УДК 517.977

ОПТИМАЛЬНОЕ УПРАВЛЕНИЕ КОЛЕБАНИЯМИ ПРЯМОУГОЛЬНОЙ МЕМБРАНЫ

Копец М.М.

Национальный технический университет Украины «Киевский политехнический институт»

Рассмотрена линейно-квадратическая задача оптимального управления процессом колебаний прямоугольной мембраны. С помощью метода множителей Лагранжа получены необходимые условия оптимальности. На их основе выведена система интегро-дифференциальных уравнений Риккати с частными производными. Решение последней системы дало возможность выписать явную формулу для вычисления оптимального управления.

Ключевые слова: оптимальное управление, метод множителей Лагранжа, необходимые условия оптимальности уравнения Риккати.

Розглянуто лінійно-квадратичну задачу оптимального управління процесом коливань прямокутної мембрани. За допомогою методу множників Лагранжа отримані необхідні умови оптимальності. На їх основі виведена система інтегро-диференціальних рівнянь Ріккаті з приватними похідними. Рішення останньої системи дало можливість виписати явну формулу для обчислення оптимального керування.

Ключові слова: оптимальне керування, метод множників Лагранжа, необхідні умови оптимальності рівняння Ріккаті.

Введение

В теории оптимального управления одно из центральных мест справедливо занимает линейно-квадратическая задача. Для управляемых систем со сосредоточенными параметрами эта задача исследована достаточно подробно [1, 2], чего нельзя утверждать об аналогичной задаче для систем с распределенными параметрами. В некоторых достаточно известных монографиях она вовсе не рассматривается [3, 4]. В других работах для ее исследования использованы методы функционального анализа [5], что обусловливает достаточно высокий уровень абстракции. В противовес этому подходу в данной статье для исследования линейно-квадратической задачи предлагаются современные методы вариационного исчисления и математической физики.

Цель настоящей статьи состоит в исследовании линейно-квадратичной задачи оптимального управления процессом колебаний прямоугольной мембраны, а именно: получение необходимых условий оптимальности и вывод формулы для вычисления оптимального управления.

Постановка задачи

Пусть управляемый процесс описывается следующим линейным дифференциальным уравнением с частными производными

ISSN 0452-9910. **Кибернетика и вычисл. техника. 2014. Вып. 177**

$$\frac{\partial^2 z(t,x,y)}{\partial t^2} = a^2\left(\frac{\partial^2 z(t,x,y)}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 z(t,x,y)}{\partial y^2}\right) + u(t,x,y), \tag{1}$$

где $0 \le x \le l$, $0 \le y \le m$, $t_0 \le t \le t_1$, действительные числа $a \succ 0$, $l \succ 0$, $m \succ 0$, $t_0 \ge 0$, $t_1 \succ t_0$ известны. Если через Ω обозначить множество $\Omega = \{(t,x,y) : t \in [0,l], x \in [0,l], y \in [0,m]\}$, то функция $u(t,x,y) \in L_2(\Omega)$ называется допустимым управлением. Для фиксированного допустимого управления $u(t,x,y)$ под решением $z(t,x,y)$ уравнения (1) подразумеваем обобщенное решение $z(t,x,y) \in W_2^{1,0}(\Omega)$. Для уравнения (1) заданы начальные условия

$$z(t_0,x,y) = f(x,y),\ \frac{\partial z(t_0,x,y)}{\partial t} = g(x,y), \tag{2}$$

где функции $f(x,y) \in L_2(\Sigma)$, $g(x,y) \in L_2(\Sigma)$ предполагаются известными (множество Σ имеет вид $\Sigma = \{(x,y) : x \in [0,l], y \in [0,m]\}$), символ $\frac{\partial z(t_0,x,y)}{\partial t}$ обозначает значение частной производной $\frac{\partial z(t,x,y)}{\partial t}$ при $t = t_0$. Подобным образом трактуются символ $\frac{\partial z(t_1,x,y)}{\partial t}$. Краевые условия для уравнения (1) являются однородными, т.е.

$$z(t,0,y) = 0,\ z(t,l,y) = 0,\ z(t,x,0) = 0,\ z(t,x,m) = 0. \tag{3}$$

На решениях задачи (1)–(3) рассматривается функционал

$$\begin{aligned} I(u,z) = {} & \frac{1}{2}\int_0^l\int_0^m z^2(t_1,x,y)\,dydx + \frac{1}{2}\int_0^l\int_0^m \left[\frac{\partial z(t_1,x,y)}{\partial t}\right]^2 dydx + \\ & + \frac{1}{2}\int_{t_0}^{t_1}\int_0^l\int_0^m [z^2(t,x,y) + u^2(t,x,y)]\,dydxdt. \end{aligned} \tag{4}$$

Задача оптимального управления (1)–(4) состоит в определении допустимого управления $u(t,x,y)$ *и соответствующего ему решения* $z(t,x,y)$ *задачи (1)–(3), на которых функционал (4) принимает наименьшее возможное значение.*

НЕОБХОДИМЫЕ УСЛОВИЯ ОПТИМАЛЬНОСТИ

Одним из возможных методов для нахождения решения сформулированной выше задачи оптимального управления (1)–(4) является метод множителей Лагранжа [6, с. 31]. Сущность этого метода состоит в замене функционала (4) следующим вспомогательным функционалом

$$J(p,u,z)=\frac{1}{2}\int_0^l\int_0^m z^2(t_1,x,y)dydx+\frac{1}{2}\int_0^l\int_0^m\left[\frac{\partial z(t_1,x,y)}{\partial t}\right]^2 dydx +$$

$$+\frac{1}{2}\int_{t_0}^{t_1}\int_0^l\int_0^m[z^2(t,x,y)+u^2(t,x,y)]\,dydxdt +$$

$$+\int_{t_0}^{t_1}\int_0^l\int_0^m p(t,x,y)\left[a^2\left(\frac{\partial^2 z(t,x,y)}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 z(t,x,y)}{\partial y^2}\right)+\right. \tag{5}$$

$$\left.+u(t,x,y)-\frac{\partial^2 z(t,x,y)}{\partial t^2}\right]dydxdt,$$

где $p(t,x,y)$ — неизвестная функция (множитель Лагранжа). В результате такой замены задача на условный экстремум (1)–(4) сводится к задаче минимизации функционала (5) с учетом условий (2) и (3). Дальше находим выражение ΔJ для приращения функционала (5) $\Delta J = J(p+\varepsilon\delta p, u+\varepsilon\delta u, z+\varepsilon\delta z)-J(p,u,z)$.

