Компьютерная Математика

УДК 66-997

Т.О. ЛАЗЕБНА, О.В. СИТНІКОВ,
І.С. БОБОНИЧ, О.П. САВЧЕНКО

МАТЕМАТИЧНЕ МОДЕЛЮВАННЯ СКЛАДНИХ ТЕПЛОВИХ ОБ`ЄКТІВ

Розглянуті питання створення математичної моделі для скловарної печі, як складного теплового об`єкта, визначені граничні умови для неї. Всі дані, що використані при розрахунку та побудові температурних полів, були отримані емпіричним шляхом. У подальшому така модель може бути використана для виведення передатної функції об`єкта керування, а також при розробці системи керування технологічним процесом.

Вступ. Питання створення математичних моделей досить широко стоїть у промисловості. Правильно побудована модель з урахуванням усіх вхідних та вихідних параметрів дозволяє значно спростити задачу створення системи керування, що в свою чергу є однією з основних задач побудови систем автоматичного керування. У даній статті, як тепловий об'єкт буде розглядатися скловарна піч ванного типу.

Слід зазначити, що процес виготовлення скломаси досить енергомісткий і потребує великих затрат пального. Як пальне в скловарній промисловості використовується природний газ, ціни на який досить високі та потребують економічних затрат. Слід ретельно підходити до процесу моделювання тому, що навіть 0,1 % економії для виробництва буде суттєвим прибутком.

Постановка задачі. В основу побудови математичної моделі покладені взаємозв'язані рівняння внутрішнього та зовнішнього теплообміну в робочому просторі ванни печі. Температурні режими скломаси будуть відображати шукану математичну модель. Основною задачею моделювання стоїть вирішення системи рівнянь власного випромінювання (за законом Стефана – Больцмана [1]), горіння, теплообміну в робочому просторі та внутрішнього теплобміну.

Також необхідно визначити граничні умови процесу. Система алгебраїчних рівнянь отримується з рівнянь балансу результуючих та ефективних поверхонь (кладка печі,

поверхня дзеркала скломаси) та середовищ	(газ, скломаса).

З іншого боку ванна печі являє собою об’єкт з розподіленими параметрами, що описується диференціальним рівнянням теплопровідності Фур’є, з граничними умовами 3-го роду на внутрішній поверхні ванни при контакті «газ-кладка», ідеального теплового потоку на внутрішній поверхні ванни при контакті «скломаса-кладка» (фактично граничними умовами 4-го роду [2]) та 2-го роду на зовнішній. Граничні умови на зовні обумовлені відсутністю обміну тепла з навколишнім середовищем, тобто розглядається умова ідеальної теплоізоляції.

Граничні умови ідеального теплового потоку на внутрішній поверхні ванни при контакті «скломаса-кладка» будуть мати вигляд

$$\begin{cases} T_{\text{ск}}\big|_{X=0} = T_{\text{кл}}\big|_{X=0}, \\ -\lambda_{\text{ск}} \dfrac{\partial T_{\text{ск}}}{\partial x}\bigg|_{X=0} = -\lambda_{\text{кл}} \dfrac{\partial T_{\text{кл}}}{\partial x}\bigg|_{X=0} \end{cases}.$$

Граничні умови 3-го роду на внутрішній поверхні ванни при контакті «газ-кладка» будуть

$$-\lambda_{\text{кл}} \frac{\partial T_{\text{кл}}}{\partial x}\bigg|_{X=0} = -\alpha_0 \left(T_{\text{г}} - T_{\text{кл}}\big|_{X=0} \right).$$

Граничні умови 2-го роду на зовнішній поверхні будуть

$$\frac{\partial T_{\text{кл}}}{\partial x}\bigg|_{X=\delta} = 0.$$

У наведених граничних умовах $T_{\text{ск}}$, $T_{\text{кл}}$, $T_{\text{г}}$ – температура скломаси, поверхні кладки та газу відповідно. $\lambda_{\text{ск}}$, $\lambda_{\text{кл}}$ – коефіцієнт теплопровідності скломаси та кладки; α_0 – коефіцієнт тепловіддачі (теплообміну) від теплоносія до стінки. Зрозуміло, що під теплоносієм розглядається газ.

Рівняння теплопровідності Фур’є має вигляд

$$\frac{\partial\left(\lambda \dfrac{\partial T}{\partial x}\right)}{\partial x} + \frac{\partial\left(\lambda \dfrac{\partial T}{\partial y}\right)}{\partial y} + \frac{\partial\left(\lambda \dfrac{\partial T}{\partial z}\right)}{\partial z} = C\rho V \frac{\partial T}{\partial t}, \tag{1}$$

де x, y, z – координати уздовж осей, направлених відповідно по глибині шару шихти, по ширині печі і в напрямку подовжньої осі.

