КОМПЬЮТЕРНАЯ МАТЕМАТИКА

Вычислительный эксперимент

УДК 519.8; 368; 65.0

Б.В. НОРКИН

ИСПОЛЬЗОВАНИЕ ГРАФИЧЕСКИХ ПРОЦЕССОРОВ ДЛЯ ОЦЕНКИ ПАРАМЕТРОВ РАБОТЫ СТРАХОВОЙ КОМПАНИИ

Рассматриваются проблемы выполнения актуарных вычислений на графических ускорителях (GPU). Для оценки параметров работы страховой компании, таких как вероятность разорения, проведена реализация метода Монте-Карло на GPU. Это позволило получать достаточно точные оценки в реальном времени. В работе представлены результаты численных экспериментов на разработанной системе актуарного моделирования RMS 0.1, использующей GPU с архитектурой NVIDIA CUDA 4.2.

Введение. В работе рассматриваются проблемы выполнения актуарных вычислений на графических ускорителях. Оценка вероятности разорения и других показателей функционирования страховой компании может быть проведена методом статистического моделирования Монте-Карло. Во многих случаях это единственно применимый метод. Благодаря тому, что вероятность разорения достаточно мала, для достижения приемлемой точности может быть необходимо астрономическое число испытаний. Отличная распараллеливаемость метода делает возможным передачу расчетов графическому процессору. Это позволяет получить достаточно точный результат за разумное время. В работе представлены результаты численных экспериментов на разработанной системе актуарного моделирования RMS 0.1, использующей GPU с архитектурой NVIDIA CUDA 4.2.

Суть страхового бизнеса состоит в получении максимума чистой прибыли при достаточных страховых резервах для покрытия страховых требований. Пути совершенствования бизнеса состоят в использовании гибких (новых) страховых тарифов (цен), введения новых страховых продуктов, расширении дилерской сети, использовании рекламы, перестраховании рисков. Данная деятельность требует расходов, которые осуществляются либо за счет уменьшения стартового резерва, либо за счет поступающих премий. При этом важно соблюдать тонкий баланс между прибыльностью и рисками.

В качестве меры риска может выступать вероятность разорения компании, прибыль же можно оценивать по распределению капитала через заданный промежуток времени.

Для формального описания деятельности страховой компании часто используется случайный процесс риска (модель Крамера – Лундберга), моделирующий стохастическую эволюцию капитала страховой компании [1]. В данной модели, с одной стороны, капитал монотонно и линейно возрастает с течением времени за счет непрерывно поступающих премий, а с другой стороны, в случайные моменты времени (прихода страховых требований) он убывает на случайную величину (требования). Компания разоряется, если капитал становится меньше нуля.

Очевидно, что данный процесс (предложенный Лундбергом около ста лет назад) в таком виде не может адекватно отображать динамику капитала реальной компании. Поэтому существует ряд его обобщений, в частности процессы с нелинейным приростом капитала (моделируется, например, банковский счет со сложными процентами), с непуассоновским процессом прихода требований (например, фиксированная поквартальная выплата), с вычитанием дивидендов, с вложением части капитала в рисковые активы и т. п.

Для оценки вероятности разорения и других функционалов от процессов подобного вида зачастую единственным применимым методом оказывается метод статистического имитационного моделирования Монте-Карло. Однако этот метод требует астрономического числа симуляций для достижения достаточной точности, поскольку вероятность разорения является малой величиной. Однако отличная распараллеливаемость метода делает возможным решить данную проблему за счет наращивания вычислительной мощности. В работах [2 – 4] параллельная версия метода Монте-Карло наряду с параллельным методом последовательных приближений, реализованные на кластере из нескольких персональных компьютеров, применялись для нахождения вероятности разорения как функции от начального капитала и других параметров управления страховой компанией. В работе [5] обсуждаются близкие вопросы параллельного моделирования случайных блужданий на графических ускорителях с архитектурой NVIDIA CUDA [6]. В данной работе метод Монте-Карло для решения актуарных задач реализован на графическом ускорителе с архитектурой NVIDIA CUDA 4.2, за счет чего время расчетов сократилось на один-два порядка по сравнению с расчетами на центральном процессоре. Более того, скорость вычислений делает возможным изучать зависимости вероятности разорения и других показателей не только от начального капитала, а от нескольких других параметров работы компании.

