УДК 550.8

Член-корреспондент НАН Украины **Е. Г. Булах**

Об аппроксимационном подходе к описанию рельефа дневной поверхности в задачах геодезии и гравиметрии

Рельєф денної поверхні наведений табличною функцією горизонтальних координат. Розглянуто дві задачі. Перша — дає змогу табличну функцію описувати аналітичним виразом. Тоді немає потреби в інтерпретаційних розрахунках. Друга — маси, що розташовані нижче денної поверхні, характеризуються щільнісним параметром. Він може бути функцією координат точок, в яких розміщені гірські породи. В точках зовнішнього простору приповерхневий шар створює гравітаційне поле. Побудовано алгоритмічне розв'язання, яке дозволяє встановити це поле.

В практике геофизических и геодезических работ сведения об особенностях дневной поверхности исследователь получает из топографических карт. Рельеф дневной поверхности Z_i есть функция координат точек. Обычно эта функция представлена таблично:

$$(x_i, y_i) \to Z_i, \qquad i = 1, 2, \ldots, n. \tag{1}$$

Часто в исследовательских работах необходимо найти значения определенных интегралов. При этом подынтегральная функция содержит своим элементом функцию (1), которая должна быть определена в специально фиксированных точках. Они могут не попасть в исходный массив (1). Интерполяционный поиск — задача трудоемкая, и она довольно часто порождает существенные погрешности.

Поставим задачу описать рельеф дневной поверхности аналитической функцией координат точек:

$$Z = f(x, y). \tag{2}$$

Аналитическая аппроксимация функции (1) может существенно облегчить решение достаточно сложных интерпретационных задач. Сама задача не новая. Можно обратиться к работам В. Н. Страхова, И. Э. Степановой, А. С. Долгаля и др. [1–5]. В нашей работе изложен иной аппроксимационный подход. Задача стала существенно нелинейной. При этом аппроксимационная конструкция обеспечивает достаточно точное представление сложных рельефных полей.

1. Постановка задачи. Выделим два подхода к рассматриваемой задаче.

Первый. Отметки рельефа снимаются с топографических карт. Начало координат выбрано в точке на уровне моря. Ось аппликат направлена вертикально вверх, тогда координатная плоскость XOY размещена горизонтально. В такой постановке необходимо рельеф описать как функцию координат.

Второй. Исследователя интересует влияние рельефных масс на численные значения поля аномалии силы тяжести. В этом случае система координат изменяется. Целесообразно ее начало выбрать в точке вне рельефной поверхности. Удобно начало координат разместить в точке, топографическая отметка которой имеет максимальное значение. Как обычно принято в гравиметрических работах, ось аппликат направлена вертикально вниз. В этом случае координатная плоскость XOY размещена горизонтально. Все гравитирующие массы располагаются в точках, аппликаты которых $z > 0$ (или $\zeta > 0$).

Отметим одно обстоятельство. Горные породы, которые размещены ниже дневной поверхности, характеризуются своей плотностью. Этот параметр может быть числом постоянным или плотность есть функция горизонтальных координат.

Задача состоит в том, что нужно найти функцию, которая отражает действие гравитирующих масс рельефа в точках вне этих масс.

2. Первая задача. *Аналитическая аппроксимация рельефа дневной поверхности.* Акцентируем внимание на выборе системы координат. Начало ее размещено в точке уровенной поверхности — на уровне моря. Ось аппликат направлена вертикально вниз. Тогда координатная плоскость XOY или $\xi o \eta$ размещена горизонтально и совпадает с уровенной поверхностью.

В области исследования выберем прямоугольную область D. В этой области будут заданы все исходные данные для решения задачи. Запишем

$$D\colon [a \leqslant x \leqslant b; c \leqslant y \leqslant d]. \tag{3}$$

В области D определены топографические особенности рельефа дневной поверхности. Обратимся к функции (1). Представим ее аналитическим выражением:

$$Zt(x, y) = \sum_{j=1}^{m} \frac{A_j}{[1 + Q1_j(x - x_{0j})^2 + Q2_j(y - y_{0j})^2]^{\alpha}}. \tag{4}$$

Эту функцию перепишем так:

$$Zt(x, y) = \sum_{j=1}^{m} A_j \exp\left[-\alpha \ln\left[1 + Q1_j(x - x_{0j})^2 + Q2_j(y - y_{0j})^2\right]\right]. \tag{4.1}$$

В такой записи параметр α может относиться не только к классу натуральных чисел, но и принадлежать к более широкому классу вещественных чисел.

