

Изучается проблема управления дивидендной политикой страховой компании (или другого финансового института) на основе показателей доходности и риска (разорения). Эволюция капитала компании моделируется процессом авторегрессии с вычитанием дивидендов. Проводится детальное численное сравнение двух стратегий назначения дивидендов, процента от текущего капитала и стратегии максимизации текущих дивидендов при ограничении на вероятность последующего разорения.

© Б.В. Норкин, 2011

УДК 519.8; 368; 65.0

Б.В. НОРКИН

О ВЕРОЯТНОСТИ РАЗОРЕНИЯ УПРАВЛЯЕМОГО ПРОЦЕССА АВТОРЕГРЕССИИ¹

Введение. В работе изучается проблема управления дивидендной политикой некоторой финансовой организации (страховой компании, финансовой компании, банка, фонда и т.п.). Для моделирования эволюции капитала организации используется авторегрессионная модель с вычитанием дивидендов. Управление оценивается на основе двух показателей – доходности (суммарных дивидендов) и риска (разорения).

Традиционно, под риском в задаче прогнозирования понимается возможность отклонения случайного значения показателя от его прогнозного (например, наиболее вероятного) значения. Такой риск может измеряться, например, стандартным отклонением, доверительным интервалом или вероятностью отклонения на заданную величину. Значения этих мер риска также прогнозируются на определенный момент в будущем. В работе рассматривается и прогнозируется другой вид риска, а именно, вероятность разорения финансового института в течение заданного интервала времени. Решение этой задачи требует развития другого математического и вычислительного аппарата. В классической актуарной математике для моделирования эволюции капитала страховой компании используются сложные пуассоновские процессы и разнообразные методы оценивания вероятности разорения на конечном или бесконечном интервале времени [1– 4].

¹ Работа поддержана грантом Президента Украины для молодых ученых.

В настоящей работе в качестве модели финансовой организации используются другие модели, а именно, линейные и нелинейные модели авторегрессии эволюции капитала организации, построенные на основе данных временных рядов ее платежного баланса [5]. Оценка вероятности разорения финансовой компании является важной практической задачей. Вероятность разорения оценивается методом статистических испытаний (МСИ) (моделированием траекторий стохастической эволюции резервов компании) [2], а также более точным методом рекуррентных интегральных соотношений (МРИС). В случае бесконечного временного интервала моделирование МРИС превращаются в метод последовательных приближений решения интегральных уравнений, которым в этом случае удовлетворяет вероятность разорения. Для сложного пуассоновского процесса подобный метод последовательных приближений вычисления вероятности разорения детально исследован в [6–10].

Умение оценивать риск разорения финансового института является необходимым пререквизитом оптимизации параметров функционирования этого института при ограничении на риск (вероятность) его разорения. Для этого нужно уметь оценивать вероятность разорения как функцию параметров. В настоящей работе вероятность разорения вычисляется как функция начального состояния (начального капитала) и параметров стационарного управления организацией, например, уровня абсолютных или относительных дивидендов, отчисляемых с текущего капитала и параметров, характеризующих надежность функционирования компании. Оптимальные стационарные значения параметров выбираются исходя из анализа соотношения «дивидендный доход – риск разорения».

Если компания знает оптимальные для данного начального капитала стационарные стратегии (параметры) управления, то, очевидно, она будет изменять стратегию при изменении ее текущего состояния. В работе оценивается качество такого позиционного управления, когда для управления применяются оптимальные для данного текущего состояния параметры.

Работа страховых компаний и других финансовых организаций должна оцениваться с точки зрения доходности и риска. В данной работе в качестве меры доходности используются средние собранные дивиденды, а в качестве меры риска – вероятность разорения за фиксированное время. Для наглядной демонстрации качества управления результаты моделирования отображаются на плоскости «доход – риск».