Используя соотношение (5), выражение для ΔJ можно представить следующим образом:

$$\Delta J=\frac{1}{2}\int_0^l\int_0^m[z(t_1,x,y)+\varepsilon\delta z(t_1,x,y)]^2 dydx+$$

$$+\frac{1}{2}\int_0^l\int_0^m\left[\frac{\partial z(t_1,x,y)}{\partial t}+\varepsilon\frac{\partial\delta z(t_1,x,y)}{\partial t}\right]^2 dydx+$$

$$+\frac{1}{2}\int_{t_0}^{t_1}\int_0^l\int_0^m\left[[z(t,x,y)+\varepsilon\delta z(t,x,y)]^2+[u(t,x,y)+\varepsilon\delta u(t,x,y)]^2\right]dydxdt+$$

$$+\int_{t_0}^{t_1}\int_0^l\int_0^m[p(t,x,y)+\varepsilon\delta p(t,x,y)]\left[a^2\left[\left(\frac{\partial^2 z(t,x,y)}{\partial x^2}+\varepsilon\frac{\partial^2\delta z(t,x,y)}{\partial x^2}\right)+\right.\right.$$

$$\left.\left.+\left(\frac{\partial^2 z(t,x,y)}{\partial y^2}+\varepsilon\frac{\partial^2\delta z(t,x,y)}{\partial y^2}\right)\right]+u(t,x,y)+\varepsilon\delta u(t,x,y)-\right.$$

ISSN 0452-9910. **Кибернетика и вычисл. техника. 2014. Вып. 177**

$$-\frac{\partial^2 z(t,x,y)}{\partial y^2}-\varepsilon\frac{\partial^2 \delta z(t,x,y)}{\partial y^2}\Bigg]dydxdt-\frac{1}{2}\int_0^l\int_0^m z^2(t_1,x,y)dydx-$$

$$-\frac{1}{2}\int_0^l\int_0^m\left[\frac{\partial z(t_1,x,y)}{\partial t}\right]^2 dydx-\frac{1}{2}\int_{t_0}^{t_1}\int_0^l\int_0^m[z^2(t,x,y)+u^2(t,x,y)]\,dydxdt-$$

$$+\int_{t_0}^{t_1}\int_0^l\int_0^m p(t,x,y)\left[a^2\left(\frac{\partial^2 z(t,x,y)}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 z(t,x,y)}{\partial y^2}\right)+\right.$$

$$\left.+u(t,x,y)-\frac{\partial^2 z(t,x,y)}{\partial t^2}\right]dydxdt. \qquad (6)$$

Выполнив очевидные преобразования, вместо соотношения (6) получим такое равенство:

$$\Delta J=\varepsilon\int_0^l\int_0^m z(t_1,x,y)\,\delta z(t_1,x,y)\Big]dydx+\varepsilon\int_0^l\int_0^m\frac{\partial z(t_1,x,y)}{\partial t}\frac{\partial\delta z(t_1,x,y)}{\partial t}dydx+$$

$$+\varepsilon\int_{t_0}^{t_1}\int_0^l\int_0^m\big[z(t,x,y)\,\delta z(t,x,y)+u(t,x,y)\,\delta u(t,x,y)\big]dydxdt+$$

$$+\varepsilon\int_{t_0}^{t_1}\int_0^l\int_0^m p(t,x,y)\left[a^2\left(\frac{\partial^2\delta z(t,x,y)}{\partial x^2}+\frac{\partial^2\delta z(t,x,y)}{\partial y^2}\right)+\right.$$

$$\left.+\delta u(t,x,y)-\frac{\partial^2\delta z(t,x,y)}{\partial t^2}\right]dydxdt+$$

$$+\int_{t_0}^{t_1}\int_0^l\int_0^m\delta p(t,x,y)\left[a^2\left(\frac{\partial^2 z(t,x,y)}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 z(t,x,y)}{\partial y^2}\right)+\right.$$

$$\left.+u(t,x,y)-\frac{\partial^2 z(t,x,y)}{\partial t^2}\right]dydxdt+$$

$$+\frac{\varepsilon^2}{2}\int_0^l\int_0^m[\delta z(t_1,x,y)]^2 dydx+\frac{\varepsilon^2}{2}\int_0^l\int_0^m\left[\frac{\partial\delta z(t_1,x,y)}{\partial t}\right]^2 dydx+$$

$$+\frac{\varepsilon^2}{2}\int_{t_0}^{t_1}\int_0^l\int_0^m\left[\left[\delta z(t,x,y)\right]^2+\left[\delta u(t,x,y)\right]^2\right]dydxdt+$$

$$+\varepsilon^2\int_{t_0}^{t_1}\int_0^l\int_0^m\delta p(t,x,y)\left[a^2\left(\frac{\partial^2\delta z(t,x,y)}{\partial x^2}+\frac{\partial^2\delta z(t,x,y)}{\partial y^2}\right)+\right.$$

$$\left.+\delta u(t,x,y)-\frac{\partial^2\delta z(t,x,y)}{\partial t^2}\right]dydxdt. \qquad (7)$$

Поскольку должно выполняться соотношение

$$a^2\left(\frac{\partial^2 z(t,x,y)}{\partial x^2}+\varepsilon\frac{\partial^2\delta z(t,x,y)}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 z(t,x,y)}{\partial y^2}+\varepsilon\frac{\partial^2\delta z(t,x,y)}{\partial y^2}\right)+$$

$$+u(t,x,y)+\varepsilon\delta u(t,x,y)-\frac{\partial^2 z(t,x,y)}{\partial t^2}-\varepsilon\frac{\partial^2\delta z(t,x,y)}{\partial t^2}=0,$$

то принимая во внимание уравнение (1), получим такое равенство:

$$a^2\left(\frac{\partial^2\delta z(t,x,y)}{\partial x^2}+\frac{\partial^2\delta z(t,x,y)}{\partial y^2}\right)+\delta u(t,x,y)-\frac{\partial^2\delta z(t,x,y)}{\partial t^2}=0. \qquad (8)$$