Обобщенный процесс риска как модель страховой компании. Страховая компания обязана поддерживать некоторый уровень страховых резервов для покрытия текущих случайных страховых требований. Математическая модель стохастической эволюции резервов x_t страховой компании имеет вид:

$$x_t = u + \int_0^t \left(c - d(x_s)\right) ds - S_t, \qquad 0 \le t \le T, \tag{1}$$

где t – временной параметр $(0 \le t \le T)$; $x_0 = u \ge 0$ – начальный капитал; $S_t = \sum_{k=1}^{N_t} z_k$ – агрегированные случайные страховые требования; z_k – случайные требования в моменты t_k с функцией распределения $\bar{F}_{t_k}(\cdot)$; N_t – число поступивших к моменту t случайных требований; c – агрегированная страховая премия в единицу времени; $d(\cdot)$ – некоторая функция, выражающая интенсивность выплат дивидендов в зависимости от текущих резервов, $0 \le d(\cdot) \le c$. Здесь функция $d(\cdot)$ имеет смысл позиционного управления дивидендами. Например,

$$d(x) = \begin{cases} x - b(x), & x \ge b(x), \\ 0, & x < b(x), \end{cases}$$

где $b(\cdot)$ – некоторая монотонно возрастающая функция, называемая дивидендным барьером [1]. В классической модели Крамера – Лундберга (с вычитанием постоянных дивидендов d) уравнение эволюции капитала имеет вид:

$$x_t = u + (c - d)t - \sum_{k=1}^{N_t} z_k, \quad 0 \le t \le T, \tag{2}$$

где $\{z_k,\ k = 1, 2, ...\}$ – независимые одинаково распределенные наблюдения случайной величины требований с общей функцией распределения $F(\cdot)$ и средним μ, N_t – целочисленная случайная величина с распределением Пуассона с параметром α (временная интенсивность прихода требований в экспоненциальном распределении).

Рассмотрим вероятность разорения $\psi(\cdot) = \Pr\{\inf_{0 \le t \le T} x_t < 0\}$ как функцию от параметров процесса. Эта вероятность может быть использована как мера риска при управлении страховой компанией. Например, вероятность разорения (на бесконечном интервале времени) в классической модели страховой компании (2) с экспоненциальным распределением требований имеет вид [1]:

$$\psi(u, c, d, \alpha, \mu) = \begin{cases} \dfrac{1}{1+\rho} \exp\left(-\dfrac{\rho\mu}{(1+\rho)\mu} \right), & \rho > 0, \\ 1, & \rho \le 0, \end{cases} \quad \rho = (c - d)/(\alpha\mu) - 1. \tag{3}$$

В данном случае зависимость $\psi(u, c, d, \alpha, \mu)$ известна в явном виде. В более общей модели (1) такая зависимость не известна и может быть получена только методом Монте-Карло. Формула (3) в данной работе используется для тестирования и настройки метода Монте-Карло. Кроме вероятности разорения нас может интересовать распределение капитала в некоторый момент времени и собранные дивиденды, их средние значения и дисперсии в этот момент, а также зависимость этих величин от разнообразных параметров.

Параллельный метод статистического моделирования (метод Монте-Карло). Метод состоит в параллельном моделировании большого числа N траекторий стохастической эволюции резервов x_t страховой компании на заданном интервале времени $[0,T]$ для заданного набора параметров (u,c,d,α,μ) и вычислении доли $p_N(t)$ неразорившихся траекторий к моменту времени t, а также чистого дохода (собранных дивидендов) $D(T)=\int_0^\tau d(x_s)ds$, где τ – момент разорения или $\tau = T$, если разорения до момента T не произошло. В процессе параллельного моделирования вычислительные ядра не общаются, а по завершении моделирования информация о траекториях собирается на одном ядре и строятся функции $p_N(u,c,d,\alpha,\mu,T)$ и $D_N(u,c,d,\alpha,\mu,T)$. Результаты моделирования отображаются в плоскости «изменяемый параметр – вероятность разорения» и в пространстве «риск – доход», т. е. в плоскости «вероятность разорения – собранные дивиденды». Точность метода Монте-Карло может быть оценена с помощью экспоненциального неравенства Хефдинга

