КОМПЬЮТЕРНАЯ МАТЕМАТИКА

Экспертные системы, методы индуктивного вывода

Предлагается ярусный подход к представлению байесовских сетей, который позволяет отслеживать существующие в них информационные взаимосвязи, обеспечивает содержательную интерпретацию полученных результатов и обосновывает корректность избранного порядка перебора каузальных отношений. Подход позволяет избежать дублирования вычислений в пределах доступного объема памяти и может быть использован для создания методов анализа нечетких байесовских сетей при параллельной организации вычислений.

УДК 681.3: 06.51

О.В. ВЕРЕВКА, И.Н. ПАРАСЮК

ЯРУСНЫЙ ПОДХОД К ПРЕДСТАВЛЕНИЮ БАЙЕСОВСКИХ СЕТЕЙ

Процесс решения задач на байесовских сетях (БС) обычно происходит в два этапа: на первом этапе оцениваются вероятности для всех переменных сети, на втором – осуществляется перераспределение и оценивание вероятностей переменных с учетом поступившей информации о состояниях некоторого подмножества переменных данной сети. При этом базовой информацией в процессах оценивания служат априорные вероятностные оценки каузальных отношений типа «*родители* $\rightarrow$ *дети*», которые, обычно, задаются экспертно.

Компьютеризация процессов оценивания вероятностей переменных сети является ключевой проблемой, в общем случае даже в четком информационном пространстве сложной не только с вычислительной точки зрения (по вычислительной сложности она относится к *NP*-сложным задачам). Важными также являются содержательная интерпретация полученных результатов, обоснование корректности избранного порядка перебора каузальных отношений, исключение дублирования в вычислениях в пределах доступного объема памяти и др. Современные подходы к компьютеризации этих процессов основаны на трансформации графа сети в узловое дерево [1, 2]. Они позволяют существенно уменьшить объем вычислений, что весьма примечательно, однако не решает других, вышеотмеченных, вопросов, которые при переходе в нечеткое информационное пространство еще в большей степени обостряются, поскольку в этих случаях появляется добавочное измерение функции принадлежности, что существенно увеличивает объемы вычислений и усложняет логику зависимостей в сети.

Следовательно, разработка новых эффективных способов представления БС, которые позволяли бы в комплексе решать перечисленные проблемы, включая возможность привлечения многопроцессорных комплексов с параллельной организацией вычислений, является весьма актуальной и интересной задачей.

В данной работе предлагается подход к представлению БС, основанный на ярусной структуризации графа. Разработанный как основа для создания БС в нечетком информационном пространстве, он позволяет отслеживать информационные потоки и естественным образом определяет их взаимодействие, позволяя реализовать сеть с параллельной организацией вычислений.

Базовым является понятие яруса вершин: это множество вершин одного поколения, которое определяется одинаковым максимальным расстоянием от корневых (начальных) вершин сети. Вычисления выполняются последовательно снизу вверх от старших, т. е. более близких к корневым вершинам, ярусов до самых младших. Переход на следующий ярус выполняется исключительно после полной отработки предыдущего и при вычислениях последовательно используются уже просчитанные промежуточные оценки условных вероятностей для вершин-предков из старших ярусов. Используется следующая система обозначений для оценок вероятностей событий, заданных в скобках: $\widetilde{P}$ – начальные экспертные оценки; P – вычисляемые априорные оценки; P^* – апостериорные оценки.

1. Структурирование матрицы смежности вершин

Пусть G – ориентированный ацикличный граф с множеством вершин $V(G) = \{a_n\}_{n=1}^{N_G}$ и матрицей смежности вершин $M(G) = \{\mu_{nm}\}_{n=1}^{N_G}{}_{m=1}^{N_G}$, где $\mu_{nm} = 1$, если в графе G присутствует ориентированное ребро (a_n, a_m), и $\mu_{nm} = 0$ в противном случае. Назовем корневой цепью для вершины a_n каждый ориентированный маршрут с концом в a_n и началом в корневой вершине, из которой a_n достижима. Для вершины a_n определим ярусный показатель $\lambda(a_n)$ как максимальную длину корневых цепей для a_n.

