КОМПЬЮТЕРНАЯ МАТЕМАТИКА

УДК 519.6

Т.Т. ЛЕБЕДЕВА, Т.И. СЕРГИЕНКО

УСЛОВИЯ УСТОЙЧИВОСТИ ВЕКТОРНЫХ ЦЕЛОЧИСЛЕННЫХ ЗАДАЧ ПОИСКА РЕШЕНИЙ, ОПТИМАЛЬНЫХ ПО СМЕЙЛУ

Исследованы вопросы, касающиеся одного типа устойчивости к возмущениям исходных данных векторных задач целочисленной оптимизации на конечном множестве. Получен ряд новых необходимых и достаточных условий устойчивости для задач поиска решений, оптимальных по Смейлу.

Введение. В данной работе продолжены исследования устойчивости многокритериальных (векторных) задач целочисленной оптимизации, ориентированные на изучение условий, при которых множеству оптимальных по Парето, Слейтеру или Смейлу решений той или иной задачи присуще некоторое наперед заданное свойство, определенным образом характеризующее ее устойчивость к малым возмущениям исходных данных [1–5]. Известны пять различных типов (T_1, T_2, T_3, T_4, T_5) устойчивости задач указанного класса. Здесь изучены вопросы, касающиеся одного типа устойчивости (T_3-устойчивости) векторной квадратичной задачи оптимизации на конечном множестве. Получен ряд новых необходимых и достаточных условий устойчивости в случае поиска решений, оптимальных по Смейлу.

Рассмотрим задачу

$$Z(M(F,X)):\ \max\{F(x) \mid x\in X\},$$

которая заключается в максимизации векторного критерия $F=(f_1,...,f_\ell)$,

где $f_i : R^n \to R^1$, $f_i(x)=\langle x, D_i x\rangle + \langle c_i, x\rangle$ – квадратичные функции, $D_i \in R^{n\times n}$, $c_i = (c_{i1},...,c_{in})\in R^n$, $i\in N_\ell=\{1,\ldots,\ell\}$, $\ell\geq 2$, на конечном множестве $X=G\bigcap Z^n$ целочисленных точек выпуклого многогранника $G=G(A,b)=\{x\in R^n \mid Ax\leq b\}$, где $2\leq |X|<\infty$,

Z^n – множество всех целочисленных векторов в R^n, $A=\left[a_{ij}\right]\in R^{m\times n}$, $b=(b_1,...,b_m)\in R^m$. Обычно векторную задачу $Z(M(F,X))$, где $M(F,X)\in \in \mathfrak{M}=\{P(F,X),Sl(F,X),Sm(F,X)\}$, рассматривают как задачу поиска элементов одного из множеств: $P(F,X)$ – множества Парето-оптимальных (эффективных) решений, $S\ell(F,X)$ – множества оптимальных по Слейтеру (слабо эффективных) решений, $Sm(F,X)$ – множества оптимальных по Смейлу (строго эффективных) решений, где

$$P(F,X)=\{x\in X \mid \pi(x,F,X)=\varnothing\},$$
$$S\ell(F,X)=\{x\in X \mid \sigma(x,F,X)=\varnothing\},$$
$$Sm(F,X)=\{x\in X \mid \eta(x,F,X)=\varnothing\},$$

$\pi(x,F,X)=\{y\in X \mid F(y)\geq F(x),\ F(y)\neq F(x)\}$, $\sigma(x,F,X)=\{y\in X \mid F(y)>F(x)\}$, $\eta(x,F,X)=\{y\in X \mid y\neq x,\ F(y)\geq F(x)\}$. Легко видеть, что

$$Sm(F,X)\subset P(F,X)\subset S\ell(F,X). \tag{1}$$

Пусть $u=(u_1,u_2)$ – набор исходных данных задачи $Z(M(F,X))$, где $M(F,X)\in\mathfrak{M}$, являющийся элементом некоторого пространства U исходных данных, которое можно представить как декартово произведение $U=U_1\times U_2$ пространства U_1 исходных данных для описания векторного критерия F и пространства U_2 исходных данных для описания допустимого множества X.

