КОМПЬЮТЕРНАЯ МАТЕМАТИКА

УДК 517.95 : 519.86

В.А. СТОЯН, О.В. СОРОЦКАЯ

ОБ ИДЕНТИФИКАЦИИ ПАРАМЕТРОВ МАТЕМАТИЧЕСКИХ МОДЕЛЕЙ ЛИНЕЙНЫХ ДИНАМИЧЕСКИХ СИСТЕМ

Рассматривается линейная динамическая система с неопределенной или частично определенной дифференциальной моделью. По дискретным и дискретно-непрерывным наблюдениям за входом-выходом системы идентифицируется интегральная модель системы и восстанавливаются коэффициенты (все или часть) ее дифференциального эквивалента. Устанавливается точность и выписываются условия однозначности решения задачи.

Введение. Известные математические подходы к исследованию динамики пространственно сосредоточенных систем предполагают наличие их дифференциальных моделей. Классические подходы к построению таких моделей основываются на изучении и формализации физико-технологических свойств описываемых ими процессов и явлений, что становится малоперспективным по мере усложнения природы последних. Далее будет предложена методика построения линейных динамических моделей пространственно сосредоточенных систем, лишенная необходимости изучения их сущности, предполагающая, однако, наличие серии наблюдения за состоянием таких систем и внешнединамических факторов, которые его вызывают.

В основу исследования будут положены псевдоинверсные подходы [1, 2] к решению задачи идентификации линейных алгебраических [3] преобразований и их обобщения на линейно интегрирующие [4, 5] и функционально распределяющие [5, 6] системы.

Постановка задачи. Рассмотрим пространственно сосредоточенный динамический процесс, функция $y(t)$ состояния которого зависима от функции $u(t)$ внешнединамических воздействий на него.

В общем случае зависимость эта вкладывается в дифференциальную модель вида

$$L(\partial_t)\, y(t) = u(t)\,, \quad (1)$$

где ∂_t – оператор дифференцирования, a_i $(i=\overline{0,n})$ – параметры модели, а $L(\partial_t)= =a_0+a_1\partial_t+\ldots+a_n\partial_t^n$.

Будем исходить из того, что эквивалентным представлением (1) является интегральное соотношение [5]

$$y(t)=\int_{-\infty}^{\infty}G(t-t')u(t')dt\,, \tag{2}$$

где

$$G(t-t')=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{1}{L(i\lambda)}e^{i\lambda(t-t')}d\lambda \tag{3}$$

– гриновская функция рассматриваемого процесса, которая при известном $L(\partial_t)$ может быть построена методами функции комплексной переменной [7].

Если модель вида (2) оказалась полезной при математическом моделировании [5] решений прямых и обратных задач динамики рассматриваемых процессов, то математическая модель вида (1), несмотря на проблемы ее построения, является незаменимой при точном решении этих задач классическими методами дифференциальных уравнений и теории уравнения.

Изложим поэтому идентификационные подходы к построению математической модели (2), а исходя из нее – и дифференциальной модели вида (1). Рассмотрим особенности решения данной проблемы при известной, частично известной и неизвестной структуре оператора $L(\partial_t)$.

Учитывая трудности и проблемы, которые могут возникнуть при решении задачи идентификации функции $G(t-t')$, остановимся на вопросах построения матрицы

$$G_0=\left[G(t_l-t_m)\right]_{l,m=1}^{l=L;m=M}$$

значений и вектор-функций

$$G_1(t')=col(G(t_l-t'),\, l=\overline{1,L}),$$

$$G_2(t)=str(G(t-t'_m),\, m=\overline{1,M})$$

сечений этой функции. При этом будем исходить из результатов, изложенных в [5].

