КОМПЬЮТЕРНАЯ
МАТЕМАТИКА

УДК 519.854

В.П. ШИЛО, В.А. РОЩИН

АДАПТИВНАЯ ВЫИГРЫШНАЯ СТРАТЕГИЯ ДЛЯ ПРОБЛЕМЫ ДВУХ КОНВЕРТОВ

Рассматривается пороговая стратегия для проблемы двух конвертов. Предлагается подход, позволяющий адаптивно находить оптимальный порог. Приводятся результаты экспериментальных исследований.

Введение. Проблема (парадокс) двух конвертов была сформулирована около 80 лет тому назад [1], но по-прежнему вызывает большой интерес у исследователей, о чем можно судить по многочисленности посвященных ей публикаций [1–10]. В некоторых работах [4, 5] даются объяснения парадокса, в других [6–8] обосновывается неполнота этих объяснений и ведутся дискуссии о том, в чем же собственно состоит парадокс. На фоне этих работ своей практической направленностью выделяется работа [9]. В ней рассматриваются вопросы существования выигрышных стратегий при обмене конвертов. Этой же теме посвящена данная работа, в которой предлагается адаптивная выигрышная стратегия обмена конвертов (рис. 1).

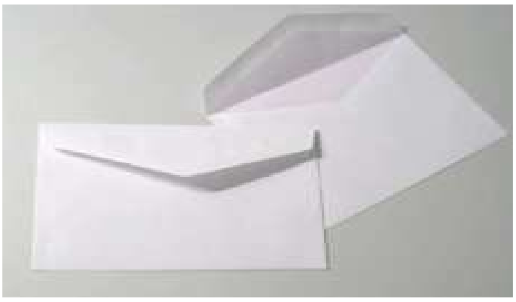


РИС. 1

Проблема двух конвертов уже дала толчок многим исследованиям в области теории вероятностей, теории игр, теории принятия решений [11]. Кроме того, во многих прикладных областях (экономика, фондовые рынки, технические системы, оптимизация) возникают ситуации, подобные выбору между конвертами. Все это и стимулирует интерес к этой проблеме.

Суть проблемы. Парадокс двух конвертов состоит в следующем. Предположим, что вы участвуете в следующей игре: перед вами лежат два одинаковых конверта с деньгами, суммы которых не известны. Известно лишь, что в одном из конвертов находится сумма, в два раза превышающая сумму в другом конверте. Вы можете выбрать любой конверт и посмотреть, какая сумма находится в нем, затем оставить этот конверт с деньгами себе либо поменять его на другой. Далее игра повторяется. Ваша цель – получить по возможности большую сумму денег с помощью некоторой стратегии обмена конвертов. На первый взгляд, вероятность наличия в выбранном вами конверте большей суммы равна вероятности того, что в нем лежит меньшая сумма (это следует из произвольности вашего выбора конверта). Вам не известна процедура, с помощью которой выбираются суммы, положенные в конверт. Далее делается вывод, что с равной вероятностью в другом конверте находится сумма или в два раза меньшая или в два раза большая, чем сумма в выбранном конверте. Но тогда, если в выбранном конверте находится x грн, то математическое ожидание суммы во втором конверте равно $0.5(x/2) + 0.5(2x) = 1.25x$ грн. Получается, что выгодно всегда менять выбранный конверт. Очевидно, что этот вывод вступает в противоречие со здравым смыслом, который говорит о равноценности конвертов. Это и порождает парадокс.

Интуитивно понятно, что стратегии «никогда не менять конверты» и «всегда менять конверты» подобны и не приводят ни к выигрышу, ни к проигрышу. Действительно, если применяется одна из этих стратегий, то открывать конверт ни к чему: увиденная сумма ничего не изменит. Но тогда, в случае первой стратегии, произвольно выбранный конверт не меняется, а в случае второй стратегии всегда меняется, что в среднем приводит к одинаковым результатам. Из этих соображений следует, что стратегия «менять конверты с заданной вероятностью p» подобна первым двум и дает те же результаты. Эти утверждения нетрудно доказать [9].