Учитывая очевидные соотношения $\delta z(t_0,x,y)=f(x,y)-f(x,y)=0$, $\frac{\partial\delta z(t_0,x,y)}{\partial t}=g(x,y)-g(x,y)=0$ и дважды используя формулу интегрирования по частям, получим следующее равенство:

$$\int_{t_0}^{t_1}\int_0^l\int_0^m p(t,x,y)\frac{\partial^2\delta z(t,x,y)}{\partial t^2}dydxdt=\int_0^l\int_0^m p(t_1,x,y)\frac{\partial\delta z(t_1,x,y)}{\partial t}dydx-$$

$$-\int_0^l\int_0^m p(t_0,x,y)\frac{\partial\delta z(t_0,x,y)}{\partial t}dydx-\int_{t_0}^{t_1}\int_0^l\int_0^m\frac{\partial p(t,x,y)}{\partial t}\frac{\partial\delta z(t,x,y)}{\partial t}dydxdt=$$

$$=\int_0^l\int_0^m p(t_1,x,y)\frac{\partial\delta z(t_1,x,y)}{\partial t}dydx-\int_0^l\int_0^m\frac{\partial p(t_1,x,y)}{\partial t}\delta z(t_1,x,y)dydx+$$

$$+\int_0^l\int_0^m\frac{\partial p(t_0,x,y)}{\partial t}\delta z(t_0,x,y)dydx+\int_{t_0}^{t_1}\int_0^l\int_0^m\frac{\partial^2 p(t,x,y)}{\partial t^2}\delta z(t,x,y)dydxdt=$$

$$=\int_0^l\int_0^m p(t_1,x,y)\frac{\partial\delta z(t_1,x,y)}{\partial t}dydx-\int_0^l\int_0^m\frac{\partial p(t_1,x,y)}{\partial t}\delta z(t_1,x,y)dydx+$$

$$+\int_{t_0}^{t_1}\int_0^l\int_0^m \frac{\partial^2 p(t,x,y)}{\partial t^2}\delta z(t,x,y)dydxdt. \tag{9}$$

Предполагая выполнение краевых условий

$$p(t,0,y)=0,\ p(t,l,y)=0\ p(t,x,0)=0,\ p(t,x,m)=0 \tag{10}$$

и принимая во внимание очевидные соотношения $\delta z(t,0,y)=0-0=0$, $\delta z(t,l,y)=0-0=0$, после двукратного применения формулы интегрирования по частям приходим к такому равенству:

$$\int_{t_0}^{t_1}\int_0^l\int_0^m p(t,x,y)\frac{\partial^2\delta z(t,x,y)}{\partial x^2}dydxdt=\int_{t_0}^{t_1}\int_0^m p(t,l,y)\frac{\partial\delta z(t,l,y)}{\partial x}dydt-$$

$$-\int_{t_0}^{t_1}\int_0^m p(t,0,y)\frac{\partial\delta z(t,0,y)}{\partial x}dydt-\int_{t_0}^{t_1}\int_0^l\int_0^m \frac{\partial p(t,x,y)}{\partial x}\frac{\partial\delta z(t,x,y)}{\partial x}dydxdt=$$

$$=-\int_{t_0}^{t_1}\int_0^m \frac{\partial p(t,l,y)}{\partial x}\delta z(t,l,y)dydt+\int_{t_0}^{t_1}\int_0^m \frac{\partial p(t,0,y)}{\partial x}\delta z(t,0,y)dydt+ \tag{11}$$

$$+\int_{t_0}^{t_1}\int_0^l\int_0^m \frac{\partial^2 p(t,x,y)}{\partial x^2}\delta z(t,x,y)dydxdt=\int_{t_0}^{t_1}\int_0^l\int_0^m \frac{\partial^2 p(t,x,y)}{\partial x^2}\delta z(t,x,y)dydxdt.$$

Аналогично, учитывая краевые условия $\delta z(t,x,0)=0-0=0$, $\delta z(t,x,m)=0-0=0$ и условия (10), получим равенство

$$\int_{t_0}^{t_1}\int_0^l\int_0^m p(t,x,y)\frac{\partial^2\delta z(t,x,y)}{\partial y^2}dydxdt=\int_{t_0}^{t_1}\int_0^l\int_0^m \frac{\partial^2 p(t,x,y)}{\partial y^2}\delta z(t,x,y)dydxdt. \tag{12}$$

Равенства (8), (9) , (11) и (12) позволяют представить соотношение (7) следующим образом:

$$\Delta J=\varepsilon\int_0^l\int_0^m\left[z(t_1,x,y)+\frac{\partial p(t_1,x,y)}{\partial t}\right]\delta z(t_1,x,y)dydx+$$

$$+\varepsilon\int_0^l\int_0^m\left[\frac{\partial z(t_1,x,y)}{\partial t}-p(t_1,x,y)\right]\frac{\partial\delta z(t_1,x,y)}{\partial t}dydx+$$

$$+\varepsilon\int_{t_0}^{t_1}\int_0^l\int_0^m\left[a^2\left(\frac{\partial^2 p(t,x,y)}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 p(t,x,y)}{\partial y^2}\right)+z(t,x,y)-\right.$$

$$\left.-\frac{\partial^2 p(t,x,y)}{\partial t^2}\right]\delta z(t,x,y)+\left[u(t,x,y)+p(t,x,y)\delta u(t,x,y)\right]dydxdt+$$

$$+\frac{\varepsilon^2}{2}\int_0^l\int_0^m[\delta z(t_1,x,y)]^2dydx+\frac{\varepsilon^2}{2}\int_0^l\int_0^m\left[\frac{\partial\delta z(t_1,x,y)}{\partial t}\right]^2dydx+$$

$$+\frac{\varepsilon^2}{2}\int_{t_0}^{t_1}\int_0^l\int_0^m\left[[\delta z(t,x,y)]^2+[\delta u(t,x,y)]^2\right]dydxdt. \tag{13}$$

Подводя итоги выше приведеным рассуждениям, приходим к следующему утверждению.

