КОМПЬЮТЕРНАЯ МАТЕМАТИКА

УДК 519.6

О.Н. ЛИТВИН, Ю.И. ПЕРШИНА

ПРИБЛИЖЕНИЕ РАЗРЫВНОЙ ФУНКЦИИ ДВУХ ПЕРЕМЕННЫХ С ПОМОЩЬЮ РАЗРЫВНЫХ СПЛАЙНОВ ДВУХ ПЕРЕМЕННЫХ (ПРЯМОУГОЛЬНЫЕ ЭЛЕМЕНТЫ)

Разработан общий метод построения разрывных интерлинационных полиномиальных сплайнов, которые как частный случай включают в себя разрывные и непрерывно-дифференцируемые сплайны. Сформулированы и доказаны теоремы об интерлинационных и аппроксимационных свойствах таких разрывных конструкций.

Введение. В работе [1] разработан метод приближения разрывных функций одной переменной разрывными сплайнами, используя метод минимакса.

Данная работа посвящена обобщению результатов работы [1] на случай приближения разрывных функций двух переменных с помощью разрывных сплайнов двух переменных, когда разрывы первого рода приближаемой функции и разрывы первого рода сплайнов, которыми приближаем, расположены в точках прямых, параллельных осям координат. Будем считать, что область приближения полностью расположена в квадрате $D=[0,1]\times[0,1]$.

На сегодня основное внимание в теории приближения функций многих переменных сплайнами уделяется приближению непрерывных и дифференцируемых функций непрерывными и дифференцируемыми сплайнами [2–4]. При этом практика показывает, что среди многомерных объектов, которые нужно исследовать, значительно большее их количество описывается разрывными функциями. Например, в методах компьютерной томографии на сегодняшний день нигде не используется информация о внутренней структуре тела человека (желудок имеет одну форму и соответствующую плотность его тканей, печень имеет другую форму и другую плотность ее тканей, поджелудочная железа имеет свою форму и плотность тканей, позвоночник имеет свою плотность и т. д.).

В работе [5] предложено использовать для более точного описания внутренней структуры $3D$ тела априорную информацию о его частях с помощью соответствующих функций трех переменных, входящих в уравнения $W_k(x,y,z)=0,\ k=\overline{1,M}$, которые описывают M объектов внутренней структуры тела с целью более качественного их восстановления методами компьютерной томографии. То есть в этом методе предлагается использовать информацию о внутренней структуре тела в виде разрывной функции трех переменных, которая имеет разрывы в точках поверхностей, отделяющих соседние подобласти.

Все развитие вычислительной и прикладной математики говорит о том, что использование дополнительной информации об исследуемом объекте может привести к более точному и качественному восстановлению этого объекта. Например, в работе [6] предлагается использовать уравнение поверхности черепа человека и, таким образом, более точно восстановить внутреннюю структуру тела.

Кроме того, приведем следующий пример. В механике твердого тела одной из сложных задач является задача исследования трещин во внутренних точках тела, т. е. таких включений во внутренних точках тела, в которых отсутствует материал, из которого состоит тело. Можно сказать, что такое тело имеет плотность, которая является разрывной: за границами трещины – одна плотность, в области, ограниченной стенками трещины – другая плотность.

Таким образом, актуальной является разработка и исследование теории приближения разрывных функций с помощью разрывных сплайнов.

Постановка задачи. Пусть задана разрывная функция двух переменных $f(x,y)$ в области D. Предположим, что область D разбивается прямыми $x_0=0<x_1<x_2<\ldots<x_m=1$, $y_0=0<y_1<y_2<\ldots<y_n=1$ на прямоугольные элементы $\Pi_{ij}=(x_{i-1},x_i)\times(y_{j-1},y_j), i=\overline{1,m},\ j=\overline{1,n}$. Функция $f(x,y)$ и ее производные до $\rho-1$ порядка имеют разрывы первого рода на границах между этими прямоугольными элементами (не обязательно между всеми). Требуется построить такой разрывный сплайн, чтобы выполнялись интерлинационные и аппроксимационные свойства.

Описание метода приближения. Введем обозначения: $\varphi 1_i^+(y)=$ $=f(x_i+0,y)$; $\varphi 1_i^-(y)=f(x_i-0,y)$ – следы функции $f(x,y)$ на прямых $x=x_i$, $i=\overline{1,m}$. Если $\varphi 1_i^+(y)=\varphi 1_i^-(y)$, то функция $f(x,y)$ – непрерывна на линии $x=x_i$, в противном случае она имеет разрыв на заданой линии.