Положим $u_1=(D,C)\in U_1\subset R^{n\times n\times\ell}\times R^{\ell\times n}$, где $D=(D_1,...,D_\ell)\in R^{n\times n\times\ell}$, $C=\left[c_{ij}\right]\in R^{\ell\times n}$, и $u_2=(A,b)\in U_2\subset R^{m\times n}\times R^m$.

Для набора $u=(u_1,u_2)\in U$ исходных данных задачи $Z(M(F,X))$ и любого числа $\delta>0$ определим множество $O_\delta(u)$ возмущенных исходных данных задачи согласно следующим формулам:

$$O_\delta(u)=\{u(\delta)=(u_1(\delta),u_2(\delta)) \mid u_1(\delta)\in O_\delta(u_1),\ u_2(\delta)\in O_\delta(u_2)\} \tag{2}$$

– при рассмотрении возмущений всех исходных данных задачи,

$$O_\delta(u)=\{u(\delta)=(u_1(\delta),u_2(\delta)) \mid u_1(\delta)=u_1,\ u_2(\delta)\in O_\delta(u_2)\} \tag{3}$$

– при рассмотрении возмущений исходных данных только в ограничениях,

$$O_\delta(u)=\{u(\delta)=(u_1(\delta),u_2(\delta)) \mid u_1(\delta)\in O_\delta(u_1),\ u_2(\delta)=u_2\} \tag{4}$$

– при рассмотрении возмущений исходных данных только для векторного критерия. Здесь $O_\delta(u_i)=\{u_i(\delta)\in U_i \mid \|u_i(\delta)-u_i\|_i<\delta\}$, где $\|\cdot\|_i$ – норма в пространстве U_i, $i=1,2$. Символами $F_{u_1(\delta)}$ и $X_{u_2(\delta)}$ будем пользоваться для обозначения соответственно векторного критерия и допустимой области задачи при возмущенных исходных данных $u(\delta)=(u_1(\delta),u_2(\delta))\in O_\delta(u)$.

Исследуем условия T_3-устойчивости задачи $Z(M(F,X))$ относительно возможных возмущений набора $u=(u_1,u_2)$ ее исходных данных.

Определение 1. Задачу $Z(M(F,X))$, где $M(F,X)\in\mathfrak{M}$, назовем T_3-устойчивой (T_3-устойчивой по ограничениям, T_3-устойчивой по векторному критерию), если найдется такое число $\delta>0$, что включение

$$M\left(F_{u_1(\delta)},X_{u_2(\delta)}\right)\subset M(F,X)$$

выполняется для любого набора $u(\delta)=(u_1(\delta),u_2(\delta))\in O_\delta(u)$, где множество $O_\delta(u)$ определяется согласно формуле (2) (соответственно согласно формуле (3), если речь идет о T_3-устойчивости по ограничениям, или согласно формуле (4), если речь идет о T_3-устойчивости по векторному критерию).

Нам понадобятся также понятия T_4- и T_5-устойчивости.

Определение 2. Задачу $Z(M(F,X))$, где $M(F,X)\in\mathfrak{M}$, назовем T_4-устойчивой (T_4-устойчивой по ограничениям, T_4-устойчивой по векторному критерию), если найдется такое число $\delta>0$, что включение

$$M(F,X)\subset M\left(F_{u_1(\delta)},X_{u_2(\delta)}\right)$$

выполняется для любого набора $u(\delta)=(u_1(\delta),u_2(\delta))\in O_\delta(u)$, где множество $O_\delta(u)$ определяется согласно формуле (2) (соответственно согласно формулам (3) или (4)).

Определение 3. Задачу $Z(M(F,X))$, где $M(F,X)\in\mathfrak{M}$, назовем T_5-устойчивой (T_5-устойчивой по ограничениям, T_5-устойчивой по векторному критерию), если найдется такое число $\delta>0$, что включение

$$M(F,X)=M\left(F_{u_1(\delta)},X_{u_2(\delta)}\right)$$

выполняется для любого набора $u(\delta)=(u_1(\delta),u_2(\delta))\in O_\delta(u)$, где множество $O_\delta(u)$ определяется согласно формуле (2) (соответственно согласно формулам (3) или (4)).