Для построения функции (4) необходимо четко зафиксировать массив узловых точек

$$(x_{0j}; y_{0j}), \qquad j = 1, 2, \ldots, m. \tag{5}$$

Каждое j-е слагаемое в формуле (4) есть псевдодельта-функция. В j-й точке это слагаемое равно Aj, а далее быстро убывает. Если $Q1 \neq Q2$, то это убывание зависит от направления.

Обратимся к массиву (1) и в каждой фиксированной точке вычислим теоретическую функцию (4). Имеем

$$Zt = Zt(x_i, y_i, P) = Zt(i, P), \qquad i = 1, 2, \ldots, n. \tag{6}$$

Здесь отмечено, что теоретическая функция определена параметрами. Запишем

$$\begin{gathered} P = [W1; W2]; \\ W1 = [m; x_{0j}; y_{0j};\ j = 1, 2, \ldots, m]; \qquad W2 = [A_j; Q1_j; Q2_j;\ j = 1, 2, \ldots, m]. \end{gathered} \tag{7}$$

Обратимся к записи (7). Параметры представлены двумя группами. Первая группа параметров определяет положение каркасных или узловых точек. При решении задачи эта группа не меняет своих численных значений. Естественно, если следователь решил повторить решение, то он может образовать иную каркасную сеть.

Вторая группа содержит параметры, которые при решении задачи изменяются.

Сопоставим теперь табличную функцию — запись (1) и теоретическую (4). Сопоставление сделаем в метрике L_2, тогда образован такой функционал:

$$F = \sum_{i=1}^{n} [Zn(i) - Zt(i, \mathbf{P})]^2. \tag{8}$$

Требуется найти такие значения параметров $\mathbf{P}$, чтобы функционал (8) был минимален. Воспользуемся градиентным методом минимизации. Необходимо перед решением задачи выбрать $\mathbf{P}^{(0)}$ — начальные численные значения составляющих кортежа $\mathbf{P}$. Далее в итерационном цикле составляющие $\mathbf{P}$ изменяются и при $\mathbf{P} = \mathbf{P}^*$ получен минимум функционала (8).

Отметим, что градиентный метод исходит еще от Коши (Couchy Огюст Луи, 1785–1857). Далее метод совершенствовался, и значительное развитие он получил в работах Л. В. Канторовича [6]. Метод сходится, но точка сходимости зависит от параметров начальной модели [7]. Решение задачи устойчиво. Сошлемся на работу В. И. Старостенко и С. М. Оганесян [8]. Для решения задач разведочной геофизики метод получил широкое применение в работах В. Н. Страхова [9]; Е. Г. Булаха [10–12], а также в публикациях В. И. Старостенко [13], А. И. Кобрунова [14] и других ученых.

Так, минимизацией функционала (8) решается задача аналитической аппроксимации рельефа дневной поверхности.

3. Вторая задача. *Прямая задача гравиметрии — аномальное поле, обусловленное массами приповерхностного слоя.*

3.1. *Введение.* Теперь обратимся к задаче второй. Исследователь располагает топографической картой. Отметки рельефа заданы таблично — запись (1). Это — превышение точек рельефа дневной поверхности над уровнем моря.

Выберем иную систему координат. Начало системы расположено в точке над рельефными массами. Эта точка может совпадать с положением экстремальной точки рельефных масс. Пусть ее отметка на топографической карте равна H_0.

Обратимся к координатным осям. Ось аппликат изменяет направление и ориентирована вертикально вниз. Координатная плоскость XOY размещается горизонтально. Будем оставаться в правой системе координат. Если изменилось направление оси аппликат, то следует изменить положение еще одной оси — например, оси ординат. Пусть ось абсцисс направлена на восток, тогда ось ординат имеет южное направление.

Рельеф дневной поверхности представлен таблично. Аппликаты всех точек положительные.

В нашей задаче необходимо различать точки, содержащие гравитирующие массы, и точки, расположенные вне этих масс. Если точка M расположена ниже дневной поверхности, то будем писать $\mathrm{M}(\xi; \eta; \zeta)$. В этой точке есть массы, плотность которых определена. Если же точка M находится выше рельефной поверхности — вне горных пород, то будем писать $\mathrm{M}(x; y; z)$. Рельеф дневной поверхности рассматривается в области D — запись (3).

