УДК 518.5+531.2

Член-кореспондент НАН України **В. В. Скопецький,**
П. С. Малачівський

Чебишовське наближення за неповною системою степеневих функцій

Розглянуто задачу чебишовського (рівномірного, мінімаксного) наближення функцій поліномом і раціональним виразом за неповною системою степеневих функцій. Встановлено необхідні й достатні умови існування такої апроксимації. Одержано характеристичні властивості чебишовської апроксимації функцій поліномом і раціональним виразом за неповною системою базисних функцій із найменшою абсолютною й відносною похибкою. Запропоновано алгоритми для визначення параметрів таких наближень.

Під час наближення спеціальних математичних функцій [1–3] і експериментальних даних [3, 4] часто використовують поліноми

$$P_{m,t}(a;x) = \sum_{i=t}^{m} a_i x^i, \qquad 1 \leqslant t \leqslant m, \tag{1}$$

і раціональні вирази

$$R_{k,t,l}(a;x) = \frac{\sum\limits_{i=t}^{k} a_i x^i}{\sum\limits_{j=0}^{l-1} b_j x^j + x^j}, \qquad 1 \leqslant t \leqslant k, \tag{2}$$

за неповною системою степеневих функцій. Вивченню чебишовського наближення виразами (1) та (2) присвячені роботи [4–7]. Зокрема, в [4, 5] знаходження чебишовського наближення виразами (1) та (2) деякої функції $f(x)$ на відрізку $[\alpha, \beta]$ зводиться відповідно до апроксимації поліномом $P_{m-t,0}(a;x)$ степеня $(m-t)$ і раціональним виразом $R_{k-t,0,l}(a;x)$ функції $f(x)/x^t$. Такий підхід можна використати лише тоді, коли відрізок $[\alpha, \beta]$ не охоплює точку нуль, що, звичайно, обмежує його використання.

Вирази (1) і (2) не задовольняють характеристичні теореми існування чебишовського наближення відповідно поліномом і раціональним виразом [4, 7]. Тому актуальним є дослідження властивостей чебишовського наближення виразами (1) та (2) на відрізках $[\alpha, \beta]$, що охоплюють точку нуль.

1. Чебишовське наближення поліномом за неповною системою степеневих функцій. Властивості такого наближення з найменшою абсолютною похибкою сформульовано у вигляді теореми 1.

Теорема 1. *Нехай функція $f(x)$ неперервно диференційовна до $(t-1)$-го порядку на відрізку $[\alpha, \beta]$ $(f(x) \in C^{(t-1)}[\alpha, \beta])$. Тоді чебишовське наближення функції $f(x)$ поліномом $P_{m,t}(a;x)$ (1) з найменшою абсолютною похибкою на відрізку $[\alpha, \beta]$ існує і єдине, якщо значення функції $f(x)$ та її похідних до $(t-1)$-го порядку в точці $x = 0$ дорівнюють нулю*

$$f(0) = 0 \qquad i \qquad f^{(i)}(0) = 0, \qquad i = \overline{1, t-1}. \tag{3}$$

Для того щоб поліном $P_{m,t}(a;x)$ був чебишовським наближенням із найменшою абсолютною похибкою на відрізку $[\alpha, \beta]$ функції $f(x)$, яка задовольняє умову (3), необхідно й достатньо, щоб для деяких відмінних від нуля $(m-t+2)$-х точок Z з $[\alpha, \beta]$

$$Z = \{z_j \in [\alpha, \beta],\ z_j \neq 0,\ j = \overline{1, m-t+2}\} \tag{4}$$

виконувалися співвідношення

$$f(z_j) - \sum_{i=t}^{m} a_i z_j^i = (-1)^{j+t\Theta(z_j)}\mu, \qquad j = \overline{1, m-t+2}, \tag{5}$$

де модуль μ — це похибка апроксимації

$$|\mu| = \max_{\alpha \leqslant x \leqslant \beta} \left| f(x) - \sum_{i=t}^{m} a_i x^i \right|, \tag{6}$$

$\Theta(x)$ — функція Гевісайда

$$\Theta(x) = \begin{cases} 0, & \text{якщо} \quad x < 0, \\ 1, & \text{якщо} \quad x \geqslant 0, \end{cases} \tag{7}$$

z_j $(j = \overline{1, m-t+2})$ — впорядковані за зростанням точки чебишовського альтернансу.