Подход к решению. Для дальнейшего изложения понадобится некоторая формальная модель. Будем считать, что случайная величина $\xi(\omega)$ принимает значения $k = 0,1,2,\ldots$ с вероятностью $p(k)$. Опишем процедуру генерации сумм в конвертах. Пусть $\bar{\xi}$ – реализация случайной величины $\xi(\omega)$. Тогда в один конверт кладется $\bar{\xi}$ грн, а во второй – либо $2\bar{\xi}$ грн, либо $2\bar{\xi}+1$ грн с равными вероятностями.

Вышеописанные рассуждения приводят к мысли, что все стратегии, не использующие величину суммы в открытом конверте, подобны и дают одинаковый результат. Однако использование этой величины приводит к выигрышным стратегиям [9] в силу того, что открытие конверта ведет к исчезновению равноценности конвертов. Действительно, пусть в открытом конверте мы видим x гривен. Это произойдет, в соответствии с описанной процедурой, при наступлении одного из двух событий $A = \{\xi(\omega) = x/2\}$ или $B = \{\xi(\omega) = x\}$ (здесь и далее при делении в качестве частного рассматривается целая часть числа, например, 3/2=1). Воспользовавшись формулой Байеса, получаем

$$P\{A \mid \text{видим } x \text{ грн.}\} = \frac{0.5P\{A\}}{0.5P\{A\}+P\{B\}} = \frac{0.5p(x/2)}{0.5p(x/2)+p(x)},$$

$$P\{B \mid \text{видим } x \text{ грн.}\} = \frac{P\{B\}}{0.5P\{A\}+P\{B\}} = \frac{p(x)}{0.5p(x/2)+p(x)},$$

где $P\{A\}$– вероятность события A, $p(x)$ – функция вероятности.

Таким образом, после открытия конверта условная вероятность наличия во втором конверте $x/2$ грн равна $\frac{0.5p(x/2)}{0.5p(x/2)+p(x)}$, а вероятность того, что в нем находится $2x$ грн, равна $\frac{p(x)}{0.5p(x/2)+p(x)}$. Следовательно, математическое ожидание E суммы во втором конверте равно $\frac{x\left(0.25p(x/2)+2p(x)\right)}{0.5p(x/2)+p(x)}$, и оптимальная стратегия обмена конвертов состоит в том, чтобы менять конверты при $x \le E$ и не менять их в противном случае.

Однако реализация такой стратегии требует знания вероятностей $p(k)$, $k = 0,1,2,\ldots$, которым мы не обладаем. Рассмотрим стратегию обмена конвертов, использующую некоторое заданное пороговое значение h. Пусть в открытом конверте находится x гривен. Тогда при $x > h$ обмен конвертов не производится, в противном случае происходит обмен конвертов. Проанализируем эту стратегию. Рассмотрим три случайных события: $A = \{\xi(\omega) \le h/2\}$, $B = \{h/2 < \xi(\omega) \le h\}$ и $C = \{\xi(\omega) > h\}$. Очевидно, что при наступлении событий A и B всегда происходит обмен конвертов, а при наступлении события C этого обмена нет.

В силу произвольности выбора первого конверта очевидно, что при наступлении событий *A* и *C* выигрыша / проигрыша в среднем не будет. А вот при наступлении события *B* с вероятностью 0.5 будет выигрыш реализации $\bar{\xi}$ случайной величины $\xi(\omega)$, так что средний выигрыш составит $0.5\sum_{k=h/2}^{h} kp(k)$.

Вышеприведенные рассуждения делают понятной идею адаптивной стратегии. После каждого розыгрыша конвертов пороговое значение выбирается таким образом, чтобы сумма $\sum_{\xi_i \in [\bar{h}/2,h]} \bar{\xi}_i$ была максимальной, где $\bar{\xi}_i$, i = 1,.., n − реализации случайной величины $\xi(\omega)$, а n – число розыгрышей.