Рассмотрим элемент $\Pi_{ij}=(x_{i-1},x_i)\times(y_{j-1},y_j), i=\overline{1,m},\ j=\overline{1,n}.$

Определение. Будем называть разрывным интерлинационным полиномиальным сплайном в области D, который соответствует заданному разбиению на подобласти Π_{ij}, следующую функцию:

$$S(x,y)=S_{ij}(x,y)=S1_{ij}(x,y)+S2_{ij}(x,y)-S12_{ij}(x,y),\qquad (x,y)\in\Pi_{ij}\subset D,\qquad (1)$$

где

$$S1_{ij}(x,y)=S1_{ij}(x,y;\{\varphi 1_{i-1,s}(y)\};\{\varphi 1_{i,s}(y)\},s=\overline{0,\rho-1})=$$

$$=\sum_{s=0}^{\rho-1}\varphi 1^{+}_{i-1,s}(y)\cdot h1_{i-1,s}(x)+\sum_{s=0}^{\rho-1}\varphi 1^{-}_{i,s}(y)\cdot h1_{i,s}(x);$$

$$S2_{ij}(x,y)=S2_{ij}(x,y;\{\varphi 2_{j-1,p}(x)\};\{\varphi 2_{j,p}(x)\},p=\overline{0,\rho-1})=$$

$$=\sum_{p=0}^{\rho-1}\varphi 2^{+}_{j-1,p}(x)\cdot h2_{j-1,p}(y)+\sum_{p=0}^{\rho-1}\varphi 2^{+}_{j,p}(x)\cdot h2_{j,p}(y);$$

$$S12_{ij}(x,y)=S12_{ij}(x,y;\{\varphi 1_{i-1,s}(y)\};\{\varphi 1_{i,s}(y)\},s=\overline{0,\rho-1},$$

$$\{\varphi 2_{j-1,p}(x)\};\{\varphi 2_{j,p}(x)\},p=\overline{0,\rho-1})=$$

$$=\sum_{s=0}^{\rho-1}\sum_{p=0}^{\rho-1}C^{++}_{i-1,j-1,s,p}h1_{i-1,s}(x)h2_{j-1,p}(y)+\sum_{s=0}^{\rho-1}\sum_{p=0}^{\rho-1}C^{+-}_{i-1,j,s,p}h1_{i-1,s}(x)h2_{j,p}(y)+$$

$$+\sum_{s=0}^{\rho-1}\sum_{p=0}^{\rho-1}C^{-+}_{i,j-1,s,p}h1_{i,s}(x)h2_{j-1,p}(y)+\sum_{s=0}^{\rho-1}\sum_{p=0}^{\rho-1}C^{--}_{i,j,s,p}h1_{i,s}(x)h2_{j,p}(y),$$

$h1_{k,s}(x), h2_{l,p}(y)$ – базисные полиномы Ермита степени $2\rho-1$ со свойствами:

$$h1^{(s')}{}_{k,s}(x_{k'})=\delta_{k,k'}\delta_{s,s'},\ k,k'\in\{i-1,i\},s,s'\in\{0,\rho-1\},$$

$$h2^{(p')}{}_{l,p}(y_{l'})=\delta_{l,l'}\delta_{p,p'},l,l'\in\{j-1,j\},p,p'\in\{0,\rho-1\}.$$

Теорема 1. Если

$$\varphi 1^{+(p)}_{i,s}(y_j)=\varphi 2^{+(s)}_{j,p}(x_i)=C^{++}_{ijsp},\quad \varphi 1^{-(p)}_{i,s}(y_j)=\varphi 2^{+(s)}_{j,p}(x_i)=C^{-+}_{ijsp},$$

$$\varphi 1^{-(p)}_{i,s}(y_j)=\varphi 2^{-(s)}_{j,p}(x_i)=C^{--}_{ijsp},\quad \varphi 1^{+(p)}_{i,s}(y_j)=\varphi 2^{-(s)}_{j,p}(x_i)=C^{+-}_{ijsp},$$

то на границе прямоугольника Π_{ij} функция $S_{ij}(x,y)$ удовлетворяет следующим соотношениям:

$$\frac{\partial^{s'}S_{ij}(x_{i-1},y)}{\partial x^{s'}}=\varphi 1^{+}_{i-1,s'}(y);\ \frac{\partial^{s'}S_{ij}(x_i,y)}{\partial x^{s'}}=\varphi 1^{-}_{i,s'}(y),\quad y_{j-1}\le y\le y_j,\ s'=\overline{0,\rho-1} \tag{2}$$

$$\frac{\partial^{p'}S_{ij}(x,y_{j-1})}{\partial y^{p'}}=\varphi 2^{+}_{j-1,p'}(x),\ \frac{\partial^{p'}S_{ij}(x,y_j)}{\partial y^{p'}}=\varphi 2^{-}_{j,p'}(x),\ x_{i-1}\le x\le x_i,\ p'=\overline{0,\rho-1} \tag{3}$$