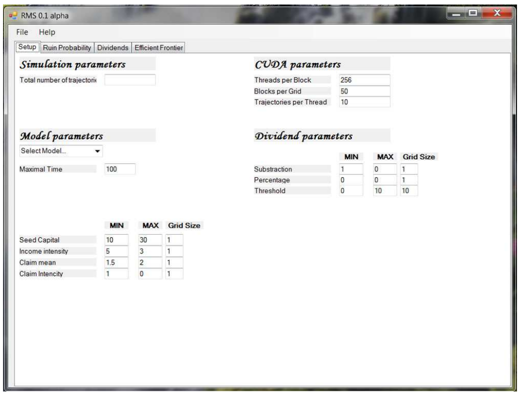
$$Pr\left\{\left|p_N(u,c,d,\alpha,\mu,T)-\psi(u,c,d,\alpha,\mu,T)\right|\geq\delta\right\}\leq 2e^{-N\delta^2/2}\,\frac{1}{2},$$

откуда (10^{-k}) – доверительная граница для $\left|p_N(u,t)-\varphi(u,t)\right|$ имеет вид $\delta_k(N)=\sqrt{2(k\ln 10+\ln 2)}\Big/\sqrt{N}$.

Программная реализация параллельного метода Монте-Карло на GPU. Для проведения расчетов создана программная система страхового моделирования «RMS 0.1». Графический интерфейс системы (рис. 1, 2) позволяет изучать зависимость функции полезности (к примеру, величины собранных дивидендов) от различных параметров работы компании. Можно также строить зависимость вероятности разорения (используемой в качестве меры риска) от вышеуказанных параметров. Для написания интерфейса использован язык C#, расчетная часть написана на CUDA C.

Для реализации параллельного метода Монте-Карло ключевое значение имеет проблема параллельного генерирования большого числа длинных независимых числовых последовательностей, состоящих из независимых случайных чисел. В CUDA эта проблема решается с помощью библиотеки CUDA CURAND [7]. В данной системе каждая «нить» (thread) в цикле генерировала от 10 до 1000 траекторий, 256 нитей объединялись в блоки. Проводились эксперименты с одинарной и двойной точностью представления числовых данных.

Результаты численных экспериментов. Рассмотрена задача нахождения вероятности разорения и чистого дохода страховой компании на конечном интервале времени $[0,T]$. Для проведения тестовых численных экспериментов использовалась классическая модель Крамера – Лундберга (2) с экспоненциально распределенными величинами требований, так как для вероятности разорения $\psi(u,c,d,\alpha,\mu)$ она допускает простое аналитическое решение (3). Численные эксперименты производились на конфигурации AMD Athlon 64 3200+ 1.5Gb Ram, графический ускоритель – Nvidia GeForce GTX 560 2Gb с использованием технологии NVIDIA CUDA 4.2.



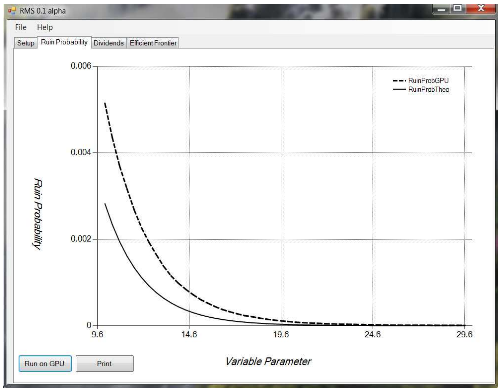


РИС. 1. Окно задания параметров

РИС. 2. Результаты моделирования

1. Ускорение вычислений на GPU. Произведено сравнение времени оценки вероятности разорения для процесса (2) с параметрами $c=1$, $d=0$, $\alpha=$ $=\mu=1$, $u=1$, $T=100$ на CPU и GPU (рис. 3). В эксперименте наблюдалось ускорение вычисления вероятности разорения с помощью GPU на один-два порядка.