Рассмотрим следующую процедуру, задав величину *d*.

Шаг 1. Инициализация: $H = k = 0$, $w_h = n_h = 0$, $h = 0,1,2\ldots$

Шаг 2. Полагаем $k=k+1$. Пусть величина ζ_k с вероятностью 0.5 равна $\bar{\xi}_k$ и с вероятностью 0.5 равна $2\bar{\xi}_k$.

Шаг 3. Если $H + d \le \zeta_k$, конверты обмениваются, иначе обмен не происходит.

Шаг 4. Пусть $\theta_h = \begin{cases} 2\bar{\xi}_k, & \zeta \le h, \\ \zeta, & \zeta > h, \end{cases}$ для всех $h \le H+d$. Полагаем $n_h = n_h + 1$, $w_h = w_h + \theta_h$.

Шаг 5. Находим значение порога h^*, при котором величина w_h / n_h имеет максимальное значение. Полагаем $H = h^*$ и переходим на шаг 2.

Если $n_h \to \infty$, то очевидно, что при применении порога h величина w_h / n_h стремится к среднему доходу участника. Отсюда следует, что величина *H* сходится к оптимальному значению порога. Описанная процедура позволяет построить адаптивную выигрышную стратегию при задании некоторого числа $d > 0$.

Результаты экспериментальных исследований. Для проверки предложенной адаптивной стратегии был проведен вычислительный эксперимент при $d = 16$. Аналогично [9] моделировалось экспоненциальное распределение с плотностью $f(t)=\frac{1}{3}e^{-\frac{t}{3}}$. Было проведено миллиард имитаций. Вероятности определялись по формуле $p(k)=\int\limits_{ks}^{(k+1)s} f(t)dt$, где s = 0.01.

На рис. 2 приведены графики вероятностей генерации пар (*k*, 2*k*), (*p*1(*k*)); (*k*/2, *k*), (*p*2(*k*)) и график вероятности *p*_see(*k*) увидеть в открытом конверте *k* грн.

На графиках (рис. 3) представлены вероятности *pl*(*k*) и *pg*(*k*) наличия во втором конверте соответственно меньшей или большей суммы по сравнению с содержащимися в открытом конверте *k* грн. График (рис. 4) отражает зависимость математического ожидания суммы денег во втором конверте от суммы, находящейся в открытом конверте. Пересечение этого графика с прямой *y* = *k* определяет оптимальный порог.

График (рис. 5) отражает результаты применения адаптивной процедуры.

