{k+\frac{1}{2}}}\int\limits_{y_{j-\frac{1}{2}}}^{y_{j+\frac{1}{2}}}\int\limits_{\overline{z}_{\overline{s}-\frac{1}{2}}}^{\overline{z}_{\overline{s}+\frac{1}{2}}}\left|\int\limits_{\overline{z}_{\overline{s}}}^{z}f^{(0,0,1)}(x_k,y_j,\zeta)d\zeta\right|dxdydz+$$

$$+\sum_{k=1}^{\ell}\sum_{s=1}^{\ell}\sum_{\bar{j}=1}^{\ell^3}\int\limits_{x_{k-\frac{1}{2}}}^{x_{k+\frac{1}{2}}}\int\limits_{z_{s-\frac{1}{2}}}^{z_{s+\frac{1}{2}}}\int\limits_{\bar{y}_{\bar{j}-\frac{1}{2}}}^{\bar{y}_{\bar{j}+\frac{1}{2}}}\left|\int\limits_{\bar{y}_{\bar{j}}}^{y} f^{(0,1,0)}(x_k,\eta,z_s)d\eta\right|dxdydz+$$

$$+\sum_{j=1}^{\ell}\sum_{s=1}^{\ell}\sum_{\bar{k}=1}^{\ell^3}\int\limits_{\bar{x}_{\bar{k}-\frac{1}{2}}}^{\bar{x}_{\bar{k}+\frac{1}{2}}}\int\limits_{z_{s-\frac{1}{2}}}^{z_{s+\frac{1}{2}}}\int\limits_{y_{j-\frac{1}{2}}}^{y_{j+\frac{1}{2}}}\left|\int\limits_{\bar{x}_{\bar{k}}}^{x} f^{(1,0,0)}(\xi,y_j,z_s)d\xi\right|dxdydz\le$$

$$\le\frac{\breve{M}}{64}\frac{1}{\ell^3}+\frac{3\bar{M}}{16}\frac{1}{\ell^3}+\frac{9}{4}M\frac{1}{\ell^3}=\left(\frac{\breve{M}}{64}+\frac{3\bar{M}}{16}+\frac{9}{4}M\right)\frac{1}{\ell^3}.$$

Теорема 2. Пусть $f(x,y,z)$ удовлетворяет условиям $\left|f^{(1,0,0)}(x,y,z)\right|\le M$, $\left|f^{(0,1,0)}(x,y,z)\right|\le M$, $\left|f^{(0,0,1)}(x,y,z)\right|\le M$. Если для вычисления интеграла $I_1^3(m,n,p)$ использовать кубатурную формулу $\tilde{\Phi}_1^3(m,n,p)$, в которой функция $f(x,y,z)$ заменяется оператором-интерполянтом: $\breve{\Phi}_1^3(m,n,p)=$

$$=\sum_{\bar{k}=1}^{\ell^3}\sum_{\bar{j}=1}^{\ell^3}\sum_{\bar{s}=1}^{\ell^3} f\left(\bar{x}_{\bar{k}},\bar{y}_{\bar{j}},\bar{z}_{\bar{s}}\right)\int\limits_{\bar{x}_{\bar{k}-\frac{1}{2}}}^{\bar{x}_{\bar{k}+\frac{1}{2}}}\sin 2\pi mxdx\int\limits_{\bar{y}_{\bar{j}-\frac{1}{2}}}^{\bar{y}_{\bar{j}+\frac{1}{2}}}\sin 2\pi nydy\int\limits_{\bar{z}_{\bar{s}-\frac{1}{2}}}^{\bar{z}_{\bar{s}+\frac{1}{2}}}\sin 2\pi pzdz,$$

$$\bar{x}_{\bar{k}}=\bar{k}\Delta_2-\frac{\Delta_2}{2},\ \bar{y}_{\bar{j}}=\bar{j}\Delta_2-\frac{\Delta_2}{2},\ \bar{z}_{\bar{s}}=\bar{s}\Delta_2-\frac{\Delta_2}{2},\ \ \bar{k},\bar{j},\bar{s}=\overline{1,\ell^3},\ \Delta_2=\frac{1}{\ell^3},$$

то имеет место следующая оценка погрешности:

$$\left|I_1^3(m,n,p)-\breve{\Phi}_1^3(m,n,p)\right|\le\frac{3}{4}\frac{M}{\ell^3}.$$