Доказательство. Подставим в формулу (1) $x=x_{i-1}$. В результате получаем

$$S_{ij}(x_{i-1},y)=S1_{ij}(x_{i-1},y)+S2_{ij}(x_{i-1},y)-S12_{ij}(x_{i-1},y),=$$

$$=\sum_{s=0}^{\rho-1}\varphi 1^{+}_{i-1,s}(y)\cdot h1_{i-1,s}(x_{i-1})+\sum_{s=0}^{\rho-1}\varphi 1^{-}_{i,s}(y)\cdot h1_{i,s}(x_{i-1})+$$

$$+\sum_{p=0}^{\rho-1}\varphi 2^{+}_{j-1,p}(x_{i-1})\cdot h2_{j-1,p}(y)+\sum_{p=0}^{\rho-1}\varphi 2^{-}_{j,p}(x_{i-1})\cdot h2_{j,p}(y)-$$

$$-\sum_{s=0}^{\rho-1}\sum_{p=0}^{\rho-1}C^{++}_{i-1,j-1,s,p}h1_{i-1,s}(x_{i-1})h2_{j-1,p}(y)+\sum_{s=0}^{\rho-1}\sum_{p=0}^{\rho-1}C^{+-}_{i-1,j,s,p}h1_{i-1,s}(x_{i-1})h2_{j,p}(y)+$$

$$+\sum_{s=0}^{\rho-1}\sum_{p=0}^{\rho-1}C^{-+}_{i,j-1,s,p}h1_{i,s}(x_{i-1})h2_{j-1,p}(y)+\sum_{s=0}^{\rho-1}\sum_{p=0}^{\rho-1}C^{--}_{i,j,s,p}h1_{i,s}(x_{i-1})h2_{j,p}(y)=$$

$$=\varphi1^{+}_{i-1,0}(y)+\sum_{p=0}^{\rho-1}\varphi2^{+}_{j-1,p}(x_{i-1})\cdot h2_{j-1,p}(y)+\sum_{p=0}^{\rho-1}\varphi2^{-}_{j,p}(x_{i-1})\cdot h2_{j,p}(y)-$$

$$-\sum_{p=0}^{\rho-1}C^{++}_{i-1,j-1,0,p}h2_{j-1,p}(y)-\sum_{p=0}^{\rho-1}C^{+-}_{i-1,j,0,p}h2_{j,p}(y)=\left|\begin{matrix}C^{++}_{i-1,j-1,0,p}=\varphi2^{+}_{j-1,p}(x_{i-1})\\ C^{+-}_{i-1,j,0,p}=\varphi2^{-}_{j,p}(x_{i-1})\end{matrix}\right|=$$

$$=\varphi1^{+}_{i-1,0}(y)+\sum_{p=0}^{\rho-1}\varphi2^{+}_{j-1,p}(x_{i-1})\cdot h2_{j-1,p}(y)+\sum_{p=0}^{\rho-1}\varphi2^{-}_{j,p}(x_{i-1})\cdot h2_{j,p}(y)-$$

$$-\sum_{p=0}^{\rho-1}\varphi2^{+}_{j-1,p}(x_{i-1})h2_{j-1,p}(y)-\sum_{p=0}^{\rho-1}\varphi2^{-}_{j,p}(x_{i-1})h2_{j,p}(y)=\varphi1^{+}_{i-1,0}(y)\,.$$

Таким образом, мы доказали, что $S_{ij}(x_{i-1},y)=\varphi1^{+}_{i-1,0}(y),\ y_{j-1}\le y\le y_j$.

Аналогично доказываются равенства, когда в формулу (1) подставляем $x=x_i,\ y=y_{j-1},\ y=y_j$.

Допустим, что $1\le s'\le\rho-1$. В результате получаем

$$\frac{\partial^{s'}S_{ij}(x_i,y)}{\partial x^{s'}}=\frac{\partial^{s'}S1_{ij}(x_i,y)}{\partial x^{s'}}+\frac{\partial^{s'}S2_{ij}(x_i,y)}{\partial x^{s'}}-\frac{\partial^{s'}S12_{ij}(x_i,y)}{\partial x^{s'}}=$$

$$=\sum_{s=0}^{\rho-1}\varphi1^{+}_{i-1,s}(y)\cdot\frac{\partial^{s'}h1_{i-1,s}(x_{i-1})}{\partial x^{s'}}+\sum_{s=0}^{\rho-1}\varphi1^{-}_{i,s}(y)\cdot\frac{\partial^{s'}h1_{i,s}(x_{i-1})}{\partial x^{s'}}+$$

$$+\sum_{p=0}^{\rho-1}\frac{\partial^{s'}\varphi2^{+}_{j-1,p}(x_{i-1})}{\partial x^{s'}}\cdot h2_{j-1,p}(y)+\sum_{p=0}^{\rho-1}\frac{\partial^{s'}\varphi2^{-}_{j,p}(x_{i-1})}{\partial x^{s'}}\cdot h2_{j,p}(y)-$$