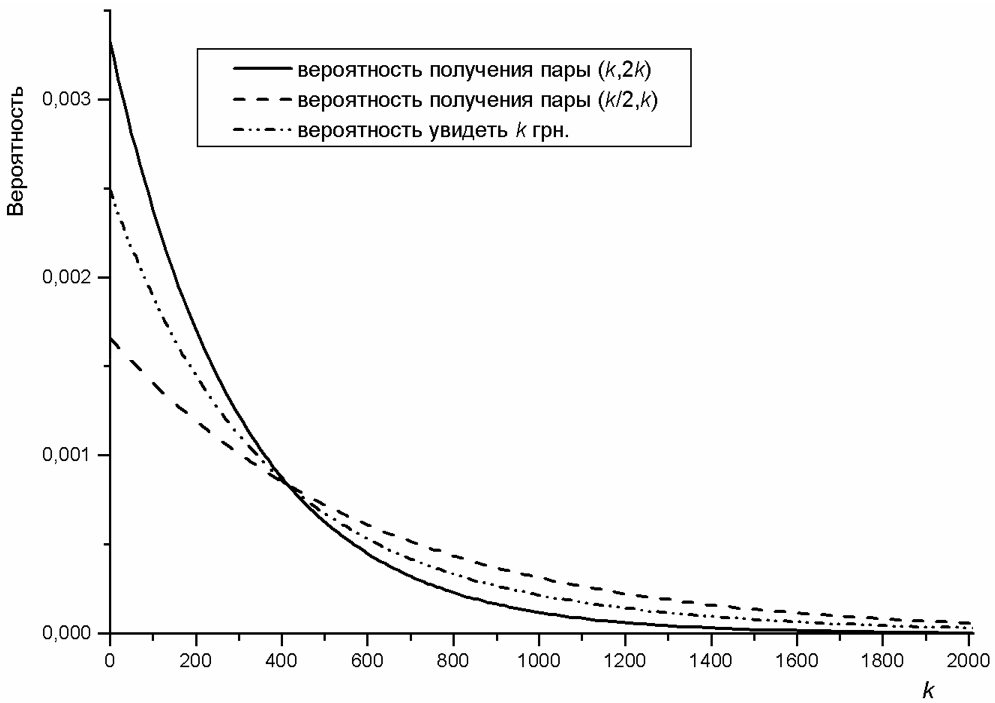
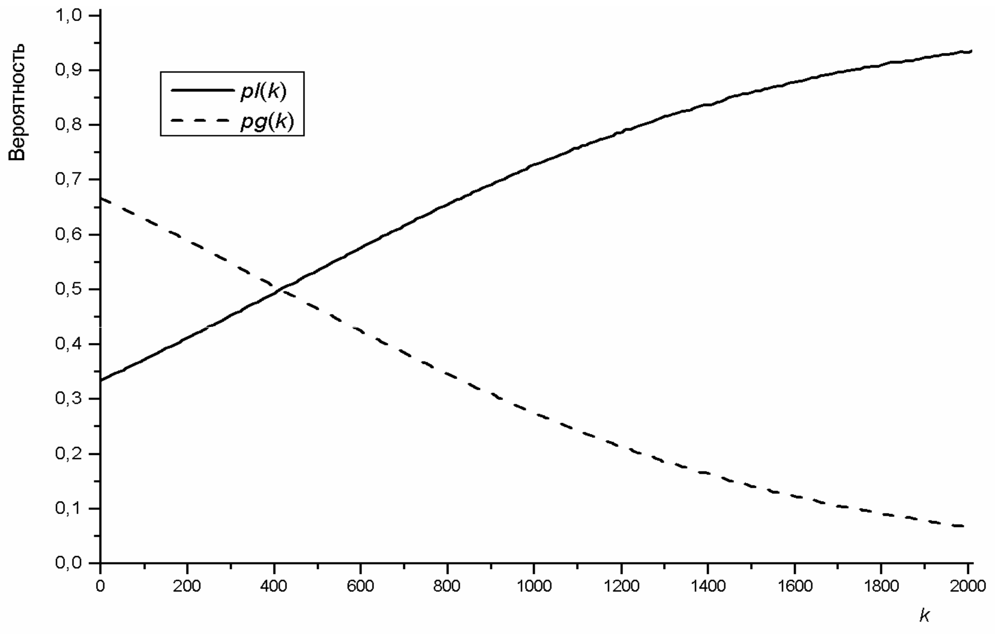
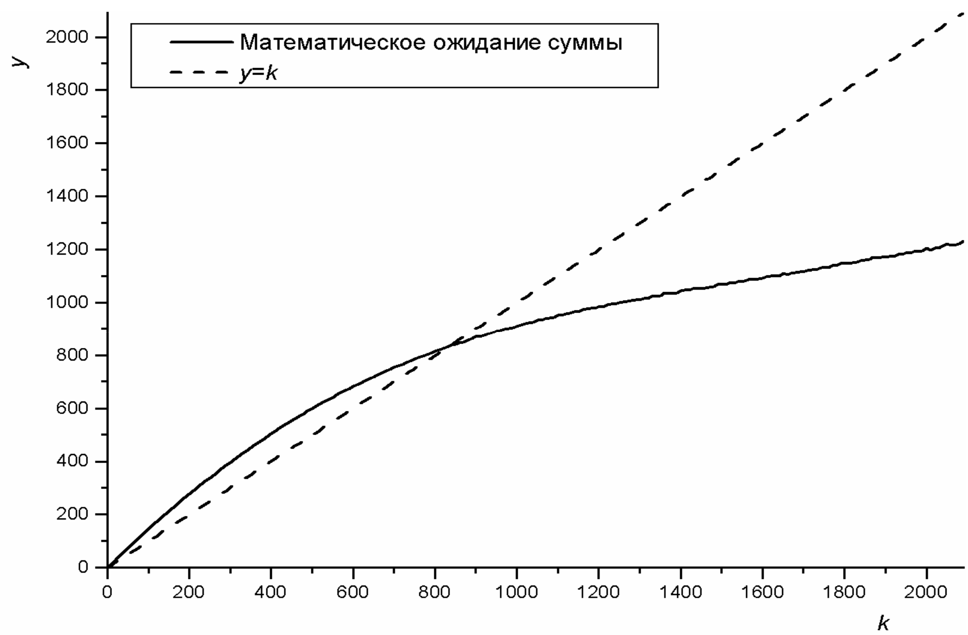