Оценка риска разорения процесса авторегрессии. Пусть уравнение движения для текущего капитала x_t организации имеет вид (модель нелинейной авторегрессии первого порядка)

$$x_{t+1} = f(x_t) + \xi_t, \quad t = 0, 1, \dots, \quad (1)$$

где $x_0 = x \geq 0$ задает начальное состояние, $f(x) \geq 0$ – детерминированная функция (например, $f(x) = (1+r)x$, $r \geq -1$), $\{\xi_t\}$ – независимые одинаково распределенные реализации некоторой случайной величины с нулевым средним и функцией распределения $F(\cdot)$. Тогда для вероятностей

$$\varphi_{t+1}(x) = \Pr\{\min_{0 \leq \tau \leq t+1} x_\tau \geq 0, x_0 = x\}$$

платежеспособности организации за все время $(t+1)$ при начальном капитале x имеют место следующие рекуррентные интегральные соотношения (РИС)

$$\varphi_{t+1}(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} \varphi_t(f(x) + y) dF(y), \quad t = 0, 1, \dots, \quad (2)$$

с начальным $\varphi_0(x) = 1$ для любых $x \geq 0$ и граничным условием $\varphi_t(+\infty) = 1$ для любого $t \geq 0$. По определению считается, что $\varphi_t(x) = 0$ при $x < 0$.

Так как $\varphi_1(x) = 1 - F(-f(x)) \leq \varphi_0(x) \equiv 1$, то из следует, что последовательность функций $\{\varphi_t(x), t = 0, 1, \dots\}$ монотонно убывает.

Представляет интерес вероятность разорения процесса авторегрессии на бесконечном интервале времени [11]. Вероятность неразорения $\varphi(x)$ процесса (1) за бесконечное время при начальном капитале $x \geq 0$ удовлетворяет интегральному уравнению

$$\varphi(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} \varphi(f(x) + y) dF(y),$$

решение которого ищется в классе неубывающих функций таких, что $0 \leq \varphi(x) \leq 1$.

Лемма 1 (аналог неравенства Крамера – Лундберга). Пусть для процесса (1) выполнено:

а) $f(x) \geq x \geq 0$ (например, $f(x) = (1+r)x \geq x \geq 0$ для $r \geq 0$);

б) существует $L > 0$ такое, что $\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-Ly} dF(y) \leq 1$.

Тогда для всех целых $t \geq 0$ выполнено $\varphi_t(x) \geq 1 - e^{-Lx}$.

При этом условие б) леммы заведомо выполнено, если $0 < \int_{-\infty}^{+\infty} y dF(y) < \infty$ и $\int_{-\infty}^{+\infty} y^2 dF(y) < \infty$. Действительно,

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-Ly} dF(y) \leq \int_{-\infty}^{+\infty} (1 - Ly + L^2 y^2 / 2) dF(y) = 1 - L \int_{-\infty}^{+\infty} y dF(y) + \frac{L^2}{2} \int_{-\infty}^{+\infty} y^2 dF(y),$$

где правая часть меньше единицы для достаточно малых L .

Более общее, чем (1), уравнение движения капитала имеет вид

$$x_{t+1} = f(x_t, \xi_t), \quad t = 0, 1, \dots, \quad (3)$$

например, $x_{t+1} = (1 + \xi_t)x_t - g(x_t)$, $\{\xi_t\}$ – независимые одинаково распределенные реализации некоторой случайной величины с функцией распределения $F(\cdot)$. Соответствующие интегральные соотношения имеют вид

$$\varphi_{t+1}(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} \varphi_t(f(x, y)) dF(y), \quad \varphi_0(x) = 1, \quad t = 0, 1, \dots,$$

а вероятность неразорения за бесконечное время удовлетворяет уравнению

$$\varphi(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} \varphi(f(x, y)) dF(y).$$

Оптимизация стационарной дивидендной стратегии финансовой организацией при ограничении на вероятность неплатежеспособности. Пусть уравнение движения капитала организации имеет вид

$$x_{t+1} = f(x_t, \xi_t) - c, \quad t = 0, 1, \dots, \quad (4)$$

где $x_0 = x \geq 0$ задает начальное состояние, c – планируемые дивиденды организации, $\{\xi_t\}$ – независимые одинаково распределенные реализации некоторой случайной величины с функцией распределения $F(\cdot)$. Функционирование организации оценивается по двум критериям, суммарным дивидендам $D_t(x, c)$, собранным за время t , и вероятности неразорения $\varphi_t(x, c)$ за время t . Последняя величина удовлетворяет системе соотношений

$$\varphi_t(x, c) = \int_{y: f(x, y) \geq c} \varphi_{t-1}(f(x, y) - c, c) dF(y), \quad \varphi_0(x, c) = 1, \quad t = 1, 2, \dots$$