Далее будем рассматривать структурированное представление сети G как ориентированного ациклического графа, для которого определены следующие характеристики:

1) количество ярусов $(L+1)$ и последовательность их мощностей $k_0, k_1, ..., k_l$;

2) множество вершин $V(G) = \{v_n\}_{n=1}^{N_G}$, $N_G = \sum_{l=0}^{L} k_l$. Вершина v_n находится в состоянии V_n, $V_n \in \{V_n^{j_n}\}_{j_n=1}^{J_n}$, $J_n \geq 2$, причем допустимые состояния $\{V_n^{j_n}\}_{j_n=1}^{J_n}$ образуют полную группу (случай $J_n = 2$ наиболее важен). Для каждой из вершин определен ярусный показатель $\lambda(v_n)$. Вершины $\{v_n\}_{n=1}^{k_0}$ являются корневыми

($\lambda(v_n) = 0$), они образуют нулевой ярус мощностью k_0. Вершины $\{v_n\}_{n=K_{l-1}+1}^{K_l}$, где $K_l = \sum_{t=0}^{l} k_t$, $l = \overline{1, L}$ образуют l-й ярус ($\lambda(v_n) = l$) мощностью k_l;

3) матрица смежности $\Omega(G) = \{\omega_{nm}\}_{n=1}^{N_G}{}_{m=1}^{N_G}$ вершин $V(G)$ в блочном представлении:

	$v_1 \cdots v_{K_0}$	$v_{K_0+1} \cdots v_{K_1}$	$\cdots$	$v_{K_{m-1}+1} \cdots v_{K_m}$	$\cdots$	$v_{K_{L-1}+1} \cdots v_{K_L}$
v_1 $\cdots$ v_{K_0}	0	БЛОК$_{01}$	$\cdots$	БЛОК$_{0m}$	$\cdots$	БЛОК$_{0L}$
v_{K_0+1} $\cdots$ v_{K_1}	0	0	$\cdots$	БЛОК$_{1m}$	$\cdots$	БЛОК$_{1L}$
$\cdots$	0	0	$\cdots$	$\cdots$	$\cdots$	$\cdots$
$v_{K_{l-1}+1}$ $\cdots$ v_{K_l}	0	0	$\cdots$	БЛОК$_{lm}$	$\cdots$	БЛОК$_{lL}$
$\cdots$	0	0	$\cdots$	$\cdots$	$\cdots$	$\cdots$
$v_{K_{L-1}+1}$ $\cdots$ v_{K_L}	0	0	0	0	0	0

БЛОК$_{lm}$ – прямоугольная матрица $\{\omega_{ij}\}_{i=K_{l-1}+1}^{K_l}{}_{j=K_{m-1}+1}^{K_m}$ размерностью $k_l \times k_m$, которая при $l \geq m$ (т. е. все блоки главной диагонали и ниже) полностью заполнена нулями;

4) матрица достижимости $\Theta(G) = \{\theta_{mn}\}_{n=1}^{N_G}{}_{m=1}^{N_G}$ вершин $V(G)$ в аналогичном блочном представлении, где $\theta_{mn} = 1$, если в графе G можно построить ориентированный маршрут из вершины v_m в v_n, и $\theta_{mn} = 0$ в противном случае;

5) исходная экспертная информация. Для корневых вершин $\{v_n\}_{n=1}^{k_0}$ заданы априорные оценки вероятностей $\{\tilde{P}(V_n = V_n^{j_n})\}_{j_n=1}^{J_n}$, всего $\sum_{n=1}^{k_0}(J_n - 1)$ оценок (далее используется обозначение $\tilde{P}(V_n^{j_n}) = \tilde{P}(V_n = V_n^{j_n})$).

Введем обозначение $pr(v_n)$ для множества родителей некорневой вершины v_n. Задана совокупность прямых связей в сети $\tilde{P}(v_n / pr(v_n))$ – оценки условных вероятностей допустимых состояний вершины v_n относительно допустимых состояний ее родителей $[\{\tilde{P}(V_n^{j_n} / \bigcap_{m=1}^{K_{l-1}}[V_m^{j_m} \otimes \omega_{mn}])\}_{j_m=1}^{J_m}]_{j_n=1}^{J_n}$, где сочетание символов $[V_m^{j_m} \otimes \omega_{mn}]$ означает следующее: соответствующее допустимое состояние вершины v_m присутствует в представленном идентификаторе оценки условной вероятности как компонент пересечения условий при $\omega_{mn} \neq 0$ $(v_m \in pr(v_n))$ и отсутствует в противном случае (всего $\sum_{n=K_{l-1}+1}^{K_l}(J_n - 1)\sum_{m=1}^{K_{l-1}}\omega_{mn}J_m$ оценок). В условии состояния обязательно присутствует хотя бы одна вершина предыдущего яруса ($K_{l-2}+1 \le m \le K_{l-1}$).

Структурированное представление сети G по матрице смежности $M(G)$ вершин $\{a_n\}_{n=1}^{N_G}$ можно получить следующим образом.

Начальный шаг. Номер яруса $L := 0$.