$$-\sum_{s=0}^{\rho-1}\sum_{p=0}^{\rho-1}C^{++}_{i-1,j-1,s,p}\frac{\partial^{s'}h1_{i-1,s}(x)}{\partial x^{s'}}\cdot h2_{j-1,p}(y)-$$

$$-\sum_{s=0}^{\rho-1}\sum_{p=0}^{\rho-1}C^{+-}_{i-1,j,s,p}\frac{\partial^{s'}h1_{i-1,s}(x_{i-1})}{\partial x^{s'}}\cdot h2_{j,p}(y)-\sum_{s=0}^{\rho-1}\sum_{p=0}^{\rho-1}C^{-+}_{i,j-1,s,p}\frac{\partial^{s'}h1_{i,s}(x_{i-1})}{\partial x^{s'}}\cdot h2_{j-1,p}(y)+$$

$$+\sum_{s=0}^{\rho-1}\sum_{p=0}^{\rho-1}C^{--}_{i,j,s,p}\frac{\partial^{s'}h1_{i,s}(x_{i-1})}{\partial x^{s'}}\cdot h2_{j,p}(y)=\sum_{s=0}^{\rho-1}\varphi1^{+}_{i-1,s}(y)\cdot\delta_{i-1,i-1}\delta_{s',s}+\sum_{s=0}^{\rho-1}\varphi1^{-}_{i,s}(y)\cdot\delta_{i,i-1}\delta_{s',s}+$$

$$+\sum_{p=0}^{\rho-1}\varphi2^{+(s')}_{j-1,p}(x_{i-1})\cdot h2_{j-1,p}(y)+\sum_{p=0}^{\rho-1}\varphi2^{-(s')}_{j,p}(x_{i-1})\cdot h2_{j,p}(y)-$$

$$-\sum_{s=0}^{\rho-1}\sum_{p=0}^{\rho-1}C^{++}_{i-1,j-1,s,p}\delta_{i-1,i-1}\delta_{s',s}h2_{j-1,p}(y)-\sum_{s=0}^{\rho-1}\sum_{p=0}^{\rho-1}C^{+-}_{i-1,j,s,p}\delta_{i-1,i-1}\delta_{s',s}h2_{j,p}(y)-$$

$$-\sum_{s=0}^{\rho-1}\sum_{p=0}^{\rho-1}C_{i,j-1,s,p}^{-+}\delta_{i,i-1}\delta_{s',s}h2_{j-1,p}(y)+\sum_{s=0}^{\rho-1}\sum_{p=0}^{\rho-1}C_{i,j,s,p}^{--}\delta_{i,i-1}\delta_{s',s}h2_{j,p}(y)=$$

$$=\left|C_{i-1,j-1,s',p}^{++}=\varphi 2_{j-1,p}^{+(s')}(x_{i-1})\right|=$$

$$=\varphi 1_{i-1,s'}^{+}(y)+\sum_{p=0}^{\rho-1}C_{i-1,j-1,s',p}^{++}\cdot h2_{j-1,p}(y)+\sum_{p=0}^{\rho-1}C_{i-1,j,s',p}^{-+}\cdot h2_{j,p}(y)-$$

$$-\sum_{p=0}^{\rho-1}C_{i-1,j-1,s',p}^{++}h2_{j-1,p}(y)-\sum_{p=0}^{\rho-1}C_{i-1,j,s',p}^{+-}h2_{j,p}(y)=\varphi 1_{i-1,s'}^{+}(y).$$

Аналогично доказываются свойства (2) при $x=x_i$ и свойства (3).

Теорема 1 доказана.

Теорема 2. Если

$$\varphi 1_{i,s}^{-}(y)=\varphi 1_{i,s}^{+}(y)=\varphi 1_{i,s}(y),\ s=\overline{0,\mu}, 0\le\mu\le\rho-1,$$

$$\varphi 2_{j,p}^{-}(x)=\varphi 2_{j,p}^{+}(x)=\varphi 2_{j,p}(x),\ p=\overline{0,\nu}, 0\le\nu\le\rho-1,$$

то функция $S(x,y)=S_{ij}(x,y),\ (x,y)\in\Pi_{ij}$ будет иметь такие свойства:

$$S(x,y)\in C^{\mu,\nu}(D).$$

$$\frac{\partial^{s'}S(x_i,y)}{\partial x^{s'}}=\varphi 1_{i,s'}(y),\ \ i=\overline{1,m},\ s'=\overline{0,\mu},\ y_{j-1}\le y\le y_j, \tag{4}$$

$$\frac{\partial^{p'}S(x,y_j)}{\partial y^{p'}}=\varphi 2_{j,p'}(x),\ \ j=\overline{1,n},\ p'=\overline{0,\nu},\ x_{i-1}\le x\le x_i \tag{5}$$