Проте вирішення тривимірного рівняння (1) пов'язане з великими трудностями. Водночас без збитку для точності розрахунку завдання можна спростити. Експериментальні дослідження показали, що сальдо-потоки на скломасу з боку полум'яного простору трохи змінюються уздовж ширини печі. У першому наближенні можна вважати, що зміна сальдо-потоків по ширині печі не перевищує 10 %, тобто теплоперенос у поперечному перетині печі малий. Це означає, що в правій частині рівняння другий член на порядок менше, ніж сума решти членів, і ним можна нехтувати.

Якщо рухома координата, зв'язана з рушійною у напрямку осі z шихтою, z – нерухома координата, V – швидкість руху шихти, тоді можна записати

$$z = z + Vt. \tag{2}$$

Враховуючи вищезазначене рівняння теплопровідності в рухомих координатах можна записати у вигляді

$$\frac{\partial\left(\lambda\frac{\partial T}{\partial x}\right)}{\partial x} + \frac{\partial\left(\lambda\frac{\partial T}{\partial z'}\right)}{\partial z'} = C\rho\frac{\partial T}{\partial t}. \tag{3}$$

Відповідно температура T в шарі шихти є функцією координат і часу

$$T = f(x, z(z', t), t).$$

Задача створення моделі формується у вигляді двовимірного рівняння теплопровідності

$$a_x\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + a_z\frac{\partial^2 T}{\partial z^2} = V\frac{\partial T}{\partial z}, \tag{4}$$

де a_x, a_z – коефіцієнти температуропровідності за відповідними осями x та z і відповідно дорівнюють

$$a = \frac{\lambda}{C\rho}.$$

Розглянемо теплоперенесення вздовж осей x та z направлених відповідно по глибині шару скломаси й уздовж подовжньої осі печі.

Висота робочого шару скломаси складає 0,63 м, а протяжність робочого шару скломаси складає 12,8 м, перепад температури однаковий, тобто теплопередача уздовж осі x, принаймні в 20 разів інтенсивніше, ніж уздовж осі z. Тому величиною z можна нехтувати і рівняння (4) приймає вигляд

$$a_x\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} = V\frac{\partial T}{\partial z}. \tag{5}$$

Таким чином рівняння (1) зведено до одновимірного і роль часу відіграє координата z.

Для подальших розрахунків вводимо параметр h, що визначає глибину шару скломаси, вимірюється від верхнього рівня до дна печі. Помилковим було дослідження не шару робочого матеріалу (скломаси, шихти), а глибини ванни, тому що під час руху скломаси в деяких ділянках значення h може змінюватись. Звідси можна зробити висновок, що h не є константою.

Розглянемо регулярний тепловий режим при нагріві прямокутної області [3] з граничними умовами 2-го роду при контакті «газ-скломаса» у вигляді

$$q(h + l)dt = c_{\text{ск}}\rho_{\text{ск}}hldT_{\text{ср}}, \tag{6}$$

де $c_{\text{ск}}$, $\rho_{\text{ск}}$, $T_{\text{ср}}$ – теплоємність скломаси, густина, середня температура в розглядуваній прямокутній області, l – значення координати по осі y, відображає другу розмірну величину для прямокутника (довжину або ширину, в залежності від того чим є h).

Отримаємо

$$\frac{dT_{\text{ср}}}{dt}=\frac{q(h+l)}{c_{\text{ск}}\rho_{\text{ск}}hl}.$$

Швидкість нагріву V може бути знайдена із диференціального рівняння балансу енергії (6)

$$V=\frac{T_{\text{ср}}}{dt}=\frac{aq}{\lambda h},\ \text{так як}\ a=\frac{\lambda}{c_{\text{ск}}\rho_{\text{ск}}},\ \text{то}\ \frac{a}{\lambda}=\frac{1}{c_{\text{ск}}\rho_{\text{ск}}}.$$

У регулярному режимі, в довільний момент часу

$$T_{\text{ср}}=T_{\text{о}}+Vt\,, \tag{7}$$

де T_0 – початкова температура.

Граничні умови контакту «газ-скломаса»

$$\begin{cases} -\lambda_{\text{ск}}\left.\dfrac{\partial T_{\text{ск}}(x,t)}{\partial x}\right|_{X=0}=0, \\ -\lambda_{\text{ск}}\left.\dfrac{\partial T_{\text{ск}}(x,t)}{\partial x}\right|_{X=h}=\dfrac{q}{\lambda}. \end{cases} \tag{8}$$

Відповідно для координати y граничні умови писати немає сенсу, враховуючи (5).

У регулярному температурному режимі вигляд розв’язку рівняння теплопровідності (5) визначається у вигляді суми лінійної функції часу та квадратичної функції координат, виходячи з результатів виводу граничних умов (8), маємо

$$T(x,t)=Vt+\frac{q}{\lambda}\frac{x^2}{h}+b\,, \tag{9}$$

де b – це деяка постійна, що потребує обрахунку.

З іншого боку розглядаючи результат (9) випливає, що $T_{\text{ср}}$ може бути обраховано як

$$T_{\text{ср}}=\frac{1}{S}\iint\limits_{s}T(x,t)ds=Vt+\frac{q}{\lambda S}\iint\frac{x^2}{h}ds+b\,, \tag{10}$$

де s – площина за якою ведеться інтегрування, S – її значення.

