

ИССЛЕДОВАНИЕ КОРРЕКТНОСТИ ЗАДАЧ ИДЕНТИФИКАЦИИ МНОГОМЕРНЫХ СИСТЕМ ЧАСТОТНЫМ МЕТОДОМ

С.В. Мельничук

Институт космических исследований НАН Украины и ГКА Украины

На основе частотного метода установлены и исследованы условия, при которых задачи идентификации по приближенным данным являются корректно поставленными, а когда их решения становятся неустойчивыми. Показано, что для корректной постановки необходимо, чтобы сложность модели согласовывалась с погрешностью исходных данных. Для выбранного частотного метода уровень погрешности зависит от длительности наблюдения и величины шума. Сложность модели определяется числом обусловленности, при котором получается устойчивое решение, которое регулируется с помощью изменения ее размерности. Разработан алгоритм регуляризации задачи идентификации, обеспечивающий слабую чувствительность к погрешностям получаемого частотным методом решения.

Ключевые слова: системная идентификация, некорректно поставленная задача, регуляризация.

На основі частотного методу встановлено та досліджено умови, при яких задачі ідентифікації за наближеними даними є коректно поставленими, а коли їх розв'язки стають нестійкими. Показано, що для коректної постановки необхідно, щоб складність моделі узгоджувалась з похибкою вхідних даних. Для вибраного частотного методу рівень похибки залежить від тривалості спостереження та величини шуму. Складність моделі визначається числом обумовленості, при якому отримується стійкий розв'язок, який регулюється за допомогою зміни розмірності моделі. Розроблено алгоритм регуляризації задачі ідентифікації, що забезпечує слабку чутливість до похибок її розв'язку, отриманого частотним методом.

Ключові слова: системна ідентифікація, некоректно поставлена задача, регуляризація.

ВВЕДЕНИЕ

Задачи системной идентификации относятся к классу так называемых обратных, характеризующихся тем, что при определенных условиях они являются некорректно поставленными и их решения становятся сильно чувствительными к погрешности исходных данных. В этих случаях точное решение не может быть получено в принципе, а попытка найти аппроксимирующее решение при разных реализациях погрешности приводит к множеству сильно различающихся моделей, мало пригодных с практической точки зрения. Некорректность в первую очередь свойственна структурно-параметрической идентификации, когда необходимо построить модель, не зная априори ее размерности. Поэтому при идентификации сложных многомерных динамических систем следует ориентироваться на построение только аппроксимирующих моделей такой размерности, при которой получаемое решение является устойчивым или слабо чувствительным к погрешностям.

Факт некорректности хорошо известен, однако установление условий, при которых она возникает, и способы построения регуляризированных решений остаются актуальными для исследований, особенно в условиях ограниченной неопределенности в данных. Поскольку свойство некорректности является фундаментальной особенностью этого класса задач, оно проявляется независимо от того, каким методом решается задача идентификации. В данной работе это свойство детально исследуется для решения задач идентификации на основе одного из частотных методов.

Частотные методы идентификации решают задачу построения модели системы на основе ее частотных характеристик, выделяемых из экспериментально полученных данных. Идентификация производится путем нахождения передаточной функции, коэффициенты которой связаны с частотными характеристиками. Для решения задачи были введены критерии [1, 2], разработан ряд методов [3]. Среди подходов, ориентированных на идентификацию в условиях ограниченной неопределенности, можно выделить конечно-частотный [4, 5], наиболее активно развивающийся в последнее время.

ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ

Описание частотного метода идентификации. Исследование корректности задач идентификации проведем на основе частотного метода, описанного в [6]. Будут рассматриваться линейные стационарные устойчивые многомерные системы в пространстве состояний с одним входом и выходом в условиях ограниченной неопределенности, представленной, с целью упрощения, лишь аддитивным шумом η на выходе:

$$\dot{x} = Ax + bu, \quad y = c^T x + \eta, \quad (1)$$

$$\|\eta\|_{l_\infty} \leq \varepsilon_\eta, \quad (2)$$

где x — вектор состояния, A, b, c^T — соответственно матрица $N \times N$, вектор-столбец $N \times 1$ и вектор-строка $1 \times N$. Размерность N исходной генерирующей системы (1) большая, априори неизвестная. Задачей является построение приближенной подходящей модели, адекватной системе (1) по выходу y . В методе частотной идентификации построение математической модели осуществляется по частотным характеристикам, выделяемым из экспериментально полученных выходных сигналов при гармоническом возбуждении системы на входе:

$$u(t) = \sum_{s=1}^S u_s \cdot \sin(\omega_s t + \varphi_s), \quad (3)$$

где u_s, ω_s, φ_s — соответственно амплитуды, частоты и фазы гармоник сигнала, известные точно, S — число гармоник. Частоты ω_s не должны совпадать: $\omega_{s_1} \neq \omega_{s_2}, s_1 \neq s_2$, а S должно быть заведомо большим, чем