Очевидно, что задача $Z(M(F,X))$, где $M(F,X)\in\mathfrak{M}$, является T_5-устойчивой (T_5-устойчивой по ограничениям, T_5-устойчивой по векторному критерию) тогда и только тогда, когда она T_3- и T_4-устойчива (соответственно T_3- и T_4-устойчива по ограничениям, T_3- и T_4-устойчива по векторному критерию).

В дальнейшем воспользуемся следующими утверждениями об устойчивости задачи к возмущениям исходных данных, необходимых для описания векторного критерия.

Утверждение 1 [2]. Задача $Z(Sl(F,X))$ T_3-устойчива по векторному критерию.

Утверждение 2 [2]. Задача $Z(Sm(F,X))$ T_4-устойчива по векторному критерию.

Утверждение 3 [4]. Задача $Z(Sl(F,X))$ T_3-устойчива тогда и только тогда, когда она T_3-устойчива по ограничениям.

Утверждение 4 [2]. Задача $Z(M(F,X))$, где $M(F,X) \in \{P(F,X), Sm(F,X)\}$, T_3-устойчива по векторному критерию тогда и только тогда, когда

$$M(F,X) = Sl(F,X).$$

Утверждение 5 [2]. Задача $Z(M(F,X))$, где $M(F,X) \in \{Sl(F,X), P(F,X)\}$, T_4-устойчива по векторному критерию тогда и только тогда, когда

$$M(F,X) = Sm(F,X).$$

Из утверждений 4 и 5 вытекают такие очевидные следствия.

Следствие 1. Задача $Z(Sm(F,X))$ T_3-устойчива по векторному критерию тогда и только тогда, когда задача $Z(Sl(F,X))$ T_4-устойчива по векторному критерию.

Следствие 2. Задача $Z(Sm(F,X))$ T_3-устойчива по векторному критерию тогда и только тогда, когда задача $Z(P(F,X))$ является T_3- и T_4-устойчивой по векторному критерию.

Следствие 3. Задача $Z(M(F,X))$, где $M(F,X) \in \mathfrak{M}$, T_5-устойчива по векторному критерию тогда и только тогда, когда

$$Sl(F,X) = P(F,X) = Sm(F,X). \tag{5}$$

Имеет место также следующая теорема об условиях T_3-устойчивости по векторному критерию задачи $Z(Sm(F,X))$.

Теорема 1. Если задача $Z(Sm(F,X))$ T_3-устойчива по векторному критерию, то $\exists \delta > 0$, такое, что $\forall u_1(\delta) \in O_\delta(u_1)$:

$$Sm(F,X) = Sm\left(F_{u_1(\delta)}, X\right) = P(F,X) = P\left(F_{u_1(\delta)}, X\right) = Sl(F,X) = Sl\left(F_{u_1(\delta)}, X\right). \tag{6}$$

Доказательство. Из условия данной теоремы о T_3-устойчивости по векторному критерию задачи $Z(Sm(F,X))$, а также из утверждения 2 о T_4-устойчивости по векторному критерию этой задачи вытекает, что она и T_5-устойчива по векторному критерию. Отсюда, принимая во внимание следствие 3, делаем вывод о T_5-устойчивости по векторному критерию и задач $Z(Sl(F,X))$, $Z(P(F,X))$. Учитывая определение 3, заключаем, что $\exists \delta > 0$, такое, что $\forall u_1(\delta) \in O_\delta(u_1)$: $Sm(F,X) = Sm\left(F_{u_1(\delta)}, X\right)$, $Sl(F,X) = Sl\left(F_{u_1(\delta)}, X\right)$, $P(F,X) = P\left(F_{u_1(\delta)}, X\right)$. Привлекая формулу (5), приходим к соотношениям (6), справедливым для любого $u_1(\delta) \in O_\delta(u_1)$.