Перейдем к аппроксимационному построению. Рельеф представим аналитической функцией (4). Эта задача была решена выше. Таким образом, в любой точке $\mathrm{M}(x, y)$ можно найти глубину заложения дневной поверхности:

$$Zt = Zt(\xi; \eta). \tag{9}$$

Здесь принято, что точки дневной поверхности принадлежат массам приповерхностного слоя.

Горные породы, которые размещаются ниже дневной поверхности, обладают физическим параметром — плотностью. Будем полагать, что этот параметр может быть числом постоянным или быть функцией координат точек. Запишем

$$\sigma = \sigma_0 \qquad \text{или} \qquad \sigma = \sigma(\xi, \eta) = \sigma_0(1 + \alpha_1\xi + \alpha_2\eta + \alpha_3\xi\eta). \tag{10}$$

Пусть в некоторых n1 точках известно значение плотностного параметра

$$\sigma_i = \sigma(\xi_i, \eta_i), \qquad i = 1, 2, \ldots, \text{n1}.$$

Функция (10) дает возможность получить n1 линейных уравнений относительно σ_0; $\sigma_0\alpha_1$; $\sigma_0\alpha_2$; $\sigma_0\alpha_3$. Если $\text{n1} \geqslant 4$, то метод наименьших квадратов позволяет найти коэффициенты формулы (10).

Теперь остается основная задача этого раздела. В произвольных точках $\text{M}(x; y; z)$, которые размещены вне горных пород приповерхностного слоя, найти поле аномалии силы тяжести, которое обусловлено массами приповерхностного слоя. Нужно четко фиксировать положение горизонтальной плоскости, которая ограничивает распределение масс по глубине заложения. Это может быть уровень моря или уровень самой глубокорасположенной точки рельефа: $H = H_k = \text{const}$ нижний уровень размещения приповерхностных масс.

Задача вычисления поля аномалии силы тяжести приводит нас к интегрированию по точкам, где размещены приповерхностные массы. Это область D — запись (3) и ее асимптотическое продолжение. Построим асимптоты области D. Для этого стороны граничного прямоугольника разделим на mx и my частей. Далее асимптотическую часть представим как совокупность узких, сильно вытянутых прямоугольников. В каждом прямоугольнике дневную поверхность отождествим горизонтальной плоскостью. Глубина заложения этой плоскости и значение плотности горных пород соответствуют этим параметрам в точке на граничном контуре.

3.2. *Вычисление аномального поля, обусловленного массами рельефа дневной поверхности.* Массы с избыточной плотностью $\sigma(\xi, \eta)$ располагаются в области D — запись (3) и далее в ее асимптотических продолжениях. Эти массы по оси аппликат ограничены плоскостью $\zeta = H_k = \text{const}$. В точках вне масс аномальное поле может быть записано так:

$$\Delta gs(x, y, z) = \Delta g(x, y, z) + f(x, y, z); \qquad f(x, y, z) = \sum_{t=1}^{q} f_1(x, y, z).$$

В этом выражении Δgs — суммарное поле, состоящее из двух слагаемых. Первое слагаемое — эффект масс, размещенных в области D. Второе — гравитационное поле масс, которые располагаются в асимптотических частях области D. Вся асимптотическая часть разделена на q элементарных частей, каждая t-я часть содержит массы, расположенные внутри прямоугольного параллелепипеда. Положение верхней грани и плотностной параметр находятся из граничных точек центральной области D. Таким образом, второе слагаемое может быть легко вычислено. Обратимся к первому слагаемому. Это гравитационное поле, обусловленное массами рельефа. Массы сосредоточены в области D. Имеем

$$\Delta g(x, y, z) = k \iint\limits_{D} \cdot \int\limits_{Zt(\xi,\eta)}^{H_k} \frac{\sigma(\xi, \eta)(\zeta - z)d\zeta}{[(\xi - x)^2 + (\eta - y)^2 + (\zeta - z)^2]^{3/2}}\, ds.$$

Нетрудно выполнить первое интегрирование. Получим разность двух функций. Они могут быть близки между собой, и это внесет существенные погрешности при численных расчетах. Преобразуем результат первого интегрирования и получим

$$\Delta g(x,y,z) = k \iint\limits_{D} \frac{(Zt(\xi,\eta)-z)^2-(H_k-z)^2}{A1\cdot A2\cdot(A1+A2)}\,ds.$$

В этой записи

$$A1 = [(\xi-x)^2+(\eta-y)^2+(H_k-z)^2]^{1/2};$$

$$A2 = [(\xi-x)^2+(\eta-y)^2+(Zt(\xi,\eta)-z)^2]^{1/2}.$$

Подынтегральная функция может быть получена в любой точке области D. Не требуется каких-либо интерполяционных вычислений.