размерность восстанавливаемой модели. Оценки частотных характеристик Φ и Ψ получаются фильтрацией измеренного выходного сигнала на частотах гармоник входного сигнала:

$$\hat{\Phi}_k(\tau) = \frac{2}{u_k \tau} \int_0^\tau y(t) \sin(\omega_k t) dt, \quad \hat{\Psi}_k(\tau) = \frac{2}{u_k \tau} \int_0^\tau y(t) \cos(\omega_k t) dt, \quad k=1, S, \quad (4)$$

где τ — длительность наблюдения. В пределе при $\tau \rightarrow \infty$ получаем их точные значения в случае отсутствия шума η либо когда шум не содержит гармоник, совпадающих по частоте с входными ω_s :

$$\Phi_k = \hat{\Phi}_k(\infty), \quad \Psi_k = \hat{\Psi}_k(\infty). \quad (5)$$

Из теории реализаций следует, что система (1) в общем виде для заданных вход-выходных данных соответствует множеству эквивалентных моделей. Поэтому из этого множества выберем реализации с жордановым представлением матрицы системы A для простоты с некратными собственными значениями $\alpha_p \pm i\beta_p$, $\alpha_p < 0$, $\beta_p \geq 0$:

$$A = \text{diag}(A_p), \quad A_p = \begin{pmatrix} \alpha_p & \beta_p \\ -\beta_p & \alpha_p \end{pmatrix}, \quad p=1, P, \quad x = \text{col}(x_p), \quad x_p = \begin{pmatrix} x_p^{\cos} \\ x_p^{\sin} \end{pmatrix}^T,$$

$$b = \text{col}(B_p), \quad B_p = \begin{pmatrix} b_p^{\cos} \\ b_p^{\sin} \end{pmatrix}^T, \quad c = \text{row}(C_p), \quad C_p = \begin{pmatrix} c_p^{\cos} & c_p^{\sin} \end{pmatrix}$$

что позволяет получить аналитические выражения Φ и Ψ [6]. Значения частотных параметров Φ_k, Ψ_k связаны с передаточной функцией системы

$$W(p) = \frac{V(p)}{Q(p)} = \frac{v_{N-1}p^{N-1} + \dots + v_1p + v_0}{p^N + q_{N-1}p^{N-1} + \dots + q_1p + q_0}, \quad \text{где } V(p), Q(p) \text{ —}$$

характеристические полиномы, а полюса которой — собственные значения матрицы A соотношением

$$V(j\omega_k) - (\Phi_k + j\Psi_k) \cdot Q(j\omega_k) = 0, \quad k=1, S. \quad (6)$$

При параметрической идентификации модели заданного порядка N^* , для нахождения коэффициентов полинома $Q(j\omega_k)$ можно использовать систему линейных алгебраических уравнений (СЛАУ), получаемую из (4) и (6):

$$H(S) \cdot q(S) = g(S), \quad (7)$$

где $H(S)$ — матрица системы частотных уравнений, $q(S)$ — вектор, составленный из коэффициентов полинома Q . Выражения для матрицы $H(S)$ и вектора $g(S)$ приведены в [6]. Размерность вектора $q(S)$ равна размерности N^* аппроксимирующей идентифицируемой модели, количество уравнений определяется величинами S и N^* . Параметр S обозначает, что коэффициенты системы (7) зависят от частот гармоник входного

возбуждающего сигнала, а количество ее уравнений зависит от количества гармоник. Для упрощения он может опускаться.

Коэффициенты $H(S)$ и $g(S)$ зависят от оценок частотных параметров, т.е. при неточном нахождении Φ и Ψ , (7) является СЛАУ с неточно заданными матрицей $H(S)$ и правой частью.

Для выбранного порядка модели N^* из (7) находятся приближенные оценки собственных значений матрицы модели \hat{A} . Для однозначного определения модели в жордановой форме остается найти любую подходящую реализацию коэффициентов \hat{b} и \hat{c} . Согласно теории реализаций, можно достаточно произвольно выбрать значения одного из векторов; тогда коэффициенты второго находятся из переопределенной линейной системы, построенной подстановкой в аналитические выражения частотных характеристик (5) их оценок, а также найденных оценок собственных значений \hat{A} .