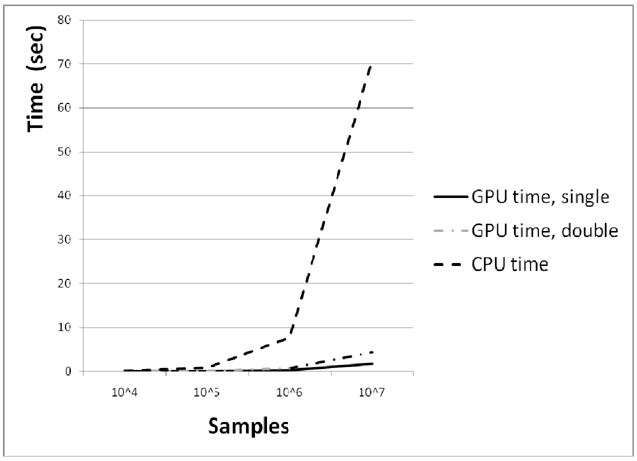


РИС. 3. Сравнение времени оценки вероятности разорения на CPU и GPU

2. Точность и время оценки малых вероятностей разорения на GPU. Проводилось также сравнение оценки вероятности разорения процесса (2) для $T=100$ с ее точным значением при $T=\infty$, полученным по формуле (3), для параметров $c=2$, $\alpha=\mu=1$, $u=10$ (таблица).

Этот эксперимент показывает, что с помощью GPU можно с высокой точность оценивать малые вероятности разорения в реальном времени.

ТАБЛИЦА

Число траекторий	10^6	10^7
Время (в миллисекундах) одинарная точность	199	1959
Время (в миллисекундах) двойная точность	581	5019
Относительная ошибка, одинарная точность %	3.35	0.654401
Относительная ошибка, двойная точность %	1.03	0.322772
Теоретическая вероятность разорения	0.003369	

3. Исследование зависимости вероятностей разорения и чистого дохода от параметров с помощью GPU. Разаработання система страхового моделирования RMS 0.1 позволяет в реальном времени исследовать зависимость вероятности разорения и чистого дохода (суммарных дивидендов) страховой компании как функцию от любого параметра модели. Для этого достаточно в окне интерфейса системы задать минимальное и максимальное значения изменяемого параметра, а также число промежуточных значений параметра. Сокращение времени вычислений достигается за счет массивного распараллеливания метода статистического моделирования с помощью GPU.

На рис. 4 показана (пунктиром) зависимость вероятности разорения $\psi(u,c,d,\alpha,\mu,T)$ в модели (2) от интенсивности прихода требований $\mu\in[0.5,2.2]$. Сплошная линия отображает точное значение вероятности разорения при $T=\infty$, полученное по формуле (3). Остальные параметры принимали следующие значения $u=10$, $c=2$, $d=0$, $\alpha=1$, $T=100$. Несовпадение оценки вероятности разорения и ее точного значения объясняется конечностью временного интервала $[0,100]$ в методе статистического моделирования.

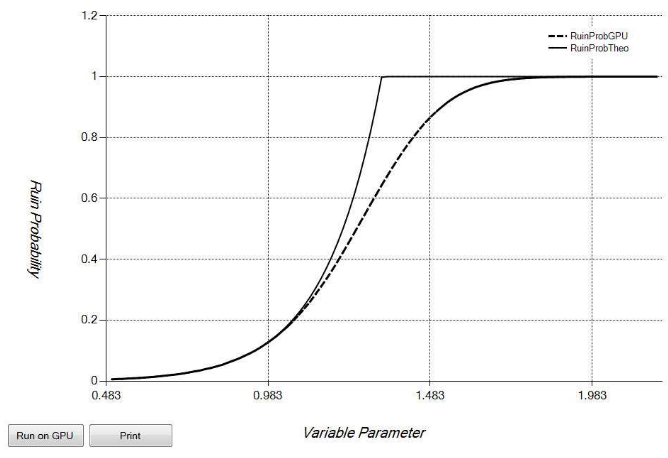


РИС. 4. Зависимость вероятности разорения от интенсивности прихода требований

На рис. 5, 6 приведены результаты моделирования процесса (1) с дивидендной стратегией

$$d(x)=\begin{cases}0, & x<b,\\ d', & x\ge b,\end{cases}$$

где величина порога отбора дивидендов $b\in[5,50]$ выступает в качестве изменяемого параметра. Остальные параметры модели принимали следующие значения $c=2$, $\alpha=2$, $u=10$, $\mu=1.5$, $T=100$, $d'=1$. Рис. 7 сопоставляет на одном графике вероятность разорения и собранные дивиденды при изменении параметра b в интервале $[5,50]$.