$K_{-1} := 0$. Выберем среди вершин $\{a_n\}_{n=1}^{N_G}$ корневые (для корневой вершины a_m $\forall n = \overline{1, N_G}$ $\mu_{nm} = 0$). Пусть оказалось k_0 корневых вершин $\{a_{i_j^0}\}_{j=1}^{k_0}$. Присвоим каждой корневой вершине по дополнительному альтернативному имени, $U_0(G) = \{a_{i_j^0}\}_{j=1}^{k_0} = \{v_j\}_{j=1}^{k_0}$. Будем считать, что корневые вершины имеют ярусный показатель $\lambda(v_n) = 0$ и образуют нулевой ярус мощностью k_0. Исключаем их из дальнейшего рассмотрения,

$$W(G) := V(G) \backslash U_0(G). \quad I^0 = \{i_j^0\}_{j=1}^{k_0}. \quad K_0 := K_{-1} + k_0.$$

Основной шаг. Номер яруса $L := L + 1$.

Выберем среди $W(G)$ вершины, ярусный показатель которых равен L (для такой вершины a_m $\forall n = \overline{1, N_G}$, $n \notin \bigcup_{l=0}^{L-1} I^l$, $\mu_{nm} = 0$). Пусть оказалось k_L таких вершин $\{a_{i_j^L}\}_{j=1}^{k_L}$. $K_L := K_{L-1} + k_L$. Присвоим каждой вершине $a_{i_j^L}$ по дополнительному альтернативному имени, $U_L(G) = \{a_{i_j^L}\}_{j=1}^{k_L} = \{v_j\}_{j=K_{L-1}+1}^{K_L}$. Будем считать, что вершины $U_L(G)$ образуют L-й ярус мощностью k_L, для них $\lambda(v_n) = L$, и исключаем их из дальнейшего рассмотрения,

$$W(G) := W(G) \backslash U_L(G). \quad I^L = \{i_j^L\}_{j=1}^{k_L}.$$

Если $W(G) \neq \varnothing$, повторяем основной шаг.

Если $W(G) = \varnothing$, то $K_L = N_G$, вершины $V(G)$ графа G распределены в $(L+1)$ ярус, на l-м ярусе находится k_l вершин $\{v_j\}_{j=K_{l-1}+1}^{K_l}$. Переставим строки и столбцы $M(G) = \{\mu_{nm}\}_{n=1}^{N_G}{}_{m=1}^{N_G}$ в соответствии с индексами альтернативных имен вершин с упорядочением по возрастанию.

В случае $0 \leq l < m \leq L$ БЛОК$_{lm}$ – прямоугольная матрица $\{\omega_{ij}\}_{i=K_{l-1}+1}^{K_l}{}_{j=K_{m-1}+1}^{K_m}$ размерностью $k_l \times k_m$ и имеет следующий вид:

БЛОК$_{lm}$

	$v_{K_{m-1}+1}$	…	$v_{K_{m-1}+j}$	…	v_{K_m}
$v_{K_{l-1}+1}$	$\omega_{K_{l-1}+1,K_{m-1}+1} = \mu_{i_1^l\, i_1^m}$	…	$\omega_{K_{l-1}+1,K_{m-1}+j} = \mu_{i_1^l\, i_j^m}$	…	$\omega_{K_{l-1}+1,K_m} = \mu_{i_1^l\, i_{k_m}^m}$
…	…	…	…	…	…
$v_{K_{l-1}+t}$	$\omega_{K_{l-1}+t,K_{m-1}+1} = \mu_{i_t^l\, i_1^m}$	…	$\omega_{K_{l-1}+t,K_{m-1}+j} = \mu_{i_t^l\, i_j^m}$	…	$\omega_{K_{l-1}+t,K_m} = \mu_{i_t^l\, i_{k_m}^m}$
…	…	…	…	…	…
v_{K_l}	$\omega_{K_l,K_{m-1}+1} = \mu_{i_{k_l}^l\, i_1^m}$	…	$\omega_{K_l,K_{m-1}+j} = \mu_{i_{k_l}^l\, i_j^m}$	…	$\omega_{K_l,K_m} = \mu_{i_{k_l}^l\, i_{k_m}^m}$

Обычно наиболее плотно заполненными в матрице смежности являются блоки с разностью 1 между вторым и первым индексами, регламентирующие связь между двумя последовательными ярусами; блоки при $m > l + 1$ могут состоять исключительно из нулей.

Аналогичную блочную структуру имеет также матрица достижимости $\Theta(G) = \{\theta_{mn}\}_{n=1}^{N_G}{}_{m=1}^{N_G}$ вершин графа G. Очевидно, для вершины v_n, находящейся на l-м, $l \geq 1$, ярусе, каждый из предыдущих l ярусов представлен хотя бы одной вершиной. Матрицу достижимости вершин $\Theta(G)$ можно получить из матрицы их смежности $\Omega(G)$ следующим образом.

Для $n = \overline{1, K_L}$:

для $1 \leq m \leq K_0$ ($\{\text{БЛОК}_{0,\,l}\}_{l=1}^{L}$) $\theta_{mn} := \omega_{mn}$;

для $K_0 + 1 \leq m \leq K_L$ $\theta_{mn} := 0$.