РИС. 2



Вероятность
1,0
0,9
0,8
0,7
0,6
0,5
0,4
0,3
0,2
0,1
0,0
pl(k)
pg(k)
0
200
400
600
800
1000
1200
1400
1600
1800
2000
k

РИС. 3



y
2000
1800
1600
1400
1200
1000
800
600
400
200
0
Математическое ожидание суммы
y=k
0
200
400
600
800
1000
1200
1400
1600
1800
2000
k

РИС. 4

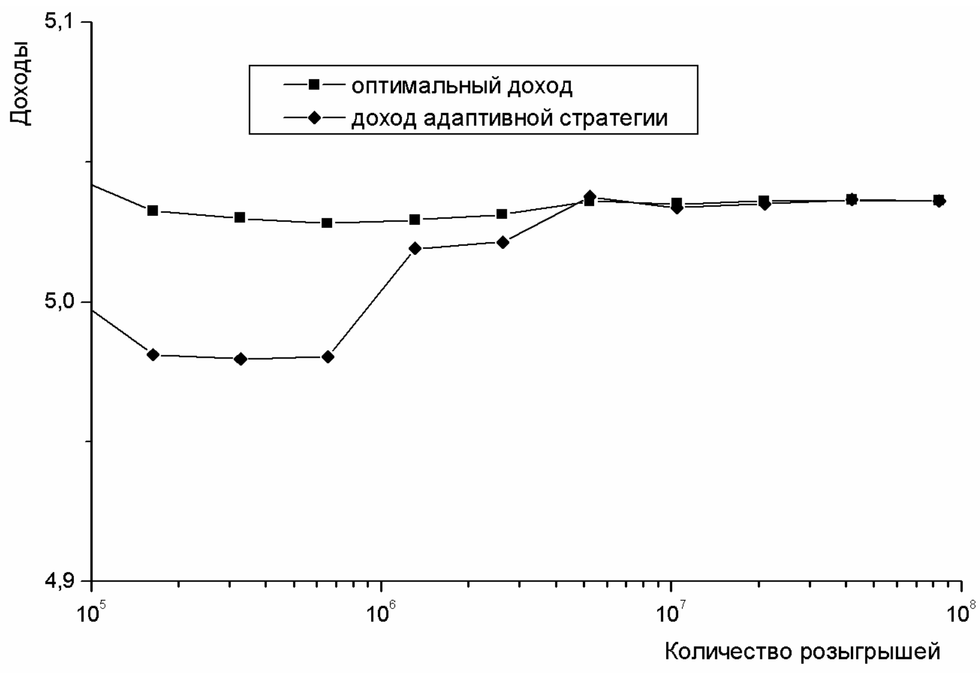


РИС. 5

Как видно из приведенных графиков, уже после сотни имитаций выигрыши от адаптивной стратегии и от стратегии с оптимальным значением порога практически совпадают, хотя и наблюдаются колебания значения настраиваемого порога вокруг оптимального.