Очевидно, функции $\varphi_t(x, c)$ не убывают по x , не возрастают по c , t и $\varphi_t(+\infty, c) = 1$, $\varphi_t(x, +\infty) = 0$. Обозначим ε верхнюю границу для вероятности разорения, тогда $\delta = 1 - \varepsilon$ будет нижняя граница вероятности неразорения. Поэтому:

для любого ε , $0 < \varepsilon < 1$ и $c \geq 0$ существует минимальное решение $x_t(\varepsilon, c)$ неравенства $\varphi_t(x, c) \geq 1 - \varepsilon$;

для любого $\varepsilon \geq 1 - \varphi_t(x, 0)$ существует максимальное решение $c_t(\varepsilon, x)$ неравенства $\varphi_t(x, c) \geq 1 - \varepsilon$.

Суммарные собранные дивиденды $D_t(x, c)$ являются случайной величиной, поскольку постоянные дивиденды c могут собираться не до конечного момента времени t , а до случайного момента разорения $\tau \leq t$. Очевидно, $D_t(x, c) \leq ct$. Однако, если вероятность неразорения за время t больше или равна $(1 - \varepsilon)$, то среднее $ED_t(x, c)$ по траекториям значение $D_t(x, c)$ не меньше $(1 - \varepsilon)ct$, и, таким образом, $(1 - \varepsilon)ct \leq ED_t(x, c) \leq ct$. Символ E в выражении $ED_t(x, c)$ обозначает математическое ожидание по всем возможным траекториям процесса (4). Если ε близко к нулю, то максимизируя дивиденды c при ограничении $\varphi_t(x, c) \geq 1 - \varepsilon$, мы косвенно (приближенно) максимизируем и среднее значение собранных дивидендов $ED_t(x, c)$. В силу монотонности $\varphi_t(x, c)$ при $\varepsilon \geq 1 - \varphi_t(x, 0)$ имеет место $c_t(\varepsilon, x) = \arg \max \{c \geq 0 : \varphi_t(x, c) \geq 1 - \varepsilon\}$.

Более детальная авторегрессионная модель эволюции капитала страховой компании представлена в [12].

Позиционное управление финансовой организацией. Очевидно, дивидендная стратегия

$$c_{\tau}^1(\varepsilon, x) = \begin{cases} 0, & \varphi_{\tau}(x_0, 0) < 1 - \varepsilon, \\ c_{\tau}(\varepsilon, x_0), & \varphi_{\tau}(x_0, 0) \geq 1 - \varepsilon, \end{cases} \quad 0 \leq \tau \leq t,$$

является приближенно оптимальной *стационарной* стратегией управления дивидендами компании при ограничении на вероятность разорения малой величиной ε и при начальном капитале x_0 . Эта стратегия не снимает дивиденды, если начальный капитал x_0 мал, т. е. $\varphi_{\tau}(x_0, 0) < 1 - \varepsilon$. Если $\varphi_{\tau}(x_0, 0) \geq 1 - \varepsilon$, то стратегия снимает максимально возможные постоянные дивиденды.

Поскольку текущий капитал компании постоянно меняется, то естественно использовать переменную (*квазистационарную*) дивидендную стратегию, а именно, в момент $\tau < t$ применять управление

$$c_{\tau}^2(\varepsilon, x_{\tau}) = \begin{cases} 0, & \varphi_{\tau'}(x_{\tau}, 0) < 1 - \varepsilon, \\ c_{\tau'}(\varepsilon, x_{\tau}), & \varphi_{\tau'}(x_{\tau}, 0) \geq 1 - \varepsilon, \end{cases} \quad 0 \leq \tau \leq t. \quad (5)$$

где τ' – фиксированный временной параметр, $0 < \tau' \leq t$. Если текущий капитал x_{τ} не достаточен, чтобы, снимая постоянные дивиденды, гарантировать вероятность неразорения $(1 - \varepsilon)$ за следующие τ' периодов времени, то текущие дивиденды не снимаются. Если текущий капитал достаточно большой, т. е. $\varphi_{\tau'}(x_{\tau}, 0) \geq 1 - \varepsilon$, то снимаются такие текущие дивиденды $c_{\tau'}(\varepsilon, x_{\tau})$, что если бы они снимались в течение времени τ' , то вероятность неразорения на интервале $[\tau, \tau + \tau']$ была бы больше или равна $(1 - \varepsilon)$. При такой стратегии есть надежда собрать большие дивиденды, чем при стационарной и удержать вероятность разорения в пределах ε (при τ' порядка t).