Для $l = \overline{2, L}$:

для $(K_{l-2}+1 \leq m \leq K_{l-1}) \wedge (K_{l-1}+1 \leq n \leq K_l)$ ($\{\text{БЛОК}_{l-1,\,l}\}_{l=2}^{L}$) $\theta_{mn} := \omega_{mn}$.

Для $l = \overline{2, L}$:

для $n = \overline{K_{l-1}+1, K_l}$:

для $m = \overline{K_{l-2}+1, K_{l-1}}$:

если $\omega_{mn} = 1$, то $\forall k = \overline{1, K_{l-2}}$ $\theta_{kn} := \max\{\omega_{kn}, \theta_{km}\}$.

Для вершины v_n, находящейся на l-м, $l \geq 1$, ярусе, назовем множеством достижимости $\psi(v_n)$ упорядоченное по возрастанию индекса множество вершин старших ярусов, из которых можно попасть в v_n: $\psi(v_n) = \{[v_m \otimes \theta_{mn}]\}_{m=1}^{K_{l-1}}$. Сочетание символов $[v_m \otimes \theta_{mn}]$ означает, что вершина v_m присутствует в последовательности $\psi(v_n)$ при $\theta_{mn} \neq 0$ и отсутствует в противном случае. Очевидно, все ярусы от нулевого до $(l-1)$-го представлены хотя бы одной вершиной. Множество достижимости $\psi(v_n)$ определяет путь, который следует преодолеть, чтобы достигнуть вершины v_n из корневых вершин. $\breve{\psi}(v_n) = \{\psi(v_n) \cup v_n\}$. Назовем вершины ориентированного графа независимыми, если их множества достижимости не пересекаются, и зависимыми в противном случае.

2. Порядок распространения априорных вероятностей в структурированной байесовской сети в точечном информационном пространстве

Структурированные матрица смежности $\Omega(G)$ и матрица достижимости $\Theta(G)$ вершин $V(G) = \{v_n\}_{n=1}^{N_G}$ – основа для планирования вычислительного процесса при ярусном подходе. Рассмотрим принципиальную схему априорного оценивания вероятностей для всех переменных БС.

Пусть $\psi(v_n) = \{v_{n_t}\}_{t=1}^{T_n}$, $T_n \geq 1$ – множество достижимости вершины v_n, не являющейся корневой ($\lambda(v_n) \geq 1$), и $G(v_n) \subseteq G$ – соответствующий множеству $\breve{\psi}(v_n)$ подграф графа G. Назовем $v_{n_*} \in \psi(v_n)$ истоком для вершины v_n, если

– v_{n_*} – разделяющая вершина графа $G(v_n)$ либо корневая вершина;

– на цепях, соединяющих v_{n_*} с v_n, разделяющих в $G(v_n)$ вершин нет.

Таким образом, истоки вершины – это самые молодые разделяющие вершины графа $G(v_n)$, которые входят в множества достижимости родительских вершин или являются ими. Истоки, отличные от корневых вершин, аккумулируют всю информацию относительно своего множества достижимости, необходимую для определения текущей оценки. Если ярусный показатель $\lambda(v_{n_*}) \geq 1$, справедливы следующие утверждения, полезные для выявления истоков.

1. $\forall(\{v_k\}_{k=K_0+1}^{K_{\lambda(v_{n_*})}}, v_k \in \psi(v_n) \setminus \breve{\psi}(v_{n_*}))$ и $\forall(v_s \in \psi(v_{n_*}))$: $\theta_{sk} = 0$.

2. $\forall(\{v_k\}_{k=K_{\lambda(v_{n_*})}+1}^{K_{\lambda(v_n)}}, v_k \in \psi(v_n))$ и $\forall(v_s \in \psi(v_{n_*}))$: $\omega_{sk} = 0$.

Под родительской трансформацией $\Psi^{pr}(v_n)$ множества истоков $\Psi(v_n)$ вершины v_n будем понимать множество, состоящее из ее родительских вершин и тех истоков, которые входят в множество достижимости более чем одной родительской вершины.

Назовем реализацией $\{[V_m^{j_m} \otimes \theta_{mn}]\}_{m=1}^{K_{l-1}}$ множества достижимости $\psi(v_n)$ событие, когда вершины $\psi(v_n)$ сети пребывают в каких-то фиксированных конкретных состояниях. Заметим, что события

$$\{[V_m^{j_m} \otimes \theta_{mn}]_{m=1}^{K_{l-1}}\} = \{ \bigcap_{m \le K_{l-1}} [\{V_m = V_m^{j_m}\} \otimes \theta_{mn}]\},$$