Можно перейти к интегральной сумме. В этом случае целесообразно использовать триангуляционный метод, в котором на прямоугольном элементе области интегрирования подынтегральная функция заменяется совокупностью плоскостей общего положения. Такой подход был ранее описан в статье [15].

Так, в любой точке вне масс может быть вычислено поле аномалии силы тяжести. Это поле обусловлено массами слоя, который размещен между дневной поверхностью и фиксированной горизонтальной плоскостью. Последняя размещается ниже пород приповерхностного слоя.

Изложенное выше алгоритмическое решение прошло проверку на модельных и практических примерах.

1. *Страхов В. Н., Керимов И. А., Страхов А. В.* Линейные аналитические аппроксимации рельефа поверхности Земли // Геофизика и математика. – Москва: ОИФЗ РАН, 1999. – С. 198–212.
2. *Страхов В. Н.* Геофизика и математика. – Москва: ОИФЗ РАН, 1999. – 64 с.
3. *Страхов В. Н., Керимов И. А., Степанова И. Э.* Линейные аналитические аппроксимации рельефа поверхности Земли и их использование при вычислении поправок за влияние рельефа местности в гравиметрические наблюдения. Вопросы теории и практики геологической интерпретации гравитационных, магнитных и электрических полей: Материалы сес. Междунар. сем. им. Д. Г. Успенского. – Москва: ОИФЗ РАН, 2001. – С. 116–118.
4. *Степанова И. Э.* О методах учета топографии земной поверхности при интерпретации гравиметрических данных // Физика Земли. – 2007. – № 6. – С. 26–36.
5. *Долгаль А. С., Червоный Н. П.* Учет влияния рельефа земной поверхности при аэромагнитных измерениях // Геоінформатика. – 2008. – № 2. – С. 58–66.
6. *Канторович Л. В.* О методе наискорейшего спуска // Докл. АН СССР. – 1947. – **56**, № 3. – С. 233–236.
7. *Булах Е. Г.* К вопросу о методе подбора при решении обратных задач гравиметрии и магнитометрии: Обзор // Физика Земли. – 2006. – № 2. – С. 72–77.
8. *Старостенко В. И., Оганесян С. М.* Некорректно поставленные задачи по Адамару и их приближенное решение методом регуляризации по А. Н. Тихонову // Геофиз. журн. – 2001. – **23**, № 6. – С. 3–20.
9. *Страхов В. Н.* К теории метода подбора // Изв. АН СССР. Сер. геофиз. – 1964. – № 4. – С. 494–509.
10. *Булах Е. Г.* Об автоматическом подборе контура возмущающих тел на цифровой электронной вычислительной машине // Там же. Физика Земли. – 1965. – № 8. – С. 85–88.
11. *Булах Е. Г.* Автоматизированная система интерпретации гравитационных аномалий (метод минимизации). – Киев: Наук. думка, 1973. – 111 с.
12. *Булах Е. Г., Ржаницин В. А., Маркова М. Н.* Применение метода минимизации для решения задач структурной геологии по данным гравиразведки. – Киев: Наук. думка, 1976. – 219 с.

13. *Старостенко В. И.* Устойчивые численные методы в задачах гравиметрии. – Киев: Наук. думка, 1978. – 228 с.
14. *Кобрунов А. И.* Теоретические основы решения обратных задач геофизики. – Ухта: Изд. УИИ, 1995. – 228 с.
15. *Булах Е. Г., Слободник Н. А.* Об одном алгоритме вычисления двойного интеграла при решении прямых задач гравиметрии и магнитометрии // Геоінформатика. – 2003. – № 1. – С. 49–54.

Институт геофизики им. С. И. Субботина
НАН Украины, Киев

Поступило в редакцию 07.10.2008

Corresponding Member of the NAS of Ukraine **E. G. Bulakh**

About the approximation approach to the description of a relief of the ground surface in problems of geophysics and gravimetry

The ground surface relief is submitted by a tabulated function of horizontal coordinates. Two tasks are considered. The first allows us to describe the tabulated function analytically. Then there is no need in the interpretation of calculations. The second — masses located below the ground surface are characterized by the parameter of density. It can be a function of coordinates of points, at which rocks are located. At points of the external space, the near-surface layer creates a gravitational field. The software support which allows one to establish this field is constructed.