Доведення. Справедливість цієї теореми безпосередньо випливає із властивостей чебишовської апроксимації з точним відтворенням значення функції та її похідних у певній точці [8]. Справді, нехай поліномом $P_m(a;x)$

$$P_m(a;x) = \sum_{i=0}^{m} a_i x^i \tag{8}$$

є поліномом чебишовського наближення функції $f(x)$ з найменшою абсолютною похибкою на відрізку $[\alpha, \beta]$ і точним відтворенням значення функції та її похідних до $(t-1)$-го порядку включно в деякій точці u

$$P_m(a;u) = f(u), \qquad P_m^{(k)}(a;u) = f^{(k)}(u), \qquad k = \overline{1, t-1}. \tag{9}$$

Тоді, згідно з [8], параметри цього поліному задовольняють систему рівнянь

$$\begin{cases} P_m(a;u) = f(u), \\ P_m^{(k)}(a;u) = f^{(k)}(u), \qquad k = \overline{1, t-1}, \\ f(z_i) - P_m(a;z_i) = (-1)^{i+t\Theta(z_i-u)}\mu, \qquad i = \overline{1, m-t+2}, \end{cases} \tag{10}$$

де

$$|\mu| = \max_{\alpha \leqslant x \leqslant \beta} |f(x) - P_m(a;x)|,$$

$\Theta(x)$ — функція Гевісайда (7), похідні полінома $P_m^{(k)}(a;x)$ визначаються за формулою

$$P_m^{(k)}(a;x) = \sum_{i=k}^{m} \frac{i!}{(i-k+1)!} a_i x^{i-k},$$

а z_i $(i = \overline{1, m-t+2})$ — впорядковані за зростанням точки чебишовського альтернансу.

Якщо точка інтерполювання u збігається з точкою нуль ($u = 0$) і значення функції $f(x)$ та її похідних до $(t-1)$-го порядку включно в цій точці дорівнюють нулю, то система рівнянь (10) збігається з системою (5). Отже, чебишовське наближення поліномом $P_{m,t}(a; x)$ (1) з найменшою абсолютною похибкою на відрізку $[\alpha, \beta]$ існує і єдине для функції $f(x)$, якщо її значення і значення її похідних до $(t-1)$-го порядку включно в точці $x = 0$ дорівнюють нулю. При цьому значення параметрів такого чебишовського наближення визначаються системою рівнянь (5). Теорему доведено.

Відповідно до альтернансної властивості (5) в разі парного значення t похибка чебишовської апроксимації поліномом $P_{m,t}(a; x)$ (1) з найменшою абсолютною похибкою в точках альтернансу має знакозмінний характер, а для непарного значення t — знаки похибки апроксимації в точках альтернансу, сусідніх із точкою $x = 0$, збігаються. Для знаходження точок альтернансу z_j ($j = \overline{1, m-t+2}$) (4) у разі визначення параметрів чебишовської апроксимації деякої неперервно диференційовної функції $f(x)$, що задовольняє умову (3), поліномом $P_{m,t}(a; x)$ (1) на відрізку $[\alpha, \beta]$ з найменшою абсолютною похибкою, можна використати схему Ремеза з одноточковою заміною наближення до точок альтернансу за модифікованим алгоритмом Валле-Пуссена [9]. При цьому під час вибору початкового наближення до точок альтернансу необхідно пам'ятати, що точка $x = 0$ не може входити в альтернанс.

Особливість чебишовського наближення поліномом $P_{m,t}(a; x)$ (1) з відносною похибкою зумовлена тим, що функція $f(x)$ набуває нульового значення в точці $x = 0$. Відповідно до означення чебишовського наближення з найменшою відносною похибкою функції, що набуває нульового значення [10], відносна похибка апроксимації $f(x)$ многочленом $P_m(a; x)$ в точці $x = 0$ дорівнює нулю

$$\delta(x) = \begin{cases} \dfrac{f(x) - P_m(a; x)}{f(x)}, & \text{якщо} \quad x \neq 0, \\ 0, & \text{якщо} \quad x = 0. \end{cases} \tag{11}$$

Властивості чебишовського наближення поліномом $P_{m,t}(a; x)$ (1) з найменшою відносною похибкою визначається теоремою 2.

Теорема 2. *Нехай функція $f(x)$ неперервно диференційовна до $(t-1)$-го порядку на відрізку $[\alpha, \beta]$ ($f(x) \in C^{(t-1)}[\alpha, \beta]$) набуває нульового значення лише в точці $x = 0$. Тоді чебишовське наближення функції $f(x)$ поліномом $P_{m,t}(a; x)$ (1) з найменшою відносною похибкою на відрізку $[\alpha, \beta]$ існує і єдине, якщо значення функції $f(x)$ та її похідних до $(t-1)$-го порядку в точці $x = 0$ дорівнюють нулю* (3).