Рассмотрим также простую *процентную* стратегию,

$$c_{\tau}^3(x_{\tau}) = \alpha x_{\tau}, \quad 0 < \alpha \leq 1. \quad (6)$$

Описанные стратегии постоянно снимают дивиденды с больших текущих капиталов и обеспечивают выживаемость компании с высокой вероятностью.

Другие подходы к оптимальному управлению дивидендной политикой компании, основаны на понятии дивидендного барьера [1], представляющий собой функцию $b(x)$ от капитала x . Соответствующая дивидендная стратегия имеет вид $c(x) = x - b(x)$ при $x > b(x)$ и $c(x) = 0$ в противном случае.

В работах [1, 13–15] для сложного пуассоновского процесса риска с дивидендным барьером получены интегро-дифференциальные уравнения для вероятности разорения как функции начального капитала и начального значения барьера $b(0)$.

На рис. 1 – 4 показано сравнение описанных стратегий (5) и (6) по показателям средних собранных дивидендов $ED_t(x)$ и вероятности разорения $\phi_t(x)$ за время t , рассматриваемых как функции начального капитала x , для процесса

$$x_{\tau+1} = x_{\tau} + \beta\sqrt{x_{\tau}} + \xi_{\tau} - c_{\tau}(\varepsilon, x_{\tau}), \quad 0 \leq \tau \leq t,$$

где ξ_{τ} – нормально распределенная величина со средним $a = -2$ и стандартным отклонением $b = 10$, $\beta = 1.2$. Количество испытаний в МСИ равно 10000.

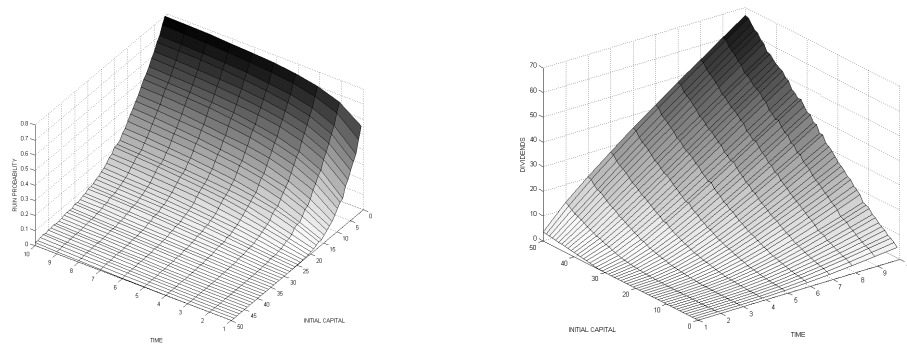


РИС. 1. Вероятность разорения (слева) и собираемые дивиденды (справа) как функции начального капитала и времени для переменной дивидендной стратегии (5) с параметрами $\varepsilon = 0.05$, $t' = 10$

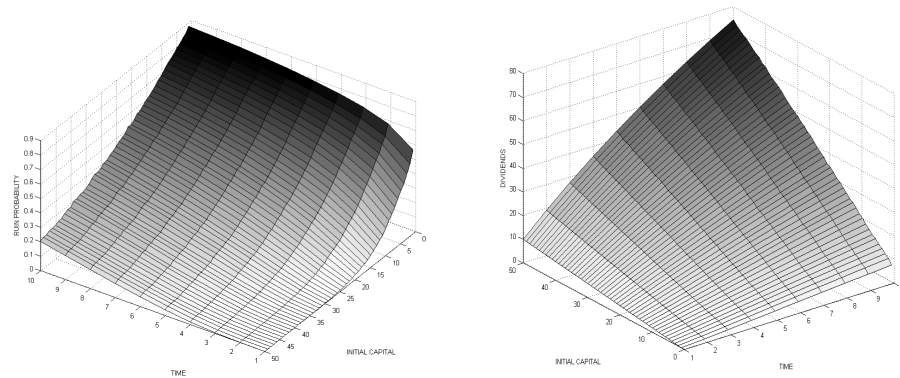


РИС. 2. Вероятность разорения (слева) и собираемые дивиденды (справа) как функции начального капитала и времени для простой процентной стратегии (6) при дивидендной ставке $\alpha = 0.2$