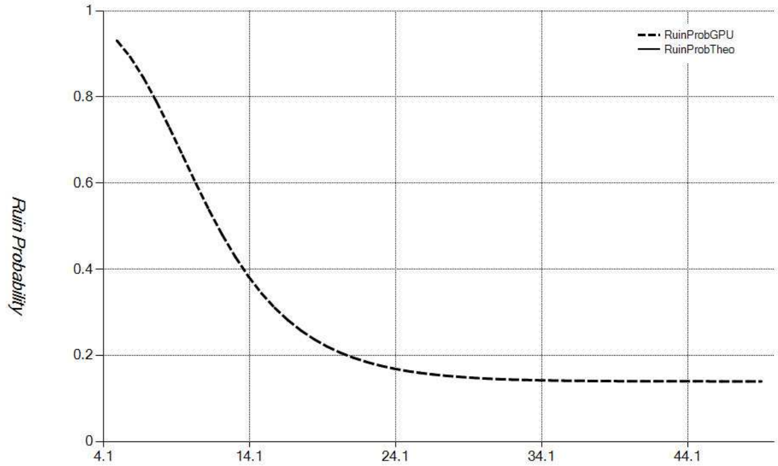


РИС. 5. Зависимость вероятности разорения от порога *b*

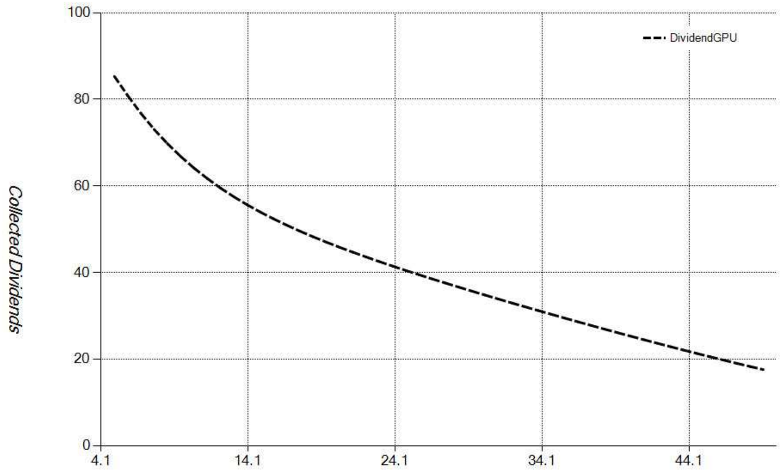


РИС. 6. Зависимость величины собранных дивидендов от порога *b*

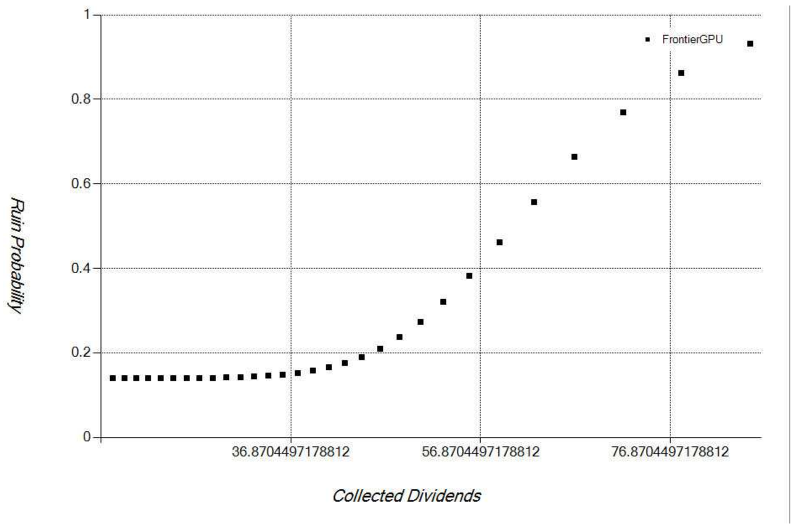


РИС. 7. Отображение результатов моделирования в плоскости «доходность-риск»

Выводы. Использование графических ускорителей позволяет производить численные расчеты в сложных общих актуарных моделях методом Монте-Карло, при этом приемлемая относительная точность порядка 1% на вероятностях разорения порядка 10^{-3} достигается практически в режиме реального времени. Следует отметить, что скорость работы графических ускорителей Nvidia GeForce при решении актуарных задач отличается при использовании операций с числами одинарной и двойной точности (теоретически – в 8 раз), поэтому для каждого конкретного случая необходимо оценивать целесообразность применения расчетов с числами двойной точности.