Доказательство вытекает из того, что если функции $\varphi 1_{i,s}(y)\in$ $\in C^{\rho-1}[x_{i-1},x_i],\ \varphi 2_{j,p}(x)\in C^{\rho-1}[y_{j-1},y_j]$, то в каждом элементе Π_{ij} функция $S_{ij}(x,y)$ будет принадлежать классу $C^{\rho-1,\rho-1}(\Pi_{ij})$. Таким образом, функция $S(x,y)$ в каждом из элементов Π_{ij} принадлежит классу $C^{\rho-1,\rho-1}(\Pi_{ij})$ и на границе между соседними с Π_{ij} элементами сохранает непрерывность производных до порядков μ, ν соответственно, так как доказательство свойств (4), (5) проводится по аналогии с доказательством свойств в теореме 1.

Теорема 2 доказана.

Замечание. Если условия теоремы 2 выполняются, то функция $S(x,y)$ имеет разрывные частные производные порядков больших, чем μ по x и ν по y.

Теорема 3. Если функции $\varphi 1_{i,s}^{+}(y),\ \varphi 1_{i,s}^{-}(y)$ являются полиномами (вообще говоря, разными) степени $Q\ge 2\rho-1$ и функции $\varphi 2_{j,p}^{+}(x),\ \varphi 2_{j,p}^{-}(x)$ являются полиномами (вообще говоря, разными) степени $Q\ge 2\rho-1$, то функция $S(x,y)$ будет кусочно-полиномиальным разрывным сплайном, который является полиномом двух переменных на каждом прямоугольнике $\Pi_{ij}\subset D$. В частности, если $Q=2\rho-1$, то $S(x,y)$ будет разрывным кусочно-полиномиальным сплайном от (x,y) степени $2\rho-1$ по каждой переменной.

Доказательство вытекает из того, что функции $S_{ij}(x,y)$ используют полиномиальные базисные функции Ермита и в допущениях теоремы 3 будут полиномами. Если $Q = 2\rho - 1$, то $S_{ij}(x,y)$ будет полиномом степени $2\rho - 1$ по каждой переменной. Если при этом не выполняются условия теоремы 2, то такая функция $S_{ij}(x,y)$ будет иметь разрывы между разными элементами.

Теорема 3 доказана.

Замечание. Подчеркнем, что не требуется, чтобы на всех четырех сторонах каждого элемента сплайн имел разрывные производные порядков $\mu+1,\ \mu+2,...,\rho-1$ и $\nu+1,\nu+2,...,\rho-1$ по x и y соответственно.

Теорема 4. Допустим, что приближаемая функция $f(x,y)\in C^{\rho-1,\rho-1}(D\setminus\overline{\Pi_{kl}})$ и $\varphi 1^{+}_{i-1,s}(y)\neq \varphi 1^{-}_{i,s}(y),\quad \varphi 2^{+}_{j-1,p}(x)\neq \varphi 2^{-}_{j,p}(x),\ \ s,p=\overline{0,\rho-1}$. Тогда, если положить

$$\varphi 1^{-}_{i',s}(y)=\varphi 1^{+}_{i',s}(y)= f^{(s',0)}(x_{i'},y),\ i'\in\{0,1,...,m\},\ i'\neq i-1,\ i'\neq i,\ 0\le y\le 1,$$

$$\varphi 2^{-}_{j',p}(x)=\varphi 2^{+}_{j',p}(x)= f^{(0,p)}(x,y_{j'}),\ j'\in\{0,1,...,n\},\ j'\neq j-1,\ j'\neq j,\ 0\le x\le 1,$$

$$\varphi 1^{-}_{i-1,s}(y)=\varphi 1^{+}_{i-1,s}(y)= f^{(s,0)}(x_{i-1},y)\,,\ 0\le y\le y_{j-1}\ \text{ или }\ y_j\le y\le 1,$$

$$\varphi 2^{-}_{j-1,p}(x)=\varphi 2^{+}_{j-1,p}(x)= f^{(0,p)}(x,y_{j-1})\,,\ 0\le x\le x_{i-1}\ \text{ или }\ x_i\le x\le 1\,,$$

$$\varphi 1^{+}_{i-1,s}(y)= f^{(s,0)}(x_{i-1}+0,y),\ \varphi 1^{-}_{i,s}(y)= f^{(s,0)}(x_i-0,y)\,,$$

$$\varphi 1^{-}_{i-1,s}(y)= f^{(s,0)}(x_{i-1}-0,y),\ \varphi 1^{+}_{i,s}(y)= f^{(s,0)}(x_i+0,y),$$

$$\varphi 2^{+}_{j-1,p}(x)= f^{(0,p)}(x,y_{j-1}+0),\ \varphi 2^{-}_{j,p}(x)= f^{(0,p)}(x,y_j-0)\,,$$

$$\varphi 2^{-}_{j-1,p}(x)= f^{(0,p)}(x,y_{j-1}-0),\ \varphi 2^{+}_{j,p}(x)= f^{(0,p)}(x,y_j+0),$$

то функция $S(x,y)\in C^{\rho-1,\rho-1}(D)$ будет разрывной вместе со своими производными до порядка $\rho-1$ по каждой переменной только на границе элемента Π_{ij}.