Теорема 1. Единственное оптимальное управление $u(t,x,y)$ определяется из системы соотношений

$$\begin{cases}\dfrac{\partial^2 z(t,x,y)}{\partial t^2}=a^2\left(\dfrac{\partial^2 z(t,x,y)}{\partial x^2}+\dfrac{\partial^2 z(t,x,y)}{\partial y^2}\right)+u(t,x,y),\\ z(t_0,x,y)=f(x,y),\dfrac{\partial z(t_0,x,y)}{\partial t}=g(x,y),\\ z(t,0,y)=0, z(t,l,y)=0, z(t,x,0)=0,\ z(t,x,m)=0,\\ \dfrac{\partial^2 p(t,x,y)}{\partial t^2}=a^2\left(\dfrac{\partial^2 p(t,x,y)}{\partial x^2}+\dfrac{\partial^2 p(t,x,y)}{\partial y^2}\right)+z(t,x,y),\\ p(t_1,x,y)=\dfrac{\partial z(t_1,x,y)}{\partial t},\dfrac{\partial p(t_1,x,y)}{\partial t}=-z(t_1,x,y),\\ p(t_1,x,y)=0, p(t,l,y)=0, p(t,x,0)=0,\ p(t,x,m)=0,\\ u(t,x,y)+p(t,x,y)=0.\end{cases} \tag{14}$$

Доказательство. Необходимым условием экстремума функционала (5) является равенство нулю его первой вариации. Это условие будет выполнено, если имеют место следующие соотношения:

$$z(t_1,x,y)+\frac{\partial p(t_1,x,y)}{\partial t}=0,\ \frac{\partial z(t_1,x,y)}{\partial t}-p(t_1,x,y)=0,$$

$$a^2\left(\frac{\partial^2 z(t,x,y)}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 z(t,x,y)}{\partial y^2}\right)+u(t,x,y)-\frac{\partial^2 z(t,x,y)}{\partial t^2}=0,$$

$$a^2\left(\frac{\partial^2 p(t,x,y)}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 p(t,x,y)}{\partial y^2}\right)+z(t,x,y)-\frac{\partial^2 p(t,x,y)}{\partial t^2}=0,$$

$$u(t,x,y)+p(t,x,y)=0.$$

Если присоединить к этим равенствам начальные условия (2), краевые условия (3) и соотношения (10), то получим систему уравнений (14). В случае выполнения этих соотношений выражение (13) примет вид

$$\Delta J = \frac{\varepsilon^2}{2}\int\limits_0^l\int\limits_0^m \left[\delta z(t_1, x, y)\right]^2 dydx + \frac{\varepsilon^2}{2}\int\limits_0^l\int\limits_0^m \left[\frac{\partial \delta z(t_1, x, y)}{\partial t}\right]^2 dydx +$$

$$+\frac{\varepsilon^2}{2}\int\limits_{t_0}^{t_1}\int\limits_0^l\int\limits_0^m \left[\left[\delta z(t, x, y)\right]^2 + \left[\delta u(t, x, y)\right]\right] dydxdt. \qquad (15)$$

При условии, что $\delta u(t, x, y) \neq 0$, имеем неравенство $\Delta J \succ 0$. Это означает, что на управлении $u(t, x, y)$ реализуется минимум функционала (4). Дальше предположим, что управление $\bar{u}(t, x, y) = u(t, x, y) + \delta(t, x, y)$ также является оптимальным управлением. Тогда оно также должно удовлетворять соотношениям (14) и, кроме того, должно выполняться равенство $\Delta J = 0$, поскольку оба управления $\bar{u}(t, x, y)$ и $u(t, x, y)$ оптимальны. Но тогда из выражения (15) следует, что равенство $\Delta J = 0$ возможно только в том случае, когда $\delta u(t, x, y) = 0$. Отсюда следует, что $\bar{u}(t, x, y) = u(t, x, y)$, и теорема 1 полностью доказана.

Вывод системы интегро-дифференциальных уравнений Риккати

Исходя из равенств $p(t_1, x, y) = \dfrac{\partial z(t_1, x, y)}{\partial t}$ и $\dfrac{\partial p(t_1, x, y)}{\partial t} = -z(t_1, x, y)$, предполагаем существование зависимости между $p(t, x, y)$ и $z(t, x, y)$

$$\frac{\partial p(t, x, y)}{\partial t} = -\int\limits_0^l\int\limits_0^m R_{11}(t, x, y, s, \lambda)\, z(t, s, \lambda)\, d\lambda ds -$$

$$-\int\limits_0^l\int\limits_0^m R_{12}(t, x, y, s, \lambda)\frac{\partial z(t, s, \lambda)}{\partial t} d\lambda ds\,, \qquad (16)$$

$$p(t, x, y) = \int\limits_0^l\int\limits_0^m R_{21}(t, x, y, s, \lambda)\, z(t, s, \lambda)\, d\lambda ds +$$

$$+\int\limits_0^l\int\limits_0^m R_{22}(t, x, y, s, \lambda)\frac{\partial z(t, s, \lambda)}{\partial t} d\lambda ds\,, \qquad (17)$$

где функции $R_{ij}(t, x, y, s, \lambda)\ (i = 1,\ 2; j = 1,\ 2)$ требуется найти. Дифференцируя равенство (16) по переменной t, приходим к такому соотношению:

$$\frac{\partial^2 p(t,x,y)}{\partial t^2} = -\int_0^l\int_0^m \left[\frac{\partial R_{11}(t,x,y,s,\lambda)}{\partial t} z(t,s,\lambda) + \right.$$

$$\left. + R_{11}(t,x,y,s,\lambda)\frac{\partial z(t,s,\lambda)}{\partial t}\right] d\lambda ds - \tag{18}$$

$$-\int_0^l\int_0^m \left[\frac{\partial R_{12}(t,x,y,s,\lambda)}{\partial t}\frac{\partial z(t,s,\lambda)}{\partial t} + R_{12}(t,x,y,s,\lambda)\frac{\partial^2 z(t,s,\lambda)}{\partial t^2}\right] d\lambda ds\,.$$