Погрешности оценок параметров модели. Погрешности \hat{b} и \hat{c} зависят от погрешности, с которой была получена матрица \hat{A} . Таким образом, пригодность получаемой модели определяется чувствительностью оценок $\alpha_k \pm i\beta_k$ к имеющимся неточностям. Поскольку они находятся как корни полинома с коэффициентами $q(S)$, анализ сводится к рассмотрению погрешности системы (7) с неточно определенными коэффициентами. Представим (7) в виде

$$(H_0(S) + H_1(S, \tau)) \cdot (q^0(S) + q^1(S, \tau)) = g^0(S) + g^1(S, \tau), \quad (8)$$

где $H_0(S), g^0(S)$ — соответственно точные значения левой и правой части (7), $H_1(S, \tau), g^1(S, \tau)$ — ошибки, величины которых, в конечном счете, зависят от длительности наблюдения. Векторы $q^0(S)$ и $q^1(S, \tau)$ соответствуют точным значениям коэффициентов полинома Q и их погрешностям. Точность решения системы определяется двумя величинами:

— обусловленностью матрицы $H_0(S)$: $\mu(H_0(S)) = \|H_0^{-1}(S)\| \cdot \|H_0(S)\|$;

— погрешностью в данных $g^1(S, \tau)$. Погрешности $H_1(S, \tau), g^1(S, \tau)$ зависят от точности определения оценок частотных параметров. Запишем

$$\hat{\Phi}(\tau) = \Phi + \Delta\hat{\Phi}^{\det}(\tau) + \Delta\hat{\Phi}^{\text{noise}}(\tau), \quad \hat{\Psi}(\tau) = \Psi + \Delta\hat{\Psi}^{\det}(\tau) + \Delta\hat{\Psi}^{\text{noise}}(\tau), \quad (9)$$

где $\Delta\hat{\Phi}^{\text{noise}}(\tau), \Delta\hat{\Psi}^{\text{noise}}(\tau)$ — погрешности, возникающие при фильтрации аддитивного шума, $\Delta\hat{\Phi}^{\det}(\tau), \Delta\hat{\Psi}^{\det}(\tau)$ — погрешности, возникающие вследствие конечности интервала интегрирования незашумленного выхода системы (далее будем их определять, как «ошибку от τ »). При практическом применении, оценки содержат также ошибки численного метода интегрирования и вычислительные. Пусть аддитивный шумовой сигнал

имеет вид суммы конечного числа шумовых гармоник

$$\eta(t) = \sum_{z=1}^Z \eta_z \cdot \sin(\omega_z^{(\eta)} t + \varphi_z^{(\eta)}), \quad (10)$$

где $\eta_z, \omega_z^{(\eta)}, \varphi_z^{(\eta)}$ — соответственно амплитуды, частоты и фазы, Z — их количество.

Вклад каждой z -й шумовой гармоники в ошибку оценки частотной характеристики при фильтрации на k -й частоте входного сигнала, в нерезонансном случае ($\omega_k \neq \omega_z^{(\eta)}$) можно представить как величину $O\left(\frac{\varepsilon_{zk}}{\tau}\right)$,

где $\varepsilon_{zk} = \frac{\eta_z}{u_k}$ — отношение амплитуд гармоник шумового и возбуждающего сигналов [6].

Для нерезонансного случая имеем $\Delta \hat{\Phi}^{\text{noise}}(\tau), \Delta \hat{\Psi}^{\text{noise}}(\tau) = O\left(\frac{\varepsilon}{\tau}\right)$, где $\varepsilon = \frac{\|\eta(t)\|}{\|y(t)\|}$ — отношение шума к сигналу. В резонансном случае вносимая ошибка не будет зависеть от длительности времени интегрирования τ . Из аналитических выражений можно аналогично получить оценку ошибки, зависящую от τ : $\Delta \hat{\Phi}^{\text{det}}(\tau), \Delta \hat{\Psi}^{\text{det}}(\tau) = O\left(\frac{1}{\tau}\right)$. В итоге, можно записать

$$\frac{\|q^1(\tau)\|}{\|q^0\|} \leq \mu(H_0) \cdot \tilde{H} \left(O_1\left(\frac{1}{\tau}\right) + O_2\left(\frac{\varepsilon}{\tau}\right) + \Delta^{\text{num.int.}} + \Delta^{\text{comp.err.}} \right), \quad (11)$$

где $\Delta^{\text{num.int.}}, \Delta^{\text{comp.err.}}$ — ошибки численного интегрирования и вычислительная, $O_1\left(\frac{1}{\tau}\right), O_2\left(\frac{\varepsilon}{\tau}\right)$ — ошибки, порожденные конечностью τ и шумом η , а $\tilde{H}(\cdot)$ — неточно заданная матрица системы (7).