Доказательство теоремы осуществляется по такой схеме:

$$\left|I_1^3(m,n,p)-\breve{\Phi}_1^3(m,n,p)\right|\le$$

$$\le\sum_{\bar{k}=1}^{\ell^3}\sum_{\bar{j}=1}^{\ell^3}\sum_{\bar{s}=1}^{\ell^3}\int\limits_{\bar{x}_{\bar{k}-\frac{1}{2}}}^{\bar{x}_{\bar{k}+\frac{1}{2}}}\int\limits_{\bar{y}_{\bar{j}-\frac{1}{2}}}^{\bar{y}_{\bar{j}+\frac{1}{2}}}\int\limits_{\bar{z}_{\bar{s}-\frac{1}{2}}}^{\bar{z}_{\bar{s}+\frac{1}{2}}}\left|f(x,y,z)-f\left(\bar{x}_{\bar{k}},\bar{y}_{\bar{j}},\bar{z}_{\bar{s}}\right)\right|dxdydz=$$

$$=\sum_{\bar{k}=1}^{\ell^3}\sum_{\bar{j}=1}^{\ell^3}\sum_{\bar{s}=1}^{\ell^3}\int\limits_{x_{\bar{k}-\frac{1}{2}}}^{x_{\bar{k}+\frac{1}{2}}}\int\limits_{y_{\bar{j}-\frac{1}{2}}}^{y_{\bar{j}+\frac{1}{2}}}\int\limits_{z_{\bar{s}-\frac{1}{2}}}^{z_{\bar{s}+\frac{1}{2}}}\Big| f\left(x,y,z\right)-f\left(\overline{x}_{\bar{k}},y,z\right)+f\left(\overline{x}_{\bar{k}},y,z\right)-f\left(\overline{x}_{\bar{k}},\overline{y}_{\bar{j}},z\right)+$$

$$+f\left(\overline{x}_{\bar{k}},\overline{y}_{\bar{j}},z\right)-f\left(\overline{x}_{\bar{k}},\overline{y}_{\bar{j}},\overline{z}_{\bar{s}}\right)\Big|dxdydz\le$$

$$\le\sum_{\bar{k}=1}^{\ell^3}\sum_{\bar{j}=1}^{\ell^3}\sum_{\bar{s}=1}^{\ell^3}\int\limits_{x_{\bar{k}-\frac{1}{2}}}^{x_{\bar{k}+\frac{1}{2}}}\int\limits_{y_{\bar{j}-\frac{1}{2}}}^{y_{\bar{j}+\frac{1}{2}}}\int\limits_{z_{\bar{s}-\frac{1}{2}}}^{z_{\bar{s}+\frac{1}{2}}}\left|\int\limits_{\overline{x}_{\bar{k}}}^{x} f^{(1,0,0)}(\xi,y,z)d\xi\right|dxdydz+$$

$$+\sum_{\bar{k}=1}^{\ell^3}\sum_{\bar{j}=1}^{\ell^3}\sum_{\bar{s}=1}^{\ell^3}\int\limits_{x_{\bar{k}-\frac{1}{2}}}^{x_{\bar{k}+\frac{1}{2}}}\int\limits_{y_{\bar{j}-\frac{1}{2}}}^{y_{\bar{j}+\frac{1}{2}}}\int\limits_{z_{\bar{s}-\frac{1}{2}}}^{z_{\bar{s}+\frac{1}{2}}}\left|\int\limits_{\overline{y}_{\bar{j}}}^{y} f^{(0,1,0)}(\overline{x}_{\bar{k}},\eta,z)d\eta\right|dxdydz+$$

$$+\sum_{\bar{k}=1}^{\ell^3}\sum_{\bar{j}=1}^{\ell^3}\sum_{\bar{s}=1}^{\ell^3}\int\limits_{x_{\bar{k}-\frac{1}{2}}}^{x_{\bar{k}+\frac{1}{2}}}\int\limits_{y_{\bar{j}-\frac{1}{2}}}^{y_{\bar{j}+\frac{1}{2}}}\int\limits_{z_{\bar{s}-\frac{1}{2}}}^{z_{\bar{s}+\frac{1}{2}}}\left|\int\limits_{\overline{z}_{\bar{s}}}^{z} f^{(0,0,1)}(\overline{x}_{\bar{k}},\overline{y}_{\bar{j}},\zeta)d\zeta\right|dxdydz\le$$

$$\le 3M\ell^3\ell^3\ell^3\Delta_2^2\Delta_2^2\frac{\Delta_2^2}{4}=\frac{3}{4}M\frac{1}{\ell^3}.$$