Поскольку из системы (14) имеем $u(t,s,\lambda) = -p(t,s,\lambda)$, то уравнение (1) примет вид $\frac{\partial^2 z(t,s,\lambda)}{\partial t^2} = a^2\left(\frac{\partial^2 z(t,s,\lambda)}{\partial s^2} + \frac{\partial^2 z(t,s,\lambda)}{\partial \lambda^2}\right) - p(t,s,\lambda)$. Используя выражение (17), имеем

$$\frac{\partial^2 z(t,s,\lambda)}{\partial t^2} = a^2\left(\frac{\partial^2 z(t,s,\lambda)}{\partial s^2} + \frac{\partial^2 z(t,s,\lambda)}{\partial \lambda^2}\right) -$$

$$-\int_0^l\int_0^m R_{21}(t,s,\lambda,\rho,\sigma)\, z(t,\rho,\sigma)\, d\sigma d\rho - \int_0^l\int_0^m R_{22}(t,s,\lambda,\rho,\sigma)\frac{\partial z(t,\rho,\sigma)}{\partial t} d\sigma d\rho\,. \tag{19}$$

Дальше, учитывая соотношение (19), равенство (18) преобразуем следующим образом:

$$\frac{\partial^2 p(t,x,y)}{\partial t^2} = -\int_0^l\int_0^m \left[\frac{\partial R_{11}(t,x,y,s,\lambda)}{\partial t} z(t,s,\lambda) + R_{11}(t,x,y,s,\lambda)\frac{\partial z(t,s,\lambda)}{\partial t} + \right.$$

$$+ \frac{\partial R_{12}(t,x,y,s,\lambda)}{\partial t}\frac{\partial z(t,s,\lambda)}{\partial t} +$$

$$+ a^2 R_{12}(t,x,y,s,\lambda)\left(\frac{\partial^2 z(t,s,\lambda)}{\partial s^2} + \frac{\partial^2 z(t,s,\lambda}{\partial \lambda^2}\right) - \tag{20}$$

$$- R_{12}(t,x,y,s,\lambda)\int_0^l\int_0^m R_{21}(t,s,\lambda,\rho,\sigma)\, z(t,\rho,\sigma)\, d\sigma d\rho -$$

$$\left. - R_{12}(t,x,y,s,\lambda)\int_0^l\int_0^m R_{22}(t,s,\lambda,\rho,\sigma)\frac{\partial z(t,\rho,\sigma)}{\partial t} d\sigma d\rho\right] d\lambda ds\,.$$

После этого, предполагая выполнение краевых условий

$$R_{12}(t,x,y,0,\lambda) = 0\,,\; R_{12}(t,x,y,l,\lambda) = 0 \tag{21}$$

и принимая во внимание краевые условия (3), с помощью двукратного применения формулы интегрирования по частям получим

ISSN 0452-9910. **Кибернетика и вычисл. техника. 2014. Вып. 177**

$$\int_0^l\int_0^m R_{12}(t,x,y,s,\lambda)\,\frac{\partial^2 z(t,s,\lambda)}{\partial s^2}d\lambda ds=\int_0^m R_{12}(t,x,y,l,\lambda)\frac{\partial z(t,l,\lambda)}{\partial s}d\lambda-$$

$$-\int_0^m R_{12}(t,x,y,0,\lambda)\frac{\partial z(t,0,\lambda)}{\partial s}d\lambda-\int_0^l\int_0^m\frac{\partial R_{12}(t,x,y,s,\lambda)}{\partial s}\,\frac{\partial z(t,s,\lambda)}{\partial s}d\lambda ds=$$

$$=-\int_0^m\frac{\partial R_{12}(t,x,y,l,\lambda)}{\partial s}\,z(t,l,\lambda)\,d\lambda+\int_0^m\frac{\partial R_{12}(t,x,y,0,\lambda)}{\partial s}\,z(t,0,\lambda)\,d\lambda+ \tag{22}$$

$$+\int_0^l\int_0^m\frac{\partial^2 R_{12}(t,x,y,s,\lambda)}{\partial s^2}\,z(t,s,\lambda)d\lambda ds=\int_0^l\int_0^m\frac{\partial^2 R_{12}(t,x,y,s,\lambda)}{\partial s^2}\,z(t,s,\lambda)d\lambda ds\,.$$

Подобным образом, при выполнении краевых условий

$$R_{12}(t,x,y,s,0)=0\,,\;R_{12}(t,x,y,s,m)=0 \tag{23}$$

получаем следующее соотношение:

$$\int_0^l\int_0^m R_{12}(t,x,y,s,\lambda)\,\frac{\partial^2 z(t,s,\lambda)}{\partial \lambda^2}d\lambda ds=\int_0^l\int_0^m\frac{\partial^2 R_{12}(t,x,y,s,\lambda)}{\partial \lambda^2}\,z(t,s,\lambda)d\lambda ds\,. \tag{24}$$

Кратный интеграл $\int_0^l\int_0^m R_{12}(t,x,y,s,\lambda)\int_0^l\int_0^m R_{21}(t,s,\lambda,\rho,\sigma)\,z(t,\rho,\sigma)\,d\sigma\,d\rho\,d\lambda\,ds$ преобразуем таким образом. Меняя в нем порядок интегрирования, изменим обозначение переменных интегрирования s на ρ, λ на σ, и , наоборот, ρ на s , σ на λ. Это приводит к следующему соотношению:

$$\int_0^l\int_0^m R_{12}(t,x,y,s,\lambda)\int_0^l\int_0^m R_{21}(t,s,\lambda,\rho,\sigma)\,z(t,\rho,\sigma)\,d\sigma\,d\rho\,d\lambda\,ds=$$

$$=\int_0^l\int_0^m\int_0^l\int_0^m R_{12}(t,x,y,s,\lambda)R_{21}(t,s,\lambda,\rho,\sigma)\,z(t,\rho,\sigma)\,d\lambda\,ds\,d\sigma\,d\rho= \tag{25}$$

$$=\int_0^l\int_0^m\int_0^l\int_0^m R_{12}(t,x,y,\rho,\sigma)R_{21}(t,\rho,\sigma,s,\lambda)\;d\sigma\,d\rho\,z(t,s,\lambda)\,d\lambda\,ds\,.$$