Из (11) видно, что влияет на точность при определении коэффициентов Q : обусловленность матрицы системы (7), порядки длительности интервала интегрирования τ и величина ε , характеризующая шум. Величины погрешностей коэффициентов определяют пригодность модели. В случае если они велики, такая модель непригодна, а сама задача является некорректно поставленной.

ЦЕЛЬ

Целью исследований является установление условий некорректности и введение процедуры регуляризации задачи идентификации для выбранного частотного метода.

РЕЗУЛЬТАТЫ

Исследование детерминированного случая. Для изучения условий некорректности воспользуемся соотношением (11) и исследуем влияние выражений, определяющих погрешность. Поскольку ошибки оценок параметров модели зависят от многих составляющих, исследуем их по отдельности. Полагая $\tau = \infty$ и вычисляя частотные характеристики по аналитическим формулам, получаем их точные (до вычислительных ошибок) значения. Избавившись таким образом от слагаемых $O_1(\frac{1}{\tau}), O_2(\frac{\varepsilon}{\tau}), \Delta^{\text{num.int.}}$ в (11), а также получив с точностью до вычислительных ошибок матрицу H_0 , представляется возможным исследование поведения $\mu(H_0)$, а также влияния вычислительных ошибок.

Обусловленность матрицы частотных уравнений. Исследуем основной фактор, влияющий на устойчивость решения СЛАУ (7), обусловленность $\mu(H_0)$, когда матрица H_0 известна точно.

Для большого числа случайно сгенерированных моделей размерностей $N = 2 \div 7$ при входном сигнале, состоящем из $S = 12$ гармоник, восстанавливались модели, имеющие размерность, совпадающую с размерностью генерирующей системы, т.е. $N^* = N$. Усредненные значения обусловленности для разных генерирующих систем представлены на рис. 1.

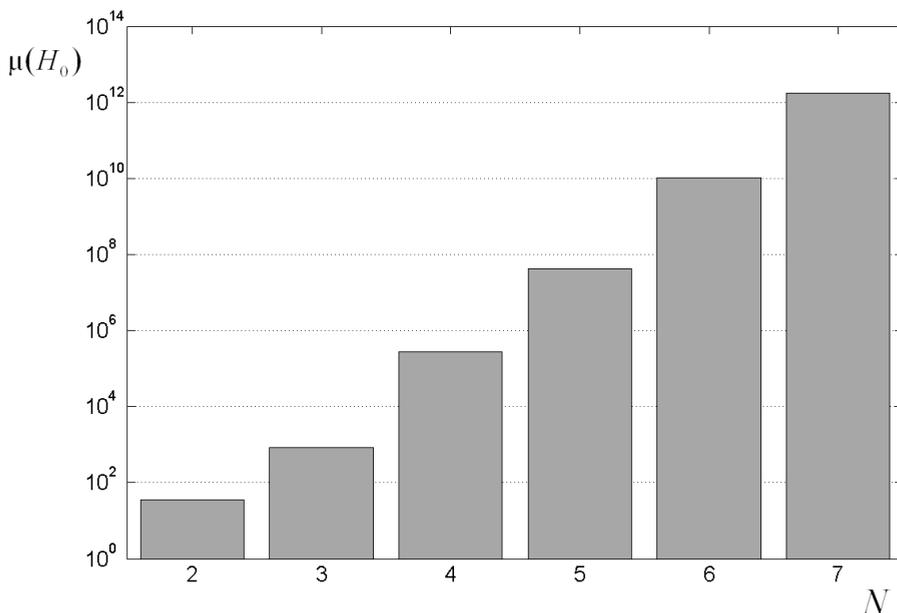


Рис. 1. Средние значения обусловленности матриц систем частотных уравнений

Как видим, обусловленность матрицы системы (7) возрастает примерно на два порядка при увеличении размерности генерирующей системы на порядок.

Рассмотрим теперь поведение обусловленности систем при идентификации аппроксимирующих редуцированных моделей ($N < N^*$). Для большого числа генерирующих систем размерности $N=8$ находились максимальные, средние и минимальные значения обусловленности матриц системы (7) для аппроксимирующих моделей размерностей $N^* = 2 \div 7$. Результаты приведены на рис. 2.

Из рис. 2 видно, что рост обусловленности в среднем на два порядка сохраняется, но абсолютное значение может сильно варьироваться. Из этого можно заключить, что обусловленность зависит от структурных свойств конкретной системы.

При проведении экспериментов также было замечено, что рост обусловленности неравномерен. Увеличение порядка модели на единицу может дать как сильное увеличение обусловленности, так и незначительное.

Влияние вычислительных погрешностей. Проведем вычислительные эксперименты с целью изучить влияние вычислительных ошибок на точность определения параметров моделей. При этом будем использовать различные процедуры рандомизации для нахождения вариации значений параметров.