Для того щоб поліном $P_{m,t}(a; x)$ був чебишовським наближенням із найменшою відносною похибкою на відрізку $[\alpha, \beta]$ функції $f(x)$, яка задовольняє умову (3), необхідно й достатньо, щоб для деяких відмінних від нуля $(m-t+2)$-х точок Z з $[\alpha, \beta]$ (4) виконувалися співвідношення

$$\frac{f(z_j) - \sum\limits_{i=p}^{m} a_i z_j^i}{f(z_j)} = (-1)^{j+(t+1)\Theta(z_j)} \mu, \qquad j = \overline{1, m-t+2}, \tag{12}$$

де модуль μ — похибка апроксимації

$$|\mu| = \max_{\alpha \leqslant x \leqslant \beta,\, x \neq 0} \left| \frac{f(x) - \sum\limits_{i=t}^{m} a_i x^i}{f(x)} \right|, \tag{13}$$

$\Theta(x)$ — функція Гевісайда (7), а z_j ($j = \overline{1, m-t+2}$) — впорядковані за зростанням точки чебишовського альтернансу.

Доведення. Доведення цієї теореми подібне до доведення теореми 1. Воно грунтується на характеристичній властивості чебишовської апроксимації з найменшою відносною похибкою [10] й точним відтворенням значення функції та її похідних у певній точці [8]. Множник $(t+1)$ перед функцією Гевісайда в рівняннях (12) з'являється з урахуванням одночасної зміни знаку похибки апроксимації (13) зі зміною знаку функції $f(x)$ в точці $x = 0$.

Відповідно до альтернансної властивості (12), в разі непарного значення t похибка чебишовської апроксимації поліномом $P_{m,t}(a;x)$ з найменшою відносною похибкою в точках альтернансу має знакозмінний характер, а для парного значення t — знаки похибки апроксимації в точках альтернансу, сусідніх із точкою $x = 0$, збігаються. Для знаходження точок альтернансу z_j ($j = \overline{1, m-t+2}$) (4) в цьому разі також можна використати схему Ремеза з одноточковою заміною наближення до точок альтернансу за модифікованим алгоритмом Валле-Пуссена [9].

2. Чебишовське наближення раціональним виразом за неповною системою степеневих функцій. Існування і єдиність чебишовського наближення для неперервних функцій $f(x)$ раціональним виразом (2) з найменшою абсолютною похибкою на відрізку $[\alpha, \beta]$ визначається теоремою 3.

Теорема 3. *Нехай функція $f(x)$ — неперервно диференційовна до $(t-1)$-го порядку на відрізку $[\alpha, \beta]$ ($f(x) \in C^{(t-1)}[\alpha, \beta]$). Тоді чебишовське наближення функції $f(x)$ раціональним виразом $R_{k,t,l}(a;x)$ (2) з найменшою абсолютною похибкою на відрізку $[\alpha, \beta]$ існує і єдине, якщо значення функції $f(x)$ та її похідних до $(t-1)$-го порядку в точці $x = 0$ дорівнюють нулю* (3).

Для того щоб раціональний вираз $R_{k,t,l}(a;x)$ був чебишовським наближенням із найменшою абсолютною похибкою на відрізку $[\alpha, \beta]$ функції $f(x)$, яка задовольняє умову (3), необхідно й достатньо, щоб для деяких відмінних від нуля $(k+l-t+2)$-х точок Z з $[\alpha, \beta]$ виконувалися співвідношення

$$f(z_j) - \frac{\sum_{i=t}^{k} a_i z_j^i}{\sum_{i=0}^{l-1} b_i z_j^i + z_j^l} = (-1)^{j+t\Theta(z_j)}\mu, \qquad j = \overline{1, k+l-t+2}, \tag{14}$$

де модуль μ — похибка апроксимації

$$|\mu| = \max_{\alpha \leqslant x \leqslant \beta} \left| f(x) - \frac{\sum_{i=t}^{k} a_i x^i}{\sum_{i=0}^{l-1} b_i x^i + x^j} \right|, \tag{15}$$

z_j ($j = \overline{1, k+l-t+2}$) — впорядковані за зростанням точки чебишовського альтернансу, а $\Theta(x)$ — функція Гевісайда (7).

Доведення. Подібно до теореми 1, доведення цієї теореми грунтується на властивостях чебишовської апроксимації раціональним виразом із точним відтворенням значення функції та її похідних у точці $x = 0$ [11].

Параметри чебишовського наближення функцій $f(x)$ раціональним виразом (2) з найменшою абсолютною похибкою на відрізку $[\alpha, \beta]$ можна визначити за схемою Ремеза з одноточковою заміною наближення до точок альтернансу за модифікованим алгоритмом Валле-Пуссена [9]. Для розв'язування задачі чебишовської інтерполяції можна застосувати один з ітераційних алгоритмів, наведених в [5].