Подобным способом находим

$$\int_0^l\int_0^m R_{12}(t,x,y,s,\lambda)\int_0^l\int_0^m R_{21}(t,s,\lambda,\rho,\sigma)\frac{\partial z(t,\rho,\sigma)}{\partial t}d\sigma\,d\rho\,d\lambda\,ds=$$

$$=\int_0^l\int_0^m\int_0^l\int_0^m R_{12}(t,x,y,s,\lambda)R_{21}(t,s,\lambda,\rho,\sigma)\frac{\partial z(t,\rho,\sigma)}{\partial t}d\lambda\,ds\,d\sigma\,d\rho= \tag{26}$$

$$=\int_0^l\int_0^m\int_0^l\int_0^m R_{12}(t,x,y,\rho,\sigma)R_{21}(t,\rho,\sigma,s,\lambda)\;d\sigma\,d\rho\frac{\partial z(t,s,\lambda)}{\partial t}d\lambda\,ds\,.$$

На основе соотношений (22), (24), (25) и (26) равенство (20) примет вид

$$\frac{\partial^2 p(t,x,y)}{\partial t^2} = -\int_0^l \int_0^m \Bigg[\frac{\partial R_{11}(t,x,y,s,\lambda)}{\partial t} z(t,s,\lambda) + R_{11}(t,x,y,s,\lambda) \frac{\partial z(t,s,\lambda)}{\partial t} +$$
$$+ \frac{\partial R_{12}(t,x,y,s,\lambda)}{\partial t} \frac{\partial z(t,s,\lambda)}{\partial t} +$$
$$+ a^2 \left(\frac{\partial^2 R_{12}(t,x,y,s,\lambda)}{\partial s^2} + \frac{\partial^2 R_{12}(t,x,y,s,\lambda)}{\partial \lambda^2} \right) z(t,s,\lambda) - \tag{27}$$
$$- \int_0^l \int_0^m R_{12}(t,x,y,\rho,\sigma) R_{21}(t,\rho,\sigma,s,\lambda)\, d\sigma\, d\rho\, z(t,s,\lambda) -$$
$$- \int_0^l \int_0^m R_{12}(t,x,y,\rho,\sigma) R_{21}(t,\rho,\sigma,s,\lambda) d\sigma\, d\rho \frac{\partial z(t,s,\lambda)}{\partial t} \Bigg] d\lambda\, ds\,.$$

С другой стороны, на основе равенства (17) имеем

$$\frac{\partial^2 p(t,x,y)}{\partial x^2} = \int_0^l \int_0^m \frac{\partial^2 R_{21}(t,x,y,s,\lambda)}{\partial x^2} z(t,s,\lambda)\, d\lambda ds + \tag{28}$$
$$+ \int_0^l \int_0^m \frac{\partial^2 R_{22}(t,x,y,s,\lambda)}{\partial x^2} \frac{\partial z(t,s,\lambda)}{\partial t} d\lambda ds\,,$$

$$\frac{\partial^2 p(t,x,y)}{\partial y^2} = \int_0^l \int_0^m \frac{\partial^2 R_{21}(t,x,y,s,\lambda)}{\partial y^2} z(t,s,\lambda)\, d\lambda ds + \tag{29}$$
$$+ \int_0^l \int_0^m \frac{\partial^2 R_{22}(t,x,y,s,\lambda)}{\partial y^2} \frac{\partial z(t,s,\lambda)}{\partial t} d\lambda ds\,.$$

С помощью двумерной дельта-функции $\delta(x-\mathrm{s}, y-\lambda) = \delta(x-\mathrm{s})\,\delta(y-\lambda)$, где $\delta(x)$ — обычная дельта-функция Дирака, получим соотношение $z(t,x,y) = \int_0^l \int_0^m \delta(x-\mathrm{s}, y-\lambda)\, z(t,s,\lambda)\, d\lambda ds\,.$

Подставляя это выражение в уравнение $\frac{\partial^2 p(t,x,y)}{\partial t^2} = a^2 \left(\frac{\partial^2 p(t,x,y)}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 p(t,x,y)}{\partial y^2} \right) + z(t,x,y)$, с учетом соотношений (28) и (29) приходим к такому равенству:

$$\frac{\partial^2 p(t,x,y)}{\partial t^2} = \int_0^l \int_0^m \Bigg[a^2 \left(\frac{\partial^2 R_{21}(t,x,y,s,\lambda)}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 R_{21}(t,x,y,s,\lambda)}{\partial y^2} \right) z(t,s,\lambda) + \tag{30}$$
$$+ a^2 \left(\frac{\partial^2 R_{22}(t,x,y,s,\lambda)}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 R_{22}(t,x,y,s,\lambda)}{\partial y^2} \right) \frac{\partial z(t,s,\lambda)}{\partial t} + \delta(x-\mathrm{s}, y-\lambda)\, z(t,s,\lambda) \Bigg] d\lambda ds.$$

Сопоставление выражений (27) и (30) приводит к следующим уравнениям:

$$\frac{\partial R_{11}(t,x,y,s,\lambda)}{\partial t}+a^2\left(\frac{\partial^2 R_{12}(t,x,y,s,\lambda)}{\partial s^2}+\frac{\partial^2 R_{12}(t,x,y,s,\lambda)}{\partial \lambda^2}\right)+$$
$$+a^2\left(\frac{\partial^2 R_{21}(t,x,y,s,\lambda)}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 R_{21}(t,x,y,s,\lambda)}{\partial y^2}\right)- \tag{31}$$
$$-\int_0^l\int_0^m R_{12}(t,x,y,\rho,\sigma)R_{21}(t,\rho,\sigma,s,\lambda)\,d\sigma\, d\rho+\delta(x-\mathrm{s},y-\lambda)=0\,,$$

$$\frac{\partial R_{12}(t,x,y,s,\lambda)}{\partial t}+a^2\left(\frac{\partial^2 R_{22}(t,x,y,s,\lambda)}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 R_{22}(t,x,y,s,\lambda)}{\partial y^2}\right)+$$
$$+R_{11}(t,x,y,s,\lambda)-\int_0^l\int_0^m R_{12}(t,x,y,\rho,\sigma)R_{21}(t,\rho,\sigma,s,\lambda)d\sigma\, d\rho=0\,. \tag{32}$$