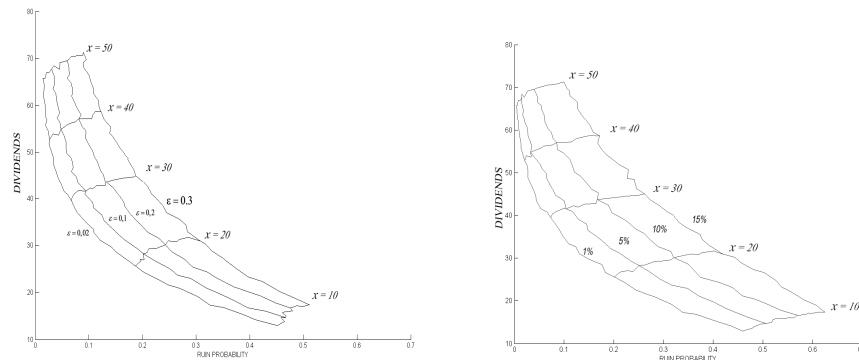


РИС. 3. Зависимость собираемых дивидендов и вероятности разорения для переменной дивидендной стратегии (5) (слева) и процентной стратегии (6) (справа) при различных значениях начального капитала $x \in \{10, \dots, 50\}$ и параметров $\epsilon \in \{0.02, 0.1, 0.2, 0.3\}$ и $100\% \alpha \in \{1\%, 5\%, 10\%, 15\%\}$; $t' = t = 10$

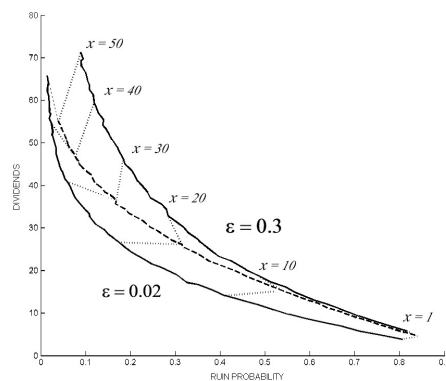


РИС. 4. Сравнение процентной ($\alpha = 0.1$, штриховая линия) и переменных дивидендных стратегий ($\epsilon = 0.02, 0.3$, сплошные линии) при различных значениях начального капитала $x \in \{1, \dots, 50\}$; $t' = 10$. Точечные отрезки связывают позиции, соответствующие одному и тому же значению начального капитала

Заключение. Рассматривается проблема оптимального управления дивидендной политикой страховой компании или другого финансового института. Уравнение движения капитала компании имеет вид модели нелинейной авторегрессии с вычитанием дивидендов. В случае позиционного управления дивиденды являются функцией текущего капитала. Детально рассмотрены две стратегии, в первой текущие дивиденды максимизируются с учетом ограничения на вероятность последующего разорения (за некоторое конечное время), а во вто-

рой – (процентной) стратегии – дивиденды равны определенному проценту (доле) от текущего капитала. Стратегии сравниваются по критериям доходности и риска, а именно, по показателю средних собранных дивидендов и вероятности разорения на конечном интервале времени t , которые оценивались методом статистического моделирования (Монте-Карло). Для вероятности разорения также выведены рекуррентные интегральные соотношения, которые можно применять для более точной оценки малых вероятностей разорения. Для каждой стратегии вычислены совокупные дивиденды и вероятность разорения как функции начального капитала и времени. Затем результаты применения каждой стратегии отображались точками в плоскости «дивидендный доход – вероятность разорения». Показано что стратегия, максимизирующая текущие дивиденды при ограничении на вероятность последующего разорения (параметр надежности бизнеса). Выбор конкретного значения параметра надежности в зависимости от начального капитала может быть сделан с помощью диаграмм.