Доказательство вытекает из того, что на границе между всеми элементами (за исключением элемента Π_{ij}) функция $S(x,y)$ будет иметь непрерывные производные до порядка $\rho-1$ включительно и только на границе элемента Π_{ij} может быть разрывной вместе со своими частными производными.

Теорема 4 доказана.

Теорема 5. Если выполняются условия теоремы 4, то для погрешности приближения разрывной функции $f(x,y)\in C^{\rho-1,\rho-1}(\Pi_{i,j})$ соответствующим разрывным интерлинационным полиномиальным сплайном $S(x,y)$ будут выполняться соотношения:

$$\left|f(x,y)-S(x,y)\right| = O(\Delta 1^{2\rho}\Delta 2^{2\rho}),\ (x,y)\in \Pi_{kl}\neq \Pi_{i,j},$$
$$\Delta 1 = \max_k (x_k - x_{k-1}),\ \Delta 2 = \max_l (y_l - y_{l-1}),$$
$$\left|f(x,y)-S(x,y)\right| = O(\Delta i^{2\rho}\Delta j^{2\rho}),\ (x,y)\in \Pi_{i,j},$$
$$\Delta i = x_i - x_{i-1},\ \Delta j = y_j - y_{j-1},\ (i,j)\neq (k,l).$$

Доказательство. Оператор $S_{ij}(x,y)=S_{ij}f(x,y)$ согласно с определением 1 может быть записан в виде

$$S_{ij}f(x,y)=S1_{ij}f(x,y)+S2_{ij}f(x,y)-S12_{ij}f(x,y).$$

Согласно теореме 3.2.1 работы [3] остаток приближения формулами интерлинации выражается как операторное произведение остатков приближения функции $f(x,y)$ операторами $S1_{ij}f(x,y)$ и $S2_{ij}f(x,y)$

$$RS_{ij}f(x,y)=(f(x,y)-S1_{ij}f(x,y)-S2_{ij}f(x,y)+S12_{ij}f(x,y))=$$
$$=(f(x,y)-S1_{ij}f(x,y))(f(x,y)-S2_{ij}f(x,y))=RS1_{ij}f(x,y)RS2_{ij}f(x,y).$$

В этом случае оценка погрешности вытекает из следствия 3 к теореме 3.2.2 работы [3].

Теорема 5 доказана.

Пример. Пусть $\rho=1,\ m=2,\ n=2$. Зададим узлы: $x_0=0,\ x_1=0.5,\ x_2=1,$ $y_0=0,\ y_1=0.5,\ y_2=1.$

То есть область определения приближаемой функции (рис. 1) состоит из четырех прямоугольных элементов, которые задаются следующим образом:

$\Pi_{11}=\{(x,y): x_0<x<x_1, y_0<y<y_1\}$, $\Pi_{12}=\{(x,y): x_0<x<x_1, y_1<y<y_2\}$,

$\Pi_{21}=\{(x,y): x_1<x<x_2, y_0<y<y_1\}$, $\Pi_{22}=\{(x,y): x_1<x<x_2, y_1<y<y_2\}$.

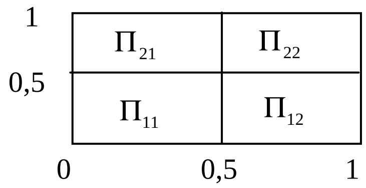

РИС. 1. Область определения приближаемой функции $f(x,y)$

Зададим функцию $f(x,y)$ в узловых точках элементов Π_{ij} следующим образом:

$$\Pi_{11}: \begin{array}{l} f^{+,+}(0;0)=f(+0;+0)=1 \\ f^{+,-}(0;0.5)=f(+0;0.5-0)=2 \\ f^{-,-}(0.5;0.5)=f(0.5-0;0.5-0)=1 \\ f^{-,+}(0.5;0)=f(0.5-0;+0)=2 \end{array};\quad \Pi_{12}: \begin{array}{l} f^{+,+}(0;0.5)=f(0+0;0.5+0)=1 \\ f^{+,-}(0;1)=f(0+0;1-0)=2 \\ f^{-,-}(0.5;1)=f(0.5-0;1-0)=1 \\ f^{-,+}(0.5;0.5)=f(0.5-0;0.5+0)=2 \end{array};$$