Задача идентификации линейной интегральной математической модели. Рассмотрим задачи идентификации сетки G_0 и набора сечений $G_1(t')$, $G_2(t)$ ядра $G(t-t')$ модели (2), которая для этих случаев представится соотношениями:

$$G_0\bar{u}=\bar{y}\,, \tag{4}$$

$$\int_{-\infty}^{\infty}G_1(t')u(t')dt'=\bar{y}\,, \tag{5}$$

$$G_2(t)\bar{u}=y(t)\,, \tag{6}$$

в которых

$$\overline{u} = col(u(t'_m),\, m = \overline{1, M}),$$

$$\overline{y} = col(u(t_l),\, l = \overline{1, L}).$$

Задачи решим в предположении, что наблюдению доступны матрицы

$$U = (\overline{u}^{(1)}, \ldots, \overline{u}^{(n)}),$$

$$Y = (\overline{y}^{(1)}, \ldots, \overline{y}^{(n)})$$

и строки-функции

$$\overline{U}(t) = \left(u^{(1)}(t), \ldots, u^{(n)}(t)\right),$$

$$\overline{Y}(t) = \left(y^{(1)}(t), \ldots, y^{(n)}(t)\right)$$

значений $\overline{u}^{(i)}$, $\overline{y}^{(i)}$, $\overline{u}^{(i)}(t)$, $\overline{y}^{(i)}(t)$ $(i = \overline{1, n})$ векторов $\overline{u}$, $\overline{y}$ и функций $u(t)$, $y(t)$ соответственно.

В этом случае проблема построения матрицы G_0 и вектор-функций $G_1(t')$, $G_2(t)$ сведется к решению следующих уравнений:

$$G_0 U = Y, \tag{7}$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} G_1(t')\overline{U}(t')dt' = Y, \tag{8}$$

$$G_2(t)U = \overline{Y}(t). \tag{9}$$

Полагая

$$G_0 = \begin{pmatrix} g_{0(1)}^T \\ \ldots \\ g_{0(L)}^T \end{pmatrix}, \qquad Y = \begin{pmatrix} y_{(1)}^T \\ \ldots \\ y_{(L)}^T \end{pmatrix},$$

систему алгебраических уравнений (7) приведем к виду

$$U^T g_{0(i)} = y_{(i)}, \quad (i = \overline{1, L}). \tag{10}$$

Решением (10) таким, чтобы

$$g_{0(i)} = ang \min_{g_{(i)} \in R^M} \left\| U^T g_{(i)} - y_{(i)} \right\|^2,$$

будет вектор [5]

$$g_{0(i)} = \left[U^T\right]^+ y_{(i)} + \nu_i - \left[U^T\right]^+ U^T \nu_i \tag{11}$$

при произвольном M -мерном векторе ν_i и $\left[U^T\right]^+ = U\left[U^T U\right]^{-1} = \left[UU^T\right]^{-1} U$.

Заметим, что решение (11) будет однозначным $(\nu_i \equiv 0)$, если $\det(UU^T) > 0$, а точность его определяется величиной

$$\varepsilon_i^2 = \min_{g_{0(i)}} \left\| U^T g_{0(i)} - y_{(i)} \right\|^2 = y_{(i)}^T y_{(i)} - y_{(i)}^T U^T \left[U^T\right]^+ y_{(i)}.$$

С учетом (11) находим и

$$G_0 = YU^+ + V - VUU^+, \tag{12}$$

или, что эквивалентно,

$$G(t_l - t_m) = y_{(l)}^T U_{lm}^+ + \nu_{lm} - \nu_{(l)}^T UU^+ e_m \tag{13}$$

(здесь e_m – m-ый M-мерный орт) при произвольной матрице $V = [\nu_{lm}]_{l,m=1}^{l=L,\, m=M} = col(\nu_{(l)}^T,\, l = \overline{1,L})$, равенство нулю которой, как и выше, определяется величиной $\det(UU^T)$.