Легко показать, что из теоремы 1 и следствия 3 вытекает такое утверждение.

Следствие 4. Если задача $Z(Sm(F,X))$ T_3-устойчива по векторному критерию, то $\exists\delta>0$, такое, что любая задача $Z(M(F_{u_1(\delta)},X))$, где $M(F,X)\in\mathfrak{M}$, $u_1(\delta)\in O_\delta(u_1)$, является T_5-устойчивой по векторному критерию.

Исходя из теоремы 1, получаем также следующий результат.

Следствие 5. Если задача $Z(Sm(F,X))$ T_3-устойчива по векторному критерию и T_3-устойчива по ограничениям, то $\exists\delta>0$, такое, что $\forall u_1(\delta)\in O_\delta(u_1)$, $\forall u_2(\delta)\in O_\delta(u_2)$:

$$Sm(F,X_{u_2(\delta)})\subset Sm\left(F_{u_1(\delta)},X\right).$$

Рассмотрим далее условия T_3-устойчивости задачи $Z(M(F,X))$, $M(F,X)\in\mathfrak{M}$, к возмущениям всех ее исходных данных. Очевидными являются следующие необходимые условия T_3-устойчивости.

Теорема 2. Если задача $Z(M(F,X))$, где $M(F,X)\in\mathfrak{M}$, T_3-устойчива, то она T_3-устойчива по векторному критерию и T_3-устойчива по ограничениям.

Для задачи $Z(Sl(F,X))$ поиска решений, оптимальных по Слейтеру, необходимые условия T_3-устойчивости, указанные в теореме 2, являются одновременно и достаточными. Более того, учитывая утверждение 1, для T_3-устойчивости этой задачи необходима и достаточна лишь ее T_3-устойчивость по ограничениям, о чем говорится в утверждении 3.

Для векторной задачи $Z(P(F,X))$ поиска Парето-оптимальных решений имеют место следующие необходимые и достаточные условия T_3-устойчивости.

Утверждение 6 [3]. Задача $Z(P(F,X))$ T_3-устойчива тогда и только тогда, когда выполняются два условия:

1) задача $Z(P(F,X))$ T_3-устойчива по векторному критерию;
2) задача $Z(Sl(F,X))$ T_3-устойчива по ограничениям.

Перейдем к изучению условий T_3-устойчивости задачи $Z(Sm(F,X))$ поиска решений, оптимальных по Смейлу.

Теорема 3. Задача $Z(Sm(F,X))$ T_3-устойчива тогда и только тогда, когда выполняются два условия:

1) задача $Z(Sm(F,X))$ T_3-устойчива по векторному критерию;
2) $\exists\delta>0$, такое, что $\forall u_1(\delta)\in O_\delta(u_1), \forall u_2(\delta)\in O_\delta(u_2)$:

$$Sm\left(F_{u_1(\delta)},X_{u_2(\delta)}\right)\subset Sm(F_{u_1(\delta)},X)\,. \tag{7}$$

Доказательство. Достаточность. Пусть задача $Z(Sm(F,X))$ удовлетворяет обоим условиям теоремы. В соответствии с определением 1 T_3-устойчивость по векторному критерию задачи $Z(Sm(F,X))$ означает: $\exists\delta'>0$, такое, что

$\forall u_1(\delta')\in O_{\delta'}(u_1)$: $Sm\left(F_{u_1(\delta')}, X\right)\subset Sm(F,X)$. Учитывая это и принимая во внимание второе условие теоремы, приходим к соотношениям

$$Sm\left(F_{u_1(\delta'')}, X_{u_2(\delta'')}\right)\subset Sm\left(F_{u_1(\delta'')}, X\right)\subset Sm(F,X),$$

справедливым $\forall u_1(\delta'')\in O_{\delta''}(u_1), \forall u_2(\delta'')\in O_{\delta''}(u_2)$ при $\delta''=\min\{\delta,\delta'\}$. Согласно определению 1 делаем вывод, что задача $Z(Sm(F,X))$ T_3-устойчива.