Разработанная система актуарного моделирования RMS 0.1 позволяет в реальном времени за счет ускорения вычислений на GPU исследовать зависимость вероятности разорения и ожидаемого чистого дохода страховой компании как функцию любого параметра управления компанией. Тем самым она позволяет количественно исследовать влияние факторов управления на функционирование страховой компании. Система позволяет также сопоставлять в реальном времени доходность и риск при выборе параметров управления компанией.

Б.В. Норкін

ВИКОРИСТАННЯ ГРАФІЧНИХ ПРОЦЕСОРІВ ДЛЯ ОЦІНКИ ПАРАМЕТРІВ РОБОТИ СТРАХОВОЇ КОМПАНІЇ

Розглянуто проблему проведення актуарних обчислень на графічних прискорювачах. Оцінка ймовірності банкрутства та інших показників функціонування страхової компанії може бути проведена методом статистичного моделювання Монте-Карло. У багатьох випадках це єдиний метод, що може бути застосований. Враховуючи те, що ймовірність руйнування досить мала, для досягнення прийнятної точності може знадобитися астрономічне число випробувань. Розпаралелюваність методу Монте-Карло робить можливою передачу розрахунків графічному процесору. Це дозволяє отримати досить точний результат у реальному часі. У роботі представлені результати числових експериментів із застосуванням створеної автором системи актуарного моделювання RMS 0.1, що використовує графічний прискорювач з технологією NVIDIA CUDA 4.2.

B.V. Norkin

ON GPU USAGE FOR ACTUARIAL CALCULATIONS

The paper considers issues of performing actuarial calculations on graphical processing units (GPU). Ruin probability estimation for complex risk processes can always be done by means of Monte-Carlo method. In some cases it is the only method to be applicable. However smallness of the ruin probability requires astronomical number of Monte-Carlo simulations needed to achieve good accuracy. Due to effective parallelization of the Monte Carlo method and utilizing calculation power of modern GPU makes it possible to obtain good accuracy within reasonable time limits. Results of numerical experiments by means actuarial risk modeling system RMS 0.1 based on NVIDIA CUDA 4.2 architecture are presented.

1. *Леоненко М.М., Мішура Ю.С., Пархоменко Я.М., Ядренко М.Й.* Теоретико-ймовірнісні та статистичні методи в економетриці та фінансовій математиці. – К.: Інформтехніка, 1995. – 380 с.
2. *Norkin B.* Parallel computations in insurance business optimization // Proceedings of the 1-st International Conference on High Performance Computing. October 12 – 14, 2011, Kyiv, Ukraine. – P. 33 – 39.
3. *Норкин Б.В.* Распараллеливание методов оценки риска банкротства страховой компании // Теорія оптимальних рішень. – 2010. – № 9 . – С. 33 – 39.
4. *Норкин Б.В.* О вероятности разорения управляемого процесса авторегрессии // Компьютерная математика. –2011. – № 2. – С. 142 – 150.
5. *Боресков А.В., Харламов А.А.* Основы работы с технологией CUDA. – М.: ДМК Пресс, 2010. – 232 с.
6. *Haizhen Wu.* Parallel Computing Using GPUs. – March 1, 2011. http://ecs.victoria.ac.nz/twiki/pub/EResearch/EcsTeslaResource/Parallel.Computing.Using.Graphics.Cards.pdf
7. NVIDIA, CUDA CURAND Library, 2010.

Получено 01.09.2012

Об авторе:

Норкин Богдан Владимирович,

кандидат физико-математических наук, научный сотрудник
Института кибернетики имени В.М. Глушкова НАН Украины.

norkin@i.com.ua