Дискретизируя точками t'_m $(m = \overline{1,M})$ и t_l $(l = \overline{1,L})$ с шагом Δt_M и Δt_L соответственно интегральное и функциональное уравнения (5), (6), а следовательно и (8), (9), аналогично (12) находим значения

$$G_1(t'_m) = YP^+ \overline{U}^T(t'_m) + \overline{v}_1(t'_m) - V_U P^+ \overline{U}^T(t'_m) \ \ (m = \overline{1,M}), \tag{14}$$

$$G_2(t_l) = \overline{Y}(t_l) P_2^+ U^T + \overline{v}_2(t_l) - \overline{v}_2(t_l) UP_2^+ U^T \ \ (l = \overline{1,L}) \tag{15}$$

векторных функций $G_1(t')$ и $G_2(t)$ в точках их дискретизации. Здесь при $\Delta_m = t'_{m+1} - t'_m$

$$\overline{U}^T(t'_m) = str(u^{(j)}(t'_m),\ j = \overline{1,n}),$$

$$V_U = \sum_{m=1}^{M} \nu_1(t'_m) \overline{U}(t'_m) \Delta t_M,$$

$$P = \sum_{m=1}^{M} \overline{U}^T(t'_m) \overline{U}(t'_m) \Delta t_M,$$

$$P_2 = U^T U,$$

а $\overline{\nu}_1(t'_m)$, $\overline{\nu}_2(t_l)$ – L и M-мерные столбец и строка значений произвольных интегрируемых при $-\infty < t < +\infty$ функций $\nu_{1l}(t)$ $(l = \overline{1,L})$ и $\nu_{2m}(t)$ $(m = \overline{1,M})$ соответственно.

Откуда при $M \to \infty, L \to \infty$ находим

$$G(t_l - t) = \left(y^{(1)}(t_l), \ldots, y^{(n)}(t_l)\right) P^+ \overline{U}^T(t) + \nu_{1l}(t) - \nu_{1u}^T P^+ \overline{U}^T(t), \tag{16}$$

$$G(t - t'_m) = \left(y^{(1)}(t), \ldots, y^{(n)}(t)\right) P_2^+ \overline{U}^T(t'_m) + \nu_{2m}(t) - \nu_2(t) UP_2^+ \overline{U}^T(t'_m) \tag{17}$$

– L и M сечений функции $G(t - t')$ по переменным t и t' соответственно.

Здесь

$$P=\int_{-\infty}^{+\infty}\overline{U}^T(t)U(t)dt=\left[\int_{-\infty}^{+\infty}u^{(i)}(t)u^{(j)}(t)dt\right]_{i,j=1}^{i,j=n},$$

$$\nu_{lu}=col\left(\int_{-\infty}^{+\infty}\nu_{1l}(t)u^{(j)}(t)dt,\ j=\overline{1,n}\right),$$

а остальные совпадают с принятым выше.

Задача идентификаций структуры и параметров линейных дифференциальных математических моделей. Рассмотрим задачу восстановления оператора $L(\partial_t)$ математической модели (1) в предположении, что функция $G(t-t')$ интегрального представления (2) этой модели идентифицирована согласно (13), (16), (17). Для этого будем исходить из того, что представленная соотношением (2)

$$G(t-t')=\frac{1}{2\pi i}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{1}{L(p)}e^{p(t-t')}dp, \tag{18}$$

где, как и выше, i – мнимая единица.

Из соотношения (18) в предположении, что

$$G(t-t')=\sum_{k=1}^{K}c_k\left(t-t'\right)^k,$$

находим [8]

$$L(p)=\frac{p^{K+1}}{\sum_{k=1}^{K}k!c_kp^{K-k}},$$

а следовательно и коэффициенты $a_0,...,a_n$ оператора $L(\partial_t)$ – они будут совпадать с коэффициентами разложения функции $L(p)$ в ряд по степеням аргумента p.

Второй путь определения вектора $a=(a_0,...,a_n)$ коэффициентов оператора $L(\partial_t)$ – это псевдообращение соотношения (18) дискретизированного точками $t_l\ (l=\overline{1,L})$ и $t'_m\ \ (m=\overline{1,M})$ так, чтобы

$$\int_{-i\infty}^{+i\infty}E(p)\Lambda(p)dp=\overline{G} \tag{19}$$

при

$$\overline{G}=col\left(\left(G(t_l-t'_m),m=\overline{1,M}\right),l=\overline{1,L}\right),$$

$$E(p)=col\left(\left(\left(\frac{1}{2\pi i}e^{p(t_l-t'_m)}\right),m=\overline{1,M}\right),l=\overline{1,L}\right)$$