во-первых, не пересекаются при разных комплектах индексов $\{j_m\}_{m=1}^{K_{l-1}}$, и, во-вторых, образуют полную группу. Оценку $P(V_n^*)$ вероятности того, что вершина v_n с ярусным показателем $l = \lambda(v_n) \ge 1$ находится в состоянии V_n^*, целесообразно получить как сумму оценок вероятностей при всех возможных реализациях множества достижимости $\psi(v_n)$, т. е как сумму по $\{j_m = \overline{1, J_m}\}_{m=1}^{K_{l-1}}$ оценок вероятностей $(V_n^*; \{[V_m^{j_m} \otimes \theta_{mn}]\}_{m=1}^{K_{l-1}})$:

$$P(V_n^*) = \sum_{j_1 \otimes \theta_{1n} = 1}^{J_1} \ldots \sum_{j_{K_{l-1}} \otimes \theta_{K_{l-1},n} = 1}^{J_{K_{l-1}}} P(V_n = V_n^*; \{ \bigcap_{m \le K_{l-1}} [\{V_m = V_m^{j_m}\} \otimes \theta_{mn}]\}) =$$

$$= \sum_{j_1 \otimes \theta_{1n} = 1}^{J_1} \ldots \sum_{j_{K_{l-1}} \otimes \theta_{K_{l-1},n} = 1}^{J_{K_{l-1}}} P(V_n^*; \{ \bigcap_{m \le K_{l-1}} [V_m^{j_m} \otimes \theta_{mn}]\}),$$

где обозначение $\sum_{j_m \otimes \theta_{mn} = 1}^{J_m}$ означает, что суммирование по соответствующему индексу j_m выполняется лишь при $\theta_{mn} = 1$, т. е. при $v_m \in \psi(v_n)$. Оценка вероятности реализации $P(V_n^*; \{[V_m^{j_m} \otimes \theta_{mn}]\}_{m=1}^{K_{l-1}})$ вычисляется по формуле умножения вероятностей для пересечения событий, сгруппированных в соответствии с ярусной принадлежностью:

$$V_n^*, \{[V_m^{j_m} \otimes \theta_{mn}], m = \overline{K_{l-2}+1, K_{l-1}}\}, \ldots, \{[V_m^{j_m} \otimes \theta_{mn}], m = \overline{1, K_0}\}.$$

При этом оценки вероятности для состояний вершин, принадлежащих одному ярусу, относительно всех предыдущих определяются произведением априорных оценок состояний этих вершин относительно соответствующих состояний их родителей:

$$P(V_n^*;\{[V_m^{j_m}\otimes\theta_{mn}],\, m\le K_{l-1}\})=$$

$$=P(V_n^*\cap\{[V_m^{j_m}\otimes\theta_{mn}],\, m=\overline{K_{l-2}+1,K_{l-1}}\}\cap\ldots\cap\{[V_m^{j_m}\otimes\theta_{mn}],\, m=\overline{1,K_0}\})=$$

$$:=\tilde P\,(V_n^*/\{[\bigcap_{m=1}^{K_{l-1}}[V_m^{j_m}\otimes\omega_{mn}]\})\times\prod_{m=K_{l-2}+1}^{K_{l-1}}\tilde P\,(\{[V_m^{j_m}\otimes\theta_{mn}]\}/\{\bigcap_{s=1}^{K_{l-2}}[V_s^{j_s}\otimes\omega_{sm}]\})\times\ldots\times$$

$$\times\prod_{m=K_0+1}^{K_1}\tilde P(\{[V_m^{j_m}\otimes\theta_{mn}]\}/\{\bigcap_{s=1}^{K_0}[V_s^{j_s}\otimes\omega_{sm}]\})\times\prod_{m=1}^{K_0}\tilde P(\{[V_m^{j_m}\otimes\theta_{mn}]\}=$$

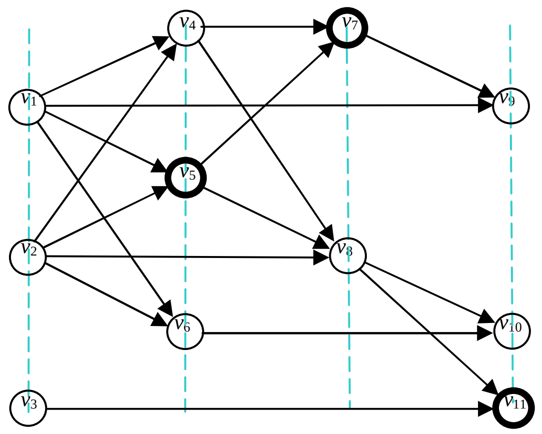
$$=\tilde P\,(V_n^*/\{[\bigcap_{m=1}^{K_{l-1}}[V_m^{j_m}\otimes\omega_{mn}]\})\times\prod_{t=0}^{l-2}\ \prod_{m=K_{l-2-t}+1}^{K_{l-1-t}}\tilde P(\{[V_m^{j_m}\otimes\theta_{mn}]\}/\{\bigcap_{s=1}^{K_{l-2-t}}[V_s^{j_s}\otimes\omega_{sm}]\})\times\ldots\times$$