Дифференцируя равенство (17) по переменной t, получим соотношение

$$\frac{\partial p(t,x,y)}{\partial t}=\int_0^l\int_0^m\left[\frac{\partial R_{21}(t,x,y,s,\lambda)}{\partial t}z(t,s,\lambda)+R_{21}(t,x,y,s,\lambda)\frac{\partial z(t,s,\lambda)}{\partial t}\right]d\lambda ds+$$
$$+\int_0^l\int_0^m\left[\frac{\partial R_{22}(t,x,y,s,\lambda)}{\partial t}\frac{\partial z(t,s,\lambda)}{\partial t}+R_{22}(t,x,y,s,\lambda)\frac{\partial^2 z(t,s,\lambda)}{\partial t^2}\right]d\lambda ds\,.$$

Используя выражение (19), последнее соотношение преобразуем таким образом:

$$\frac{\partial p(t,x,y)}{\partial t}=\int_0^l\int_0^m\left[\frac{\partial R_{21}(t,x,y,s,\lambda)}{\partial t}z(t,s,\lambda)+R_{21}(t,x,y,s,\lambda)\frac{\partial z(t,s,\lambda)}{\partial t}+\right.$$
$$+\frac{\partial R_{22}(t,x,y,s,\lambda)}{\partial t}\frac{\partial z(t,s,\lambda)}{\partial t}+a^2R_{22}(t,x,y,s,\lambda)\left(\frac{\partial^2 z(t,s,\lambda)}{\partial s^2}+\frac{\partial^2 z(t,s,\lambda)}{\partial \lambda^2}\right)-$$
$$-R_{22}(t,x,y,s,\lambda)\int_0^l\int_0^m R_{21}(t,s,\lambda,\rho,\sigma)\ z(t,\rho,\sigma)\,d\sigma\, d\rho- \tag{33}$$
$$\left.-R_{22}(t,x,y,s,\lambda)\int_0^l\int_0^m R_{22}(t,s,\lambda,\rho,\sigma)\frac{\partial z(t,\rho,\sigma)}{\partial t}d\sigma\, d\rho\right]d\lambda ds\,.$$

Полагая выполнение краевых условий

$$R_{22}(t,x,y,0,\lambda)=0\,,\ R_{22}(t,x,y,l,\lambda)=0\,, \tag{34}$$

после двукратного применения формулы интегрирования по частям получим

$$\int_0^l\int_0^m R_{22}(t,x,y,s,\lambda)\,\frac{\partial^2 z(t,s,\lambda)}{\partial s^2}d\lambda ds=\int_0^m R_{22}(t,x,y,l,\lambda)\frac{\partial\, z(t,l,\lambda)}{\partial s}d\lambda-$$
$$-\int_0^m R_{22}(t,x,y,0,\lambda)\frac{\partial\, z(t,0,\lambda)}{\partial s}d\lambda-\int_0^l\int_0^m\frac{\partial R_{22}(t,x,y,s,\lambda)}{\partial s}\,\frac{\partial\, z(t,s,\lambda)}{\partial s}d\lambda ds=$$

$$=-\int_0^m \frac{\partial R_{22}(t,x,y,l,\lambda)}{\partial s}\,z(t,l,\lambda)\,d\lambda+\int_0^m \frac{\partial R_{22}(t,x,y,0,\lambda)}{\partial s}\,z(t,0,\lambda)\,d\lambda+$$

$$+\int_0^l\int_0^m \frac{\partial^2 R_{22}(t,x,y,s,\lambda)}{\partial s^2}\,z(t,s,\lambda)d\lambda ds=\int_0^l\int_0^m \frac{\partial^2 R_{22}(t,x,y,s,\lambda)}{\partial s^2}\,z(t,s,\lambda)d\lambda ds\,. \qquad (35)$$

Подобным образом с учетом краевых условий

$$R_{22}(t,x,y,s,0)=0\,,\; R_{22}(t,x,y,s,m)=0 \qquad (36)$$

находим

$$\int_0^l\int_0^m R_{22}(t,x,y,s,\lambda)\,\frac{\partial^2 z(t,s,\lambda)}{\partial\lambda^2}d\lambda ds=$$
$$=\int_0^l\int_0^m \frac{\partial^2 R_{22}(t,x,y,s,\lambda)}{\partial\lambda^2}\,z(t,s,\lambda)d\lambda ds\,. \qquad (37)$$

Дальше в двойном интеграле $\int_0^l\int_0^m R_{22}(t,x,y,s,\lambda)\int_0^l\int_0^m R_{21}(t,s,\lambda,\rho,\sigma)\,z(t,\rho,\sigma)\,d\sigma\,d\rho\,d\lambda\,ds$ сначала меняем порядок интегрирования, изменяем обозначение переменных интегрирования s на ρ, λ на σ, и , наоборот, ρ на s , σ на λ . В результате получим

$$\int_0^l\int_0^m R_{22}(t,x,y,s,\lambda)\int_0^l\int_0^m R_{21}(t,s,\lambda,\rho,\sigma)\,z(t,\rho,\sigma)\,d\sigma\,d\rho\,d\lambda\,ds=$$
$$=\int_0^l\int_0^m\int_0^l\int_0^m R_{22}(t,x,y,s,\lambda)R_{21}(t,s,\lambda,\rho,\sigma)\,z(t,\rho,\sigma)\,d\lambda\,ds\,d\sigma\,d\rho= \qquad (38)$$
$$=\int_0^l\int_0^m\int_0^l\int_0^m R_{22}(t,x,y,\rho,\sigma)R_{21}(t,\rho,\sigma,s,\lambda)\;d\sigma\,d\rho\,z(t,s,\lambda)\,d\lambda\,ds\,.$$

Аналогично имеем

$$\int_0^l\int_0^m R_{22}(t,x,y,s,\lambda)\int_0^l\int_0^m R_{22}(t,s,\lambda,\rho,\sigma)\frac{\partial z(t,\rho,\sigma)}{\partial t}d\sigma\,d\rho\,d\lambda\,ds=$$
$$=\int_0^l\int_0^m\int_0^l\int_0^m R_{22}(t,x,y,s,\lambda)R_{22}(t,s,\lambda,\rho,\;\sigma)\frac{\partial z(t,\rho,\sigma)}{\partial t}d\lambda\,ds\,d\sigma\,d\rho= \qquad (39)$$
$$=\int_0^l\int_0^m\int_0^l\int_0^m R_{22}(t,x,y,\rho,\sigma)R_{22}(t,\rho,\sigma,s,\lambda)\;d\sigma\,d\rho\frac{\partial z(t,s,\lambda)}{\partial t}d\lambda\,ds\,.$$