Б.В. Норкин

ПРО ЙМОВІРНІСТЬ РОЗОРЕННЯ КЕРОВАНОГО ПРОЦЕСУ АВТОРЕГРЕСІЇ

Досліджується проблема керування дивідендною політикою страхової компанії (або іншого фінансового інституту) на базі показників прибутковості та ризику (розорення). Еволюція капіталу компанії моделюється процесом авторегресії з відбором дивідендів. Проводиться детальне числове порівняння двох дивідендних стратегій: проценту від поточного капіталу та стратегії максимізації поточних дивідендів за обмежень на ймовірність подальшого банкрутства.

B.V. Norkin

RUIN PROBABILITY OF A CONTROLLED AUTOREGRESSION PROCESS

An insurance company (or other financial institution) dividend policy management, based on expected return and risk of bankruptcy, is studied. Evolution of a capital is modeled by an autoregressive process with dividend subtraction. We consider a positional dividend strategy as a function of a current capital. Strategies are evaluated by two criteria: average aggregated dividends and a ruin probability on finite time interval. The values of the criteria are evaluated by Monte-Carlo method. To get more exact values of the ruin probability as a function of the initial capital and discrete time moments, it is calculated using recurrent integral relations. The article gives a detailed numerical comparison of two dividend strategies: a percent of the current capital and a risk (ruin probability) constrained strategy maximizing current dividends.

1. Gerber H.U. An introduction to mathematical risk theory. – Philadelphia: S. S. Huebner Foundation for Insurance Education, 1979. – 164 p.
2. Beard R.E., Pentikäinen T., Pesonen E. Risk theory. The stochastic basis of insurance. 3-rd edition. – London, New York: Chapman and Hall, 1984. – 408 p.

3. *Леоненко М.М., Мішура Ю.С., Пархоменко Я.М., Ядренко М.Й.* Теоретико-ймовірнісні та статистичні методи в економетриці та фінансовій математиці. – К.: Інформтехніка, 1995. – 380 с.
4. *Бауэрс Н., Гербер Х., Джонс Д., Несбитт С., Хикман Дж.* Актуарная математика. – М.: Янус-К, 2001. – 656 с.
5. *Бокс Дж., Дженкинз Г.* Анализ временных рядов, прогноз и управление. Ч. 1. – М.: Мир, 1974. – 403 с.
6. *Норкин Б.В.* Метод последовательных приближений для решения интегральных уравнений теории процессов риска // Кибернетика и системный анализ. – 2004. – № 4. – С. 61–73.
7. *Норкин Б.В.* О решении основного интегрального уравнения актуарной математики методом последовательных приближений // Украинский математический журнал. – 2007. – № 12, **59**. – С. 112–127.
8. *Норкин Б.В.* О вычислении вероятности банкротства непуассоновского процесса риска методом последовательных приближений // Проблемы управления и информатики – 2005. – № 2. – С. 133–144.
9. *Норкин Б.В.* Применение метода последовательных приближений для нахождения вероятности неразорения страховой компании при наличии случайных премий // Кибернетика и системный анализ. – 2006. – № 1. – С. 112–127.
10. *Норкин Б.В.* Стохастический метод последовательных приближений для оценки риска неплатежеспособности страховой компании // Кибернетика и системный анализ. – 2008. – № 6. – С. 116–130.
11. *Gerber H.* On the Probability of Ruin in an Autoregressive Model // Bull. of the Swiss Association of Actuaries. – 1981. – P. 213–219.
12. *Silvestrov D., Malyarenko A., Silvestrova E.* Stochastic modeling of insurance business with dynamical control of investments // Theory Stoch. Process. – 2003. – **9(25)**, N 1–2. – P. 184–205.
13. *Albrecher H., Kainhofer R.* Risk theory with a non-linear dividend barrier // Computing. – 2002. – **68**, N 4. – P. 289–311.
14. *Albrecher H., Kainhofer R., Tichy R.F.* Simulation methods in ruin models with non-linear dividend barriers // Math. Comput. Simulation. – 2003. – **62**. – P. 277–287.
15. *Gerber H.U., Shiu E.S.W.* On Optimal Dividend Strategies in the Compound Poisson Model // N. Am. Actuar. J. – 2006. – **10(2)**. – P. 76–93.

Получено 01.09.2010

Об авторе:

Норкин Богдан Владимирович,

кандидат физико-математических наук, научный сотрудник
Института кибернетики имени В.М. Глушкова НАН Украины.
norkin@i.com.ua