$$\times\prod_{m=1}^{K_0}\tilde P(\{[V_m^{j_m}\otimes\theta_{mn}]\}.$$

В сильно связанных графах истоками являются корневые вершины, и приведенные соотношения реализуются в полном объеме. Другой крайностью являются деревья, у которых каждая отцовская вершина – исток для сыновней. Для рационального выполнения вычислений в общем случае производится переход от оценивания вероятности состояния вершины по всему множеству достижимости к ее определению по множеству истоков или его родительской трансформации. Представить это можно следующим образом. Последовательно, от корневого яруса вверх, анализируются связи всех вершин одного яруса. Для каждой вершины определяется множество истоков и его родительская трансформация. Составляется реестр вспомогательных оценок: это все условные вероятности родителей относительно истоков, оставшихся в родительской трансформации множества истоков их сыновних вершин, а также, если отцовские вершины принадлежат одному ярусу и зависимы или имеют несколько сыновних вершин, условные при наличии взаимозависимости или безусловные оценки их совместной вероятности. Вспомогательные оценки сохраняются также и для апостериорного оценивания. {Вероятность текущего состояния сыновней вершины} оценивается как сумма произведений трех (или двух, если все истоки являются отцовскими вершинами) сомножителей вида {априорная условная вероятность текущего состояния сыновней вершины относительно состояний отцовских вершин} × {условная вероятность состояний отцовских вершин относительно состояний выделенных истоков} × {безусловная вероятность состояний истоков}.

3. Пример простой сети

В заключение рассмотрим вычисление априорных оценок для простой сети с высокой степенью связности, показанное на рис. 1. $N_G = 11$, $V(G) = \{v_n\}_{n=1}^{11}$. Сеть бинарна, $\forall n = \overline{1,11}$ $\;J_n = 2$, $V_n \in \{V_n^1, V_n^2\}$, так что $\tilde{P}(V_n^2) = 1 - \tilde{P}(V_n^1)$ и $\tilde{P}(V_n^2$/при условии ...$) = 1 - \tilde{P}(V_n^1$/при том же условии). Символ $V_n^{1,2}$ означает, что соответствующие оценки вероятностей рассматриваются для обоих состояний V_n^1 и V_n^2.



$L = 3$, $k_0 = 3$, $k_1 = 3$, $k_2 = 2$, $k_3 = 3$.
Заданы априорные оценки

$\{\tilde{P}(V_n^{1,2})\}_{n=1}^{3}$;

$\{\tilde{P}(V_n^{1,2}/V_1^{1,2}, V_2^{1,2})\}_{n=4}^{6}$;

$\tilde{P}(V_7^{1,2}/V_4^{1,2}, V_5^{1,2})$;

$\tilde{P}(V_8^{1,2}/V_2^{1,2}, V_4^{1,2}, V_5^{1,2})$;

$\tilde{P}(V_9^{1,2}/V_1^{1,2}, V_7^{1,2})$;

$\tilde{P}(V_{10}^{1,2}/V_6^{1,2}, V_8^{1,2})$;

$\tilde{P}(V_{11}^{1,2}/V_3^{1,2}, V_8^{1,2})$.

РИС. 1. Пример структурированной байесовской сети

Матрица смежности вершин

$$\Omega(G) = \{\omega_{mn}\}_{n=1}^{11}\,_{m=1}^{11}.$$

<table>
<tr><th>↱</th><th>v_1</th><th>v_2</th><th>v_3</th><th>v_4</th><th>v_5</th><th>v_6</th><th>v_7</th><th>v_8</th><th>v_9</th><th>v_{10}</th><th>v_{11}</th></tr>
<tr><td>v_1</td><td rowspan="3" colspan="3">0</td><td>1</td><td>1</td><td>1</td><td>0</td><td>0</td><td>1</td><td>0</td><td>0</td></tr>
<tr><td>v_2</td><td>1</td><td>1</td><td>1</td><td>0</td><td>1</td><td>0</td><td>0</td><td>0</td></tr>
<tr><td>v_3</td><td>0</td><td>0</td><td>0</td><td>0</td><td>0</td><td>0</td><td>0</td><td>1</td></tr>
<tr><td>v_4</td><td rowspan="3" colspan="3">0</td><td rowspan="3" colspan="3">0</td><td>1</td><td>1</td><td>0</td><td>0</td><td>0</td></tr>
<tr><td>v_5</td><td>1</td><td>1</td><td>0</td><td>0</td><td>0</td></tr>
<tr><td>v_6</td><td>0</td><td>0</td><td>0</td><td>1</td><td>0</td></tr>
<tr><td>v_7</td><td rowspan="2" colspan="3">0</td><td rowspan="2" colspan="3">0</td><td rowspan="2" colspan="2">0</td><td>1</td><td>0</td><td>0</td></tr>
<tr><td>v_8</td><td>0</td><td>1</td><td>1</td></tr>
<tr><td>v_9</td><td rowspan="3" colspan="3">0</td><td rowspan="3" colspan="3">0</td><td rowspan="3" colspan="2">0</td><td rowspan="3" colspan="3">0</td></tr>
<tr><td>v_{10}</td></tr>
<tr><td>v_{11}</td></tr>
</table>