Соотношения (35), (37), (38) и (39) дают возможность переписать равенство (33) следующим образом:

$$\frac{\partial p(t,x,y)}{\partial t}=\int_0^l\int_0^m\left[\frac{\partial R_{21}(t,x,y,s,\lambda)}{\partial t}z(t,s,\lambda)+R_{21}(t,x,y,s,\lambda)\frac{\partial z(t,s,\lambda)}{\partial t}+\right.$$
$$+\frac{\partial R_{22}(t,x,y,s,\lambda)}{\partial t}\frac{\partial z(t,s,\lambda)}{\partial t}+$$
$$+a^2\left(\frac{\partial^2 R_{22}(t,x,y,s,\lambda)}{\partial s^2}+\frac{\partial^2 R_{22}(t,x,y,s,\lambda)}{\partial \lambda^2}\right)z(t,s,\lambda)- \tag{40}$$
$$-\int_0^l\int_0^m R_{22}(t,x,y,\rho,\sigma)R_{21}(t,\rho,\sigma,s,\lambda)\,d\sigma\,d\rho\, z(t,s,\lambda)-$$
$$\left.-\int_0^l\int_0^m R_{22}(t,x,y,\rho,\sigma)R_{22}(t,\rho,\sigma,s,\lambda)\,d\sigma\,d\rho\frac{\partial z(t,s,\lambda)}{\partial t}\right]d\lambda ds\,.$$

Сравнивая соотношения (16) и (40), получаем

$$\frac{\partial R_{21}(t,x,y,s,\lambda)}{\partial t}+a^2\left(\frac{\partial^2 R_{22}(t,x,y,s,\lambda)}{\partial s^2}+\frac{\partial^2 R_{22}(t,x,y,s,\lambda)}{\partial \lambda^2}\right)+$$
$$+R_{11}(t,x,y,s,\lambda)-\int_0^l\int_0^m R_{22}(t,x,y,\rho,\sigma)R_{21}(t,\rho,\sigma,s,\lambda)\,d\sigma\,d\rho=0\,, \tag{41}$$

$$\frac{\partial R_{22}(t,x,y,s,\lambda)}{\partial t}+R_{12}(t,x,y,s,\lambda)+R_{21}(t,x,y,s,\lambda)-$$
$$-\int_0^l\int_0^m R_{22}(t,x,y,\rho,\sigma)R_{22}(t,\rho,\sigma,s,\lambda)\,d\sigma\,d\rho=0\,. \tag{42}$$

Условия $p(t_1,x,y)=\dfrac{\partial z(t_1,x,y)}{\partial t}$, $\dfrac{\partial p(t_1,x,y)}{\partial t}=-z(t_1,x,y)$ и соотношения (16), (17) приводят к таким равенствам:

$$\begin{cases}R_{11}(t_1,x,y,s,\lambda)=\delta(x-s,\ y-\lambda), R_{12}(t_1,x,y,s,\lambda)=0,\\ R_{21}(t_1,x,y,s,\lambda)=0, R_{22}(t_1,x,y,s,\lambda)=\delta(x-s,\ y-\lambda).\end{cases} \tag{43}$$

Принимая во внимание вышеизложенные рассуждения, приходим к такому выводу.

Теорема 2. Функции $R_{ij}(t,x,y),\ i=1,\ 2;\ j=1,\ 2$, удовлетворяют соотношениям (31), (32), (41), (42), краевым условиям (21), (23), (34), (36) и дополнительным условиям (43).

Если известны функции $R_{ij}(t,x,y),\ i=1,\ 2;\ j=1,\ 2$, то с их помощью можно найти оптимальное управление $u(t,x,y)$.

Теорема 3. Оптимальное управление $u(t,x,y)$ имеет вид $u(t,x,y)=-p(t,x,y)$, где функция $p(t,x,y)$ задана выражением (17), в котором функция $z(t,s,\lambda)$ является решением интегро-дифференциального уравнения с частными производными (19), удовлетворяет начальным условиям (2) и краевым условиям (3).

Выводы

В данной статье получена система интегро-дифференциальных уравнений Риккати с частными производными для линейно-квадратической задачи оптимального управления процессом колебаний прямоугольной мембраны. Решение этой системы предоставляет возможность выписать явную формулу для вычисления оптимального управления. Перспективным для дальнейшего исследования является получение аналогичных результатов для случая круглой мембраны. Важным вопросом представляется изучение поведения функций $R_{ij}(t, x, y), i = 1,\ 2; j = 1,\ 2$ при $t_1 \to \infty$. Также следует отметить целесообразность обобщения результатов, полученных в данной работе, на случай систем с дробными производными [7, 8].

1. Андреев Ю.Н. Управление конечномерными линейными объектами / Ю. Н. Андреев. — М. : Наука, 1976 — 424 с.
2. Ройтенберг Я.Н. Автоматическое управление / Я.Н. Ройтенберг — М. : Наука, 1971. — 396 с.
3. Бутковский А.Г. Теория оптимального управления системами с распределенными параметрами / А.Г. Бутковский. — М. : Наука, 1965. — 476 с.
4. Бутковский А.Г. Методы управления системами с распределенными параметрами / А.Г. Бутковский. — М. : Наука, 1975. — 568 с.
5. Лионс Ж.–Л. Оптимальное управление системами, описываемыми уравнениями с частными производными / Ж.–Л. Лионс. — М. : Мир, 1972. — 414 с.
6. Сиразетдинов Т.К. Оптимизация систем с распределенными параметрами / Т.К. Сиразетдинов. — М. : Наука, 1977. — 480 с.
7. Чикрий А.А., Эйдельман С.Д. Игровые задачи управления для квазилинейных системам с дробными производными Римана-Лиувилля / А.А. Чикрий, С.Д. Эйдельман // Кибернетика и системный анализ. — 2012. — № 6. — С. 66–99.
8. Эйдельман С.Д. Динамические игровые задачи сближения для уравнений дробного порядка / С.Д. Эйдельман, А.А. Чикрий // Укр. мат. журн. — 2000. — **52**, № 11. — С. 1566–1583.

Получено 23.06.2014