Заключение. Из вышесказанного следует, что до открытия конвертов ситуация является симметричной. Однако после открытия одного конверта оба конверта уже не равноценны, а их обмен с использованием порога позволяет получать выигрыш при большом числе розыгрышей. Это похоже на парадокс «кота Шредингера»”, что близко к проблеме влияния наблюдателя на результат наблюдения и свидетельствует о близости данной тематики к неким основам природы. Целесообразно и далее продолжать исследования в этом направлении, поскольку рассматриваемая проблема имеет, как отмечалось выше, много возможных приложений, например, фондовый рынок и др.

В.П. Шило, В.О. Рощин

АДАПТИВНА ВИГРАШНА СТРАТЕГІЯ ДЛЯ ПРОБЛЕМИ ДВОХ КОНВЕРТІВ

Розглядається порогова стратегія для проблеми двох конвертів. Пропонується підхід, який дозволяє адаптивно знаходити оптимальний поріг. Наводяться результати експериментальних досліджень.

V.P. Shylo, V.O. Roschyn

ADAPTIVE WINNING STRATEGY FOR THE PROBLEM OF TWO ENVELOPES

Threshold strategy for a problem of two envelopes is considered. The paper proposes an approach to obtain optimum threshold. The results of computing experiments are given.

1. *Kraitchik M*. Le paradoxe des cravates. In La mathematique des jeux. – Bruxelles, Belgium: Imprimerie Stevens Frères, 1930. – 253 p.
2. *Zabell S*. Loss and gain: the exchange paradox. In Bayesian Statistics, Proc. 3rd Valencia Int. Meeting (eds J.M. Bernardo, M.H. DeGroot, D.V. Lindley & A.F.M. Smith), Oxford, UK: Clarendon Press. –1988. – P. 233–236.
3. *Agnew R*.A. On the two-box paradox // Math. Mag. – 2004 . – **7**. – P. 302–308.
4. *Christensen R*., *Utts J*. Bayesian resolution of the «exchange paradox» // Am. Stat. – 1992. – **46**. – P. 274–276.
5. *McGrew T*., *Shier D*., *Silverstein H*. The two-envelope paradox resolved // Analysis. – 1997. – **57**. – P. 28–33.
6. *Castell P*., *Batens D*. The two envelope paradox: the infinite case // Analysis. – 1994. – **54**. – P. 46–49.
7. *Clark M*., *Shackel N*. The two-envelope paradox // Mind. – 2000. –**109**. – P. 415–442.
8. *Albers C.J*., *Kooi B.P*., *Schaafsma W*. Trying to solve the two-envelope problem // Synthese. – 2005. –**145**. – P. 89–109.
9. *Varshamov R.R.* A class of codes for asymmetric channels and a problem from the additive theory of numbers // IEEE Trans. Inform. Theory. – 1973. – **19**. – P. 92 –95.
10. *McDonnell M.D., Abbott D*. Randomized switching in the two-envelope problem // Proc. R. Soc. A. – 2009. – **465**, N 2111. – P. 3309–3322.
11. *Abbott D*. Overview: unsolved problems of noise and fluctuations // Chaos. – 2001. – **11**, N 3. – P. 526–538.

Получено 26.01.2010

Об авторах:

Шило Владимир Петрович,
доктор физико-математических наук, ведущий научный сотрудник
Института кибернетики имени В.М. Глушкова НАН Украины,
e-mail: v.shylo@gmail.com

Рощин Валентина Алексеевна,
кандидат физико-математических наук, старший научный сотрудник
Института кибернетики имени В.М. Глушкова НАН Украины.
e-mail: d135@i.com.ua