и

$$\Lambda(p) = 1 / L(p). \tag{20}$$

Решением $\Lambda(p)$ уравнения (19) будет таким, что

$$\Lambda(p) = \arg \min_{\lambda(p)\in\Omega_\lambda} \|\lambda(p)\|^2 \tag{21}$$

при

$$\Omega_\lambda = \left\{ \lambda(p): \left\| \int_{-i\infty}^{+i\infty} E(p)\lambda(p)dp - \overline{G} \right\|^2 \to \min_{\lambda(p)} \right\}$$

будет функция

$$\Lambda(p) = E^T(p)P^+\overline{G}, \tag{22}$$

в которой знаком "+" обозначена операция псевдообращения матрицы

$$P = \int_{-i\infty}^{+i\infty} E(p)E^T(p)\,dp.$$

Множество Ω_λ при этом определится соотношением

$$\Omega_\lambda = \left\{ \Lambda(p): \ \Lambda(p) = E^T(p)P^+\overline{G} + \nu(p) - E^T(p)P^+E_\nu \right\}$$

при произвольной интегрируемой на мнимой оси функции $\nu(p)$ и

$$E_\nu = \int_{-i\infty}^{+i\infty} E(p)\nu(p)\,dp.$$

Заметим, что $\nu(p) \equiv 0$, если

$$\lim_{N\to\infty} [E^T(p_k)E(p_l)]_{k,l=1}^{k=N,l=N} > 0,$$

а

$$\varepsilon^2 = \min_{\Lambda(p)\in\Omega_\lambda} = \left\| \int_{-i\infty}^{+i\infty} E(p)\Lambda(p)\,dp - \overline{G} \right\|^2 = \overline{G}^T\overline{G} - \overline{G}^T PP^+\overline{G}.$$

Ограничиваясь определенным согласно (21) выражением (22) для решения уравнения (19) из (20) находим

$$L(p) = 1 / \Lambda(p). \tag{23}$$

Разложение (23) в ряд по степеням p (до степени n включительно) позволит, как и выше, найти коэффициенты $a_0,...,a_n$ оператора $L(\partial_t)$.

Предложенный подход к определению коэффициентов $a_0,...,a_n$ может быть успешно применен к идентификации оператора $L(\partial_t)$ и в том случае, когда часть из этих коэффициентов известна.

Обозначая

$$\alpha_0,...,\alpha_\nu = \alpha^T$$

неизвестные (при $\partial_t^{k_0},...,\partial_t^{k_\nu}$), а

$$\alpha_{\nu+1},...,\alpha_n = \beta^T$$

известные (при $\partial_t^{k_{\nu+1}},...,\partial_t^n$) коэффициенты вектора $a = (a_0,...,a_n)^T$, оператор $L(\partial_t)$ представим суммой

$$L(\partial_t) = L_\alpha(\partial_t) + L_\beta(\partial_t),$$

в которой

$$L_\alpha(\partial_t) = \sum_{i=0}^{\nu} \alpha_i \partial_t^{k_i},$$

$$L_\beta(\partial_t) = \sum_{i=\nu+1}^{n} \alpha_i \partial_t^{k_i}.$$

А это значит, что вместо (23) определяющим для нахождения элементов вектора α будет уравнение

$$L_\alpha(p) = 1/\Lambda(p) - L_\beta(p),$$

или, что эквивалентно,

$$A(p)\alpha = f(p), \tag{24}$$

где

$$A(p) = (p^{k_0},..., p^{k_\nu}),$$

$$f(p) = 1/\Lambda(p) - L_\beta(p).$$

Решением α таким, что

$$\alpha = \arg\min_{\alpha\in\Omega_\alpha} \|\alpha\|^2$$

при

$$\Omega_\alpha = \left\{ \alpha : \int_{-i\infty}^{+i\infty} \left(A(p)\alpha - f(p)\right)^2 dp \to \min_\alpha \right\},$$

будет вектор

$$\alpha = P^+ A_f,$$

в котором

$$P = \int_{-i\infty}^{+i\infty} A^T(p) A(p)\,dp,$$

$$A_f = \int_{-i\infty}^{+i\infty} A^T(p) f(p)\,dp.$$

При этом

$$\Omega_\alpha = \left\{\alpha :\ \alpha = P^+ A_f + \nu - P^+ P\nu,\ \forall \nu \in R^{\nu+1}\right\},$$

$$\min_{\alpha\in\Omega_\alpha} \int_{-i\infty}^{+i\infty} \left(A(p)\alpha - f(p)\right)^2 dp = 0,$$

а $\nu \equiv 0$, если $\det P > 0$.