Матрица достижимости вершин

$$\Theta(G) = \{\theta_{mn}\}_{n=1}^{11}\,_{m=1}^{11}.$$

<table>
<tr><th>↱</th><th>v_1</th><th>v_2</th><th>v_3</th><th>v_4</th><th>v_5</th><th>v_6</th><th>v_7</th><th>v_8</th><th>v_9</th><th>v_{10}</th><th>v_{11}</th></tr>
<tr><td>v_1</td><td rowspan="3" colspan="3">0</td><td>1</td><td>1</td><td>1</td><td>1</td><td>1</td><td>1</td><td>1</td><td>1</td></tr>
<tr><td>v_2</td><td>1</td><td>1</td><td>1</td><td>1</td><td>1</td><td>1</td><td>1</td><td>1</td></tr>
<tr><td>v_3</td><td>0</td><td>0</td><td>0</td><td>0</td><td>0</td><td>0</td><td>0</td><td>1</td></tr>
<tr><td>v_4</td><td rowspan="3" colspan="3">0</td><td rowspan="3" colspan="3">0</td><td>1</td><td>1</td><td>1</td><td>1</td><td>1</td></tr>
<tr><td>v_5</td><td>1</td><td>1</td><td>1</td><td>1</td><td>1</td></tr>
<tr><td>v_6</td><td>0</td><td>0</td><td>0</td><td>1</td><td>0</td></tr>
<tr><td>v_7</td><td rowspan="2" colspan="3">0</td><td rowspan="2" colspan="3">0</td><td rowspan="2" colspan="2">0</td><td>1</td><td>0</td><td>0</td></tr>
<tr><td>v_8</td><td>0</td><td>1</td><td>1</td></tr>
<tr><td>v_9</td><td rowspan="3" colspan="3">0</td><td rowspan="3" colspan="3">0</td><td rowspan="3" colspan="2">0</td><td rowspan="3" colspan="3">0</td></tr>
<tr><td>v_{10}</td></tr>
<tr><td>v_{11}</td></tr>
</table>

Сохраняемые вспомогательные оценки, которые обусловливает:

– *первый ярус*. Вершины $\{v_n\}_{n=4}^{6}$ с множествами истоков $\{\Psi(v_n)\}_{n=4}^{6} = \{v_2, v_1\}$, принадлежащих одному ярусу. Следует определить $\{P(V_2^{1,2}, V_1^{1,2})\}$;

– *второй ярус*. Вершины v_7 и v_8 с множествами истоков $\Psi(v_7) = \Psi(v_8) = \{v_2, v_1\}$, $\Psi^{pr}(v_7) = \Psi^{pr}(v_8) = \{v_5, v_4; v_2, v_1\}$, отцовские вершины v_5 и v_4 расположены на одном ярусе. Следует определить $\{P(V_5^{1,2}, V_4^{1,2} / V_2^{1,2}, V_1^{1,2})\}$;

– *третий ярус*. Вершины $\{v_n\}_{n=9}^{11}$ с множествами истоков $\Psi(v_9) = \{v_2, v_1\}$, $\Psi(v_{10}) = \{v_2, v_1\}$, $\Psi(v_{11}) = \{v_8; v_3\}$; $\Psi^{pr}(v_9) = \{v_7; v_1\}$, $\Psi^{pr}(v_{10}) = \{v_8; v_6; v_2, v_1\}$, $\Psi^{pr}(v_{11}) = \{v_8; v_3\}$. Следует определить $\{P(V_7^{1,2} / V_1^{1,2})\}$ и, поскольку отцовские вершины v_8 и v_6 принадлежат различным ярусам, $\{P(V_8^{1,2} / V_2^{1,2}, V_1^{1,2})\}$.

Последовательность вычислений.

Нулевой ярус. $P(V_2^{1,2}, V_1^{1,2}) := \tilde{P}(V_2^{1,2}) \times \tilde{P}(V_1^{1,2})$.

Первый ярус. $P(V_n^{j_n}) := \sum\limits_{j_2, j_1 = 1}^{2} \tilde{P}(V_n^{j_n} / V_2^{j_2}, V_1^{j_1}) \times P(V_2^{j_2}, V_1^{j_1}),\ n = \overline{4,6}$;

$P(V_5^{1,2}, V_4^{1,2} / V_2^{1,2}, V_1^{1,2}) := \tilde{P}(V_5^{1,2} / V_2^{1,2}, V_1^{1,2}) \times \tilde{P}(V_4^{1,2} / V_2^{1,2}, V_1^{1,2})$.