$$\Pi_{22}: \begin{array}{l} f^{+,-}(0.5;1) = f(0.5+0;1-0) = 4 \\ f^{+,+}(0.5;0.5) = f(0.5+0;0.5+0) = 3 \\ f^{-,-}(1;1) = f(1-0;1-0) = 3 \\ f^{-,+}(1;0.5) = f(1-0;0.5+0) = 4 \end{array}; \quad \Pi_{21}: \begin{array}{l} f^{+,+}(0.5;0) = f(0.5+0;0+0) = 3 \\ f^{+,-}(0.5;0.5) = f(0.5+0;0.5-0) = 4 \\ f^{-,-}(1;0.5) = f(1-0;0.5-0) = 3 \\ f^{-,+}(1;0) = f(1-0;0+0) = 4 \end{array}.$$

Разрывный сплайн будем строить в виде:

$$S(x,y) =$$

$$= \begin{cases} f^{+,+}(0;0)\dfrac{x-x_1}{x_0-x_1}\dfrac{y-y_1}{y_0-y_1} + f^{-,+}(0.5;0)\dfrac{x-x_0}{x_1-x_0}\dfrac{y-y_1}{y_0-y_1} + \\ + f^{+,-}(0;0.5)\dfrac{x-x_1}{x_0-x_1}\dfrac{y-y_0}{y_1-y_0} + f^{-,-}(0.5;0.5)\dfrac{x-x_0}{x_1-x_0}\dfrac{y-y_0}{y_1-y_0}, \quad (x,y)\in\Pi_{11} \\ f^{+,+}(0;0.5)\dfrac{x-x_1}{x_0-x_1}\dfrac{y-y_2}{y_1-y_2} + f^{-,+}(0.5;0.5)\dfrac{x-x_2}{x_1-x_2}\dfrac{y-y_2}{y_1-y_2} + \\ + f^{+,-}(0;1)\dfrac{x-x_1}{x_0-x_1}\dfrac{y-y_1}{y_2-y_1} + f^{-,-}(0.5;1)\dfrac{x-x_0}{x_1-x_0}\dfrac{y-y_1}{y_2-y_1}, \quad (x,y)\in\Pi_{12} \\ f^{+,+}(0.5;0)\dfrac{x-x_2}{x_1-x_2}\dfrac{y-y_1}{y_0-y_1} + f^{-,+}(1;0)\dfrac{x-x_1}{x_2-x_1}\dfrac{y-y_1}{y_0-y_1} + \\ + f^{+,-}(0.5;0.5)\dfrac{x-x_2}{x_1-x_2}\dfrac{y-y_0}{y_1-y_0} + f^{-,-}(1;0.5)\dfrac{x-x_1}{x_2-x_1}\dfrac{y-y_0}{y_1-y_0}, \quad (x,y)\in\Pi_{21} \\ f^{+,+}(0.5;0.5)\dfrac{x-x_2}{x_1-x_2}\dfrac{y-y_2}{y_1-y_2} + f^{-,+}(1;0.5)\dfrac{x-x_1}{x_2-x_1}\dfrac{y-y_2}{y_1-y_2} + \\ + f^{+,-}(0.5;1)\dfrac{x-x_2}{x_1-x_2}\dfrac{y-y_1}{y_2-y_1} + f^{-,-}(1;1)\dfrac{x-x_1}{x_2-x_1}\dfrac{y-y_1}{y_2-y_1}, \quad (x,y)\in\Pi_{22} \end{cases} =$$

$$= \begin{cases} 2x+2y-8xy+1, & (x,y)\in\Pi_{11} \\ -10x-6y+8+8xy, & (x,y)\in\Pi_{12} \\ -4xy+2x+2y+2\ , & (x,y)\in\Pi_{21} \\ -8xy+6x+6y-1, & (x,y)\in\Pi_{22} \end{cases}.$$

Как видим, функция $S(x,y)$ на границе между элементами Π_{11} и Π_{21} при $x<x_1$ будет иметь следующие следы:

$$S_{11}(x_1,y) = f^{-,+}(0.5;0)\frac{y-y_1}{y_0-y_1} + f^{-,-}(0.5;0.5)\frac{y-y_0}{y_1-y_0},\ y_0 \le y \le y_1.$$

Аналогично

$$S_{21}(x_1,y)=f^{+,+}(0.5;0)\frac{y-y_1}{y_0-y_1}+f^{+,-}(0.5;0.5)\frac{y-y_0}{y_1-y_0},\quad y_0\le y\le y_1 .$$

То есть, если $f^{-,+}(0.5,0)\neq f^{+,+}(0.5,0)$, то в точке $(0.5;0)$ такой сплайн будет разрывным. Кроме того, если в точке $f^{+,+}(0.5;0.5)\neq f^{+,-}(0.5;0.5)$, то сплайн будет разрывным на всей линии $x=0.5,\ \ y_0\le y\le y_1$.