Необходимость. Предположим, что задача $Z(Sm(F,X))$ T_3-устойчива и, следовательно, $\exists\delta^\circ>0$, такое, что $\forall u_1(\delta^\circ)\in O_{\delta^\circ}(u_1)$, $\forall u_2(\delta^\circ))\in O_{\delta^\circ}(u_2)$: $Sm\left(F_{u_1(\delta^\circ)}, X_{u_2(\delta^\circ)}\right)\subset Sm(F,X)$. Из теоремы 2 вытекает, что задача $Z(Sm(F,X))$ будет и T_3-устойчивой по векторному критерию, т.е. удовлетворяет первому условию доказываемой теоремы. Тогда согласно теореме 1 $\exists\overline{\delta}>0$, такое, что $\forall u_1(\overline{\delta})\in O_{\overline{\delta}}(u_1)$: $Sm(F,X)=Sm\left(F_{u_1(\overline{\delta})}, X\right)$. Положив $\delta=\min\{\delta^\circ,\overline{\delta}\}$, делаем вывод, что $\forall u_1(\delta)\in O_\delta(u_1)$, $\forall u_2(\delta)\in O_\delta(u_2)$ имеет место включение (7) и, следовательно, выполняется второе условие данной теоремы.

Замечание 1. Очевидно, если для задачи $Z(Sm(F,X))$ выполняется условие 2) теоремы 3, то любая возмущенная задача $Z(Sm\left(F_{u_1(\delta)}, X\right))$, где $u_1(\delta)\in O_\delta(u_1)$, в том числе и исходная задача $Z(Sm(F,X))$, будет T_3-устойчивой по ограничениям.

Теорема 4. Если задача $Z(Sm(F,X))$ удовлетворяет двум условиям:

1) $\exists\delta>0$, такое, что $\forall u_1(\delta)\in O_\delta(u_1), \forall u_2(\delta)\in O_\delta(u_2)$:

$$Sm\left(F_{u_1(\delta)}, X_{u_2(\delta)}\right)\subset Sm(F, X_{u_2(\delta)});$$

2) задача $Z(Sm(F,X))$ T_3-устойчива по ограничениям,

то эта задача T_3-устойчива.

Доказательство. В соответствии с определением 1 T_3-устойчивость по ограничениям задачи $Z(Sm(F,X))$ означает: $\exists\delta'>0$, такое, что $\forall u_2(\delta')\in O_{\delta'}(u_2)$: $Sm\left(F, X_{u_2(\delta')}\right)\subset Sm(F,X)$. Принимая также во внимание первое условие доказываемой теоремы, получаем соотношения

$$Sm\left(F_{u_1(\delta'')}, X_{u_2(\delta'')}\right)\subset Sm\left(F, X_{u_2(\delta'')}\right)\subset Sm(F,X),$$

справедливые $\forall u_1(\delta'')\in O_{\delta''}(u_1)$, $\forall u_2(\delta'')\in O_{\delta''}(u_2)$ при $\delta''=\min\{\delta,\delta'\}$. Приходим к выводу о том, что задача $Z(Sm(F,X))$ T_3-устойчива.

Замечание 2. Очевидно, если задача $Z(Sm(F,X))$ удовлетворяет условию 1) теоремы 4, то любая задача $Z(Sm\left(F,X_{u_2(\delta)}\right))$, где $u_2(\delta)\in O_\delta(u_2)$, в том числе и исходная задача $Z(Sm(F,X))$, будет T_3-устойчивой по векторному критерию.

Теорема 5. Если выполняются два условия:

1) задача $Z(Sm(F,X))$ T_3-устойчива по векторному критерию;

2) задача $Z(Sl(F,X))$ T_3-устойчива по ограничениям, то задача $Z(Sm(F,X))$ T_3-устойчива.