Второй ярус.

$$P(V_7^{j_7} / V_1^{j_1}) := \sum_{j_5, j_4 = 1}^{2} \sum_{j_2 = 1}^{2} \tilde{P}(V_7^{j_7} / V_5^{j_5}, V_4^{j_4}) \times P(V_5^{j_5}, V_4^{j_4} / V_2^{j_2}, V_1^{j_1}) \times \tilde{P}(V_2^{j_2}),$$

$$P(V_8^{j_8} / V_2^{j_2}, V_1^{j_1}) := \sum_{j_5, j_4 = 1}^{2} \tilde{P}(V_8^{j_8} / V_5^{j_5}, V_4^{j_4}; V_2^{j_2}) \times P(V_5^{j_5}, V_4^{j_4} / V_2^{j_2}, V_1^{j_1});$$

$$P(V_7^{j_7}) := \sum_{j_1 = 1}^{2} P(V_7^{j_7} / V_1^{j_1}) \times \tilde{P}(V_1^{j_1}),$$

$$P(V_8^{j_8}) := \sum_{j_2, j_1 = 1}^{2} P(V_8^{j_8} / V_2^{j_2}, V_1^{j_1}) \times P(V_2^{j_2}, V_1^{j_1}).$$

Третий ярус. $P(V_9^{j_9}) := \sum\limits_{j_7 = 1}^{2} \sum\limits_{j_1 = 1}^{2} \tilde{P}(V_9^{j_9} / V_7^{j_7}, V_1^{j_1}) \times P(V_7^{j_7} / V_1^{j_1}) \times \tilde{P}(V_1^{j_1})$,

$$P(V_{10}^{j_{10}}) := \sum_{j_8 = 1}^{2} \sum_{j_6 = 1}^{2} \sum_{j_2, j_1 = 1}^{2} \tilde{P}(V_{10}^{j_{10}} / V_8^{j_8}, V_6^{j_6}) \times P(V_8^{j_8} / V_2^{j_2}, V_1^{j_1}) \times$$

$$\times \widetilde{P}\,(V_6^{j_6} / V_2^{j_2}, V_1^{j_1}) \times P(V_2^{j_2}, V_1^{j_1}),$$

$$P(V_{11}^{j_{11}}) := \sum_{j_8=1}^{2} \sum_{j_3=1}^{2} \widetilde{P}(V_{11}^{j_{11}} / V_8^{j_8}, V_3^{j_3}) \times P(V_8^{j_8}) \times \widetilde{P}\,(V_3^{j_3}).$$

Заключение. Отметим, что изложенная методика построения алгоритмов априорного оценивания вероятностей переменных байесовской сети применима также для построения алгоритмов апостериорного оценивания.

О.В. Верьовка, І.М. Парасюк

ЯРУСНИЙ ПІДХІД ДО ПРЕДСТАВЛЕННЯ БАЙЄСІВСЬКИХ МЕРЕЖ

Пропонується ярусний підхід до представлення байєсівських мереж, який дозволяє відстежувати наявні в них інформаційні взаємозв'язки, забезпечує змістовну інтерпретацію отриманих результатів та обґрунтовує коректність обраного порядку перебору каузальних відношень. Підхід дозволяє уникнути дублювання обчислень у межах доступного обсягу пам'яті та може бути використаний для створення методів аналізу нечітких байєсівських мереж при паралельній організації обчислень.

O.V. Verovka, I.M. Parasjuk

THE MULTILEVEL APPROACH TO THE BAYESIAN NETWORKS PRESANTATION

The multilevel approach to the Bayesian networks presantation is proposed. It allows to watch present informative intercommunications, provides the content interpretation of the obtained results and proves the correctness of the chosen order of causal relation surplus. The approach allows avoiding duplication of calculations within the limits of accessible memory and can be used for creation of the methods for fuzzy Bayesian networks analysis in parallel calculations.

1. *Pearl J.* Probabilistic Reasoning Intelligent Systems: Networks of Plausible Inference. – Morgan Kaufmann, San Mateo, CA, 1991. – 552 p.
2. *Парасюк И.Н., Костукевич Ф.В.* Методы трансформации байесовской сети для построения узлового дерева и их модификация // Компьютерная математика. – 2008. – № 1. – С. 70–80.

Получено 09.10.2009

Об авторах:

Веревка Ольга Викторовна,

кандидат физико-математических наук, старший научный сотрудник
Института кибернетики имени В.М. Глушкова НАН Украины,

Парасюк Иван Николаевич,

доктор технических наук, профессор, член-корреспондент НАН Украины,
заведующий отделом Института кибернетики имени В.М. Глушкова НАН Украины.
e-mail: ivpar1@i.com.ua