Встановлено також характеристичну властивість чебишовського наближення функцій раціональним виразом $R_{k,t,l}(a;x)$ (2) з найменшою відносною похибкою. Вона полягає у виконанні співвідношень

$$\frac{f(z_j) - \sum\limits_{i=t}^{k} a_i z_j^i \Big/ \left(\sum\limits_{i=0}^{l-1} b_i z_j^i + z_j^l \right)}{f(z_j)} = (-1)^{j+(t+1)\Theta(z_j)}\mu, \qquad j = \overline{1,n}, \tag{16}$$

де модуль μ — це похибка апроксимації

$$|\mu| = \max_{\alpha \leqslant x \leqslant \beta, x \neq 0} \left| \frac{f(x) - \sum\limits_{i=t}^{k} a_i x^i \Big/ \left(\sum\limits_{i=0}^{l-1} b_i x^i + x^l \right)}{f(x)} \right|, \qquad n = k + l - t + 2, \tag{17}$$

$\Theta(x)$ — функція Гевісайда (7), а z_j ($j = \overline{1,n}$) — впорядковані за зростанням точки чебишовського альтернансу.

Отже, відзначимо: Чебишовська апроксимація неперервно диференційовної до $(t-1)$-го порядку функції $f(x)$ многочленом $P_{m,t}(a;x)$ (1) або раціональним виразом $R_{k,t,l}(a;x)$ (2) на відрізку $[\alpha, \beta]$ існує і єдина, якщо значення функції $f(x)$ та її похідних до $(t-1)$-го порядку в точці $x = 0$ дорівнюють нулю (3). Ці апроксимації характеризуються відповідно альтернансними властивостями (5), (12), (14) і (16). Для знаходження параметрів таких апроксимацій можна використати схему Ремеза з одноточковою заміною наближення до точок альтернансу за модифікованим алгоритмом Валле-Пуссена.

1. *Люк Ю.* Специальные математические функции и их аппроксимации. – Москва: Мир, 1980. – 608 с.
2. *Попов Б. А., Теслер Г. С.* Вычисление функций на ЭВМ. Справочник. – Киев: Наук. думка, 1984. – 599 с.
3. *Muller J. M.* Elementary functions: algorithms and implementation. – Boston: Birkhäuser, 1997. – 204 p.
4. *Попов Б. А.* Равномерное приближение сплайнами. – Киев: Наук. думка, 1989. – 272 с.
5. *Попов Б. А., Теслер Г. С.* Приближение функций для технических приложений. – Киев: Наук. думка, 1980. – 352 с.
6. *Попов Б. О., Лаушник О. І.* Визначення похибок чебишовського наближення раціональними сплайнами із ланками, залежними від x^p // Доп. НАН України. – 1999. – № 3. – С. 40–43.
7. *Малачівський П. С.* Чебишовське наближення раціональним виразом з двома параметрами // Комп'ютерні технології друкарства. – 1999. – № 3. – С. 368–375.
8. *Малачівський П.* Чебишовське наближення з точним відтворенням значень функції та її похідних у заданих точках // Фіз.-мат. моделювання та інформаційні технології. – 2007. – Вип. 5. – С. 119–126.
9. *Малачівський П.* Модифікований алгоритм Валле-Пуссена // Там само. – 2005. – Вип. 2. – С. 159–166.
10. *Малачівський П. С.* Чебишовське наближення з відносною похибкою функцій, що набувають нульового значення // Доп. НАН України. – 2001. – № 5. – С. 67–73.

11. *Малачівський П.* Чебишовське наближення раціональним виразом з ермітовою інтерполяцією // Комп'ютерні технології друкарства. – 2008. – № 19. – С. 94–103.

Інститут кібернетики ім. В. М. Глушкова
НАН України, Київ
Центр математичного моделювання ІППММ
ім. Я. С. Підстригача НАН України, Львів

Надійшло до редакції 19.08.2008

Corresponding Member of the NAS of Ukraine **V. V. Skopeckyy, P. S. Malachivskyy**

Chebyshev approximation with an incomplete system of basic power functions

The problem of the Chebyshevian (uniform, minimax) approximation to a given function by a polynomial and a rational expression based on an incomplete system of basic power functions is considered. Both necessary and sufficient conditions of existence for such an approximation are established. The alternance property of polynomial and rational Chebyshevian approximations based on the aforementioned system of functions for both absolute and relative minimal errors are discussed. The algorithm for calculating the parameters of such an approximation is proposed.