Доказательство. Пусть задача $Z(Sm(F,X))$ T_3-устойчива по векторному критерию, а задача $Z(Sl(F,X))$ T_3-устойчива по ограничениям. Согласно утверждению 3 T_3-устойчивость по ограничениям задачи $Z(Sl(F,X))$ означает, что эта задача является и T_3-устойчивой к возмущениям всех исходных данных. С учетом включений (1) и утверждения 4 становится очевидным, что $\exists\delta>0$, такое, что $\forall u_1(\delta)\in O_\delta(u_1)$, $\forall u_2(\delta)\in O_\delta(u_2)$:

$$Sm(F_{u_1(\delta)},X_{u_2(\delta)})\subset Sl\left(F_{u_1(\delta)},X_{u_2(\delta)}\right)\subset Sl(F,X)=Sm(F,X),$$

что и позволяет сделать вывод о T_3-устойчивости задачи $Z(Sm(F,X))$.

Напомним, что для векторной задачи $Z(P(F,X))$ поиска Парето-оптимальных решений условия, аналогичные сформулированным в теореме 5, являются не только достаточными, но и необходимыми условиями ее T_3-устойчивости, что отражено в утверждении 6.

Заключение. В работе изучены вопросы, касающиеся, в основном, одного типа устойчивости (T_3-устойчивости) векторных задач оптимизации на конечном множестве целочисленных точек выпуклого многогранника. Получен ряд новых необходимых и достаточных условий устойчивости для случая поиска решений, оптимальных по Смейлу.

Т.Т. Лебєдєва, Т.І. Сергієнко

УМОВИ СТІЙКОСТІ ВЕКТОРНИХ ЦІЛОЧИСЛОВИХ ЗАДАЧ ПОШУКУ РОЗВ'ЯЗКІВ, ОПТИМАЛЬНИХ ЗА СМЕЙЛОМ

Досліджені питання, які стосуються одного типу стійкості до збурень вхідних даних векторних задач цілочислової оптимізації на скінченній множині. Отримано ряд нових необхідних і достатніх умов стійкості для задач пошуку розв'язків, оптимальних за Смейлом.

T.T. Lebedeva, T.I. Sergienko

STABILITY CONDITIONS OF VECTOR INTEGER OPTIMIZATION PROBLEMS OF FINDING THE SMALE OPTIMAL SOLUTIONS.

The paper presents the results of investigating one type of stability with respect to perturbations of initial data of vector integer optimization problems with finite set of feasible solutions. Necessary and sufficient conditions are proved for considered version of stability for problems of finding the solutions from the Smale set.

1. *Лебедева Т.Т., Сергиенко Т.И.* Сравнительный анализ различных типов устойчивости по ограничениям векторной задачи целочисленной оптимизации // Кибернетика и системный анализ. – 2004. – № 1. – С. 63–70.
2. *Лебедева Т.Т., Семенова Н.В., Сергиенко Т.И.* Устойчивость векторных задач целочисленной оптимизации: взаимосвязь с устойчивостью множеств оптимальных и неоптимальных решений // Кибернетика и системный анализ. – 2005. – № 4. – С. 90–100.
3. *Лебедева Т.Т., Сергиенко Т.И.* Устойчивость по векторному критерию и ограничениям векторной целочисленной задачи квадратичного программирования // Кибернетика и системный анализ. – 2006. – № 5. – С. 63–72.
4. *Сергиенко Т.И.* Устойчивость по векторному критерию и ограничениям целочисленных задач поиска решений, оптимальных по Слейтеру и Смейлу // Компьютерная математика. – 2008. – № 1. – С. 145–151.
5. *Лебедева Т.Т., Сергиенко Т.И.* Разные типы устойчивости векторной задачи целочисленной оптимизации: общий подход // Кибернетика и системный анализ. – 2008. – № 3. – С. 142–148.

Получено 09.04.2010

Об авторах:

Лебедева Татьяна Тарасовна,
старший научный сотрудник Института кибернетики имени В.М. Глушкова НАН Украины,

Сергиенко Татьяна Ивановна,
научный сотрудник Института кибернетики имени В.М. Глушкова НАН Украины.