Замечание. Пусть задано $N=\ell^9$ значений функции $f(x,y,z)$. Кубатурные формулы, $\tilde{\Phi}_\mu^3$, $\mu=1,2,3$ для приближенного вычисления $I_\mu^3(m,n,p)$, $\mu=1,2,3$ и достижения точности $O\left(\frac{1}{\sqrt[3]{N}}\right)=O\left(\frac{1}{\ell^3}\right)$ используют все $N=\ell^9$ значений функции $f(x,y,z)$. Кубатурные формулы $\overline{\Phi}_\mu^3$, $\mu=1,2,3$, построенные с использованием интерфлетации функций, используют в $O\left(\sqrt[18]{N^7}\right)=O\sqrt{\ell^7}$ раз меньше значений функции $f(x,y,z)$ для достижения той же погрешности.

Заключение. В данной работе построены новые кубатурные формулы вычисления коэффициентов Фурье функции трех переменных $f(x,y,z)$, использующие в своем построении операторы кусочно-постоянной интерфлетации функции на классе дифференцируемых функций. Исходные данные – это значения функции в узловых точках. Получена оценка погрешности приближеного вычисления 3D коэффициентов Фурье. Предложенные кубатурные формулы имеют преимущество над известными, так как для достижения заданной точности используют меньше значений функции $f(x,y,z)$. Тестирование кубатурных формул будет представлено в следующих статьях.

Цель дальнейших исследований – доказать, что построенные кубатурные формулы являются оптимальными по порядку точности.

О.М. Литвин, О.П. Нечуйвітер

КУБАТУРНІ ФОРМУЛИ ОБЧИСЛЕННЯ 3D КОЕФІЦІЄНТІВ ФУР'Є
НА КЛАСІ ДИФЕРЕНЦІЙНИХ ФУНКЦІЙ НА ОСНОВІ КУСКОВО-СТАЛИХ
ІНТЕРПОЛЯНТІВ З ВИКОРИСТАННЯМ ІНТЕРФЛЕТАЦІЇ ФУНКЦІЙ

Пропонуються нові кубатурні формули обчислення коефіцієнтів Фур'є функції трьох змінних $f(x,y,z)$, які використовують у своїй побудові оператори кусково-сталої сплайн-інтерфлетації функції. Такі кубатурні формули мають перевагу над відомими, так як для досягнення заданої точності використовують менше значень функції $f(x,y,z)$.

O.N. Lytvyn, O.P. Nechuyviter

NEW FORMULARS OF THE EVALUATING OF 3D FOURIER'S COEFFICIENTS
ON THE CLASS OF DIFFERENTIABLE FUNCTIONS WITH USING
INTERFLATION OF FUNCTION

In work on the class of differentiable functions new formulas of the evaluating of 3 D Fourier's coefficients with using interflatation were submitted. The main advantages of of this formulas are high exactness of approximation, less amount of information of function during the calculation .

1. *Литвин О.М.* Інтерлінація функцій та деякі її застосування. – Харків: Основа, 2002. – 544 с.
2. *Литвин О.М., Удовиченко В.М.* Оператори фінітного тривимірного перетворення Фур'є // Радиоэлектроника и информатика. – 2004. – № 4 (29). – С. 130–133.
3. *Литвин О.М., Нечуйвітер О.П.* Кубатурні формули для обчислення коефіцієнтів Фур'є функцій двох змінних з використанням сплайн-інтерлінації // Доповіді НАН України. – К.: 1998. – № 1. – С. 23–28.
4. *Литвин О.М., Нечуйвітер О.П.* Оптимальна за порядком точності кубатурна формула обчислення подвійних інтегралів від швидкоосцилюючих функцій на основі сплайн-інтерлінації // Доповіді НАН України. – К.: 2006. – № 6. – С. 9 – 13.

Получено 25.10.2011

Об авторах:

Литвин Олег Николаевич,
доктор физико-математических наук, профессор, заведующий кафедрой
прикладной математики Украинской инженерно-педагогической академии,
academ@kharkov.ua

Нечуйвитер Олеся Петровна,
кандидат физико-математических наук, доцент кафедры высшей и прикладной математики
Украинской инженерно-педагогической академии.
olesia_nechuiviter@mail.ru