Зададим приближаемую функцию в виде

$$f(x,y)=S_{ij}(x,y)+\frac{(x-x_{i-1})(x_i-x)(y-y_{j-1})(y_j-y)}{4},\ (x,y)\in\Pi_{i,j},\ i,j=1,2 .$$

Таким образом, в каждом из четырех элементов задания приближаемая функция имеет частную производную $f^{2,2}(x,y)\equiv 1,\ \forall (x,y)\in\Pi_{ij}$. Поэтому, согласно теории, погрешность приближения такой разрывной функции, вышеописанным разрывным сплайном, будет удовлетворять неравенству:

$$\max_{(x,y)\in\Pi_{ij}}\left|f(x,y)-S_{i,j}(x,y)\right|\le f^{(2,2)}(\xi,\eta)\cdot\frac{\Delta i^2\Delta j^2}{2!\cdot 2!}=1\cdot\frac{(0.5)^2(0.5)^2}{2!\cdot 2!}=\frac{1}{64}\approx 0.016 .$$

Заключение. Таким образом, в данной статье предложен общий метод построения разрывных сплайн-интерлинантов, которые как частный случай включают в себя разрывные сплайны и непрерывно-дифференцируемые сплайны до порядка $\rho-1$ по каждой переменной. Сформулированы и доказаны теоремы об интерлинационных свойствах таких разрывных конструкций и их апроксимационных свойствах. В частности, из этих свойств вытекает следующая точка зрения авторов: разрывные в некоторых точках или на некоторых линиях функции от двух переменных лучше приближать разрывными сплайн-интерлинантами. При этом можно получить одинаково высокие оценки погрешноси приближения в каждом элементе разбиения, которые присущи непрерывно-дифференцируемым сплайн-интерлинантам.

Следующим шагом авторы планируют разработку теории разрывных сплайнов на областях сложной формы, ограниченных дугами известных кривых.

Данная работа выполнена при поддержке Государственного фонда фундаментальных исследований Грантом Президента Украины.

О.М. Литвин, Ю.І. Першина

НАБЛИЖЕННЯ РОЗРИВНОЇ ФУНКЦІЇ ДВОХ ЗМІННИХ ЗА ДОПОМОГОЮ РОЗРИВНИХ СПЛАЙНІВ ДВОХ ЗМІННИХ (ПРЯМОКУТНІ ЕЛЕМЕНТИ)

Запропонований загальний метод побудови розривних інтерлінаційних поліноміальних сплайнів, які як частинний випадок включають у себе розривні та неперервно-диференційовні сплайни. Сформульовані та доведені теореми про інтерлінаційні та апроксимаційні властивості таких розривних конструкцій.

O.N. Lytvyn, Y.I. Pershina

APPROXIMATION OF DISCONTINUOUS FUNCTIONS OF TWO VARIABLES
USING DISCONTINUOUS SPLINES IN TWO VARIABLES (RECTANGULAR ELEMENTS)

A general method for constructing discontinuous interlinational polynomial splines, which as a special case includes discontinuously and continuously differentiable splines, is proposed. Theorems on interlinational and approximation properties of discontinuous structures are formulated and proved.

1. *Литвин О.М., Першина Ю.І.* Наближення розривної функції за допомогою розривних сплайнів. – Інформатика та системні науки (ІСН-2010): матеріали Всеукраїнської науково-практичної конференції 18–20 березня 2010 р. / За ред. д.ф.-м.н., проф. Ємця О.О. – Полтава. –2010. – С. 111–113.
2. *Стечкин С.Б., Субботин Ю.Н.* Сплайны в вычислительной математике. – М.: Наука, 1976. – 248 с.
3. *Завьялов Ю.С., Квасов Б.И., Мирошниченко В.Л.* Методы сплайн-функций. – М.: Наука, 1976. – 352 с.
4. *Василенко В.А.* Сплайн-функции: теория, алгоритмы, программы. – Новосибирск: Наука, 1983. – 214 с.
5. *Литвин О.М., Литвин О.О.* Про один метод розв'язання 3*D* задачі комп'ютерної томографії // Тезисы докладов Международной конференции АППММ'06. – Харків: ІПМАШ ім. А.М. Підгорного. – 2006. – С. 18.
6. *Литвин О.М.* Інтерлінація функцій та деякі її застосування. – Харків: Основа, 2002. – 504 с.

Получено 16.12.2010

Об авторах:

Литвин Олег Николаевич,
доктор физико-математических наук, профессор,
заведующий кафедрой высшей и прикладной математики
Украинской инженерно-педагогической академии,
academ@kharkov.ua

Першина Юлия Игоревна,
кандидат физико-математических наук, старший научный сотрудник
кафедры высшей и прикладной математики
Украинской инженерно-педагогической академии.
yulia_pershina@mail.ru