Заключение. Таким образом решена задача построения математических моделей линейных динамических систем по наблюдениям за функцией состояния системы и функцией внешнединамических возмущающих факторов, которые это состояние вызывают. На базе дискретных и дискретно-непрерывных наблюдений за этими характеристиками строятся алгебраические интегральные и функциональные математические модели системы, которые являются частным случаем интегрального эквивалента линейной дифференциальной модели. Решены задачи идентификации структуры и параметров таких моделей. На всех этапах исследования рассматриваемых систем исследованы вопросы точности и однозначности получаемых математических моделей.

В.А. Стоян, О.В. Сороцька

ПРО ІДЕНТИФІКАЦІЮ ПАРАМЕТРІВ МАТЕМАТИЧНИХ МОДЕЛЕЙ
ЛІНІЙНИХ ДИНАМІЧНИХ СИСТЕМ

Розглядається лінійна динамічна система з невизначеною або частково визначеною диференціальною моделлю. За дискретними і дискретно-неперервними спостереженнями за входом-виходом системи ідентифікується інтегральна модель системи та відновлюються коефіцієнти (всі або частина) її диференціального еквівалента. Встановлюється точність і виписуються умови однозначності розв’язання задачі.

V.A. Stoyan, O.V. Sorotska

ON IDENTIFICATION OF PARAMETERS OF MATHEMATICAL MODELS
OF LINEAR DYNAMIC SYSTEMS

The linear dynamic system with undefined or partially defined differential model is considered. By discrete and discrete-uninterrupted observations of the input-output of a system, the integrated model of it is identified and the coefficients (all or the part of them) of its differential equivalent are restored. The accuracy and the uniqueness conditions of the problem solution are established.

1. *Гантмахер А.Ф.* Теория матриц. – М.: Наука, 1967. – 287 с.
2. *Альберт А.* Регрессия, псевдоинверсия, рекуррентное оценивание. – М.: Наука, 1977. – 305 с.
3. *Кириченко Н.Ф., Лепеха Н.П.* Возмущение псевдообратных и проекционных матриц и их применение к идентификации линейных и нелинейных зависимостей // Проблемы управления и информатики. – 2001. – № 1. – С. 6–22.
4. *Стоян В.А.* О задаче идентификации матричноинтегрирующих систем // Кибернетика и системный анализ. – 2003. – № 5. – С. 152–164.
5. *Скопецький В.В., Стоян В.А., Зваридчук В.Б.* Математичне моделювання динаміки розподілених просторово-часових процесів. – К.: Вид-во «Сталь», 2008. – 316 с.
6. *Скопецький В.В., Стоян В.А.* О задаче идентификации матричнофункциональных систем // Кибернетика и системный анализ. – 2005. – № 5. – С. 99–110.
7. *Стоян В.А., Когут О.В.* Про інтегральне представлення систем лінійних диференціальних рівнянь динаміки розподілених просторово-часових процесів // Вісник Київського університету (серія «Кібернетика»). – 2010. – № 1. – С. 12–15.
8. *Диткин В.А., Прудников А.П.* Интегральные преобразования и операционное исчисление. – М.: Физматгиз, 1961. – 524 с.

Получено 19.01.2011

Об авторах:

Стоян Владимир Антонович,
доктор физико-математических наук,
профессор кафедры моделирования сложных систем факультета кибернетики
Киевского национального университета имени Тараса Шевченко,
e-mail: v_a_stoyan@ukr.net

Сороцкая Оксана Васильевна,
аспирантка факультета кибернетики
Киевского национального университета имени Тараса Шевченко.
e-mail: oksana.sorotska@mail.ru