Обраховуємо значення b за (7) та (10)

$$b=T_0-\frac{q}{\lambda S}\iint\frac{x^2}{h}ds. \tag{11}$$

У результаті обрахунку (11) і послідовно інтегруючи, за умови $S=hl$ (як площа прямокутної області), отримаємо

$$b = T_0 - \frac{q}{\lambda}\left(\frac{h}{3}+1\right) = T_0 - \frac{q(h+3)}{3\lambda}. \qquad (12)$$

Підставляємо отримане значення b в (10)

$$T_{\text{ск}}(x,t) = Vt + \frac{q}{\lambda S}\iint \frac{x^2}{h}ds + T_0 - \frac{q(h+3)}{3\lambda}.$$

Урахувавши, що $V = \frac{aq}{\lambda h}$, і значення інтегрування під час отримання b, температура буде обраховуватися наступним чином:

$$T_{\text{ск}}(x,t) - T_0 = \frac{aqt}{\lambda h} + \frac{qx^2}{\lambda h} - \frac{q(h+3)}{3\lambda}$$

або після спрощень

$$T_{\text{ск}}(x,t) - T_0 = \frac{qh}{\lambda}\left(\frac{at}{h^2} + \left(\left(\frac{x}{h}\right)^2 - \frac{1}{3}\right) - \frac{1}{h}\right). \qquad (13)$$

Для подальшого розв'язку поставленої задачі необхідно розглядати скломасу як необмежену пластину товщиною h. З рівняння (13) випливає, що $T_{\text{ск}}(x, t)$ одновимірна задача теплопровідності в регулярному режимі для пластини h. Повний вираз для $T_{\text{ск}}(x, t)$ на всій довжині нестаціонарного процесу [1, 4] приймає вигляд

$$T_{\text{ск}}(x,t) - T_0 =$$

$$= \frac{qh}{\lambda}\left(\frac{at}{h^2} - \frac{h+3}{3h} + 1 - 4\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{(2n-1)\pi}\cos\left(\frac{(2n-1)\pi}{2}\frac{x}{h}\right)e^{-\left(\frac{(2n-1)\pi}{2}\right)^2\left(\frac{at}{h^2}\right)}\right). \qquad (14)$$

Висновок. Внаслідок проведеної роботи була виведена математична модель (14) для регенеративної скловарної печі ванного типу, як складного теплового об'єкта. Дана модель у подальшому буде використана для виведення передатної функції об'єкта керування, розрахунку температурного поля скломаси, створення системи автоматизації керування технологічним процесом.

Т.А. Лазебная, А.В. Ситников, И.С. Бобонич, О.П. Савченко

МАТЕМАТИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ СЛОЖНЫХ ТЕПЛОВЫХ ОБЪЕКТОВ

Рассмотрены вопросы построения математической модели для стекловаренной печи, как сложного теплового объекта, вычислены граничные условия. Все данные, которые использовались при

расчетах и построении температурних полей, были получены эмпирическим путем. В дальнейшем полученная модель может быть использована для выведения передаточной функции объекта управления, а также для разработки системы управления технологическим процессом.

T.A. Lazebnaya, A.V. Sitnikov, I.S. Bobonich, O.P. Savchenko

MATHEMATICAL MODELING OF COMPLEX THERMAL OBJECTS

The problems of mathematical model construction for a glass-melting furnace as a complex thermal object are considered; boundary conditions are calculated. All used in calculations data and thermal field construction are empirically derived. Further, the model obtained can be applied to determination of control object transfer function and for technological process control system design.

1. *Суринов Ю.А.* Об основных методах современной теории лучистого теплообмена // Проблемы энергетики АН СССР. – М., 1959. – С. 423–469.
2. *Жученко А.И., Кубрак А.И., Голинько И.М.* Динамика объектов с распределенными параметрами. – Киев: ЭКМО, 2005. – 121 с.
3. *Лыков А.В.* Теория теплопроводности. – М.: Высшая школа, 1967. – 600 с.
4. *Адерсон Д., Таннехилл Д., Плетчер Р.* Вычислительная гидромеханика и теплообмен. – Т. 2. – М.: Мир, 1990. – 392 с.

Отримано 17.12.2010

Про авторів:

Лазебна Тетяна Олександрівна,
науковий співробітник Інституту кібернетики імені В.М. Глушкова НАН України,
E-Mail: tanyalazebna@yahoo.com

Ситніков Олексій Володимирович,
асистент кафедри АХВ ІХФ НТУ України «КПІ»,
E-Mail: axv_sitnikov @mail.ru

Бобонич Іван Сергійович,
студент кафедри АХВ ІХФ НТУ України «КПІ»,
E-Mail: bobonich_ivan@mail.ru

Савченко Оксана Павлівна,
студентка кафедри АХВ ІХФ НТУ України «КПІ».
E-Mail: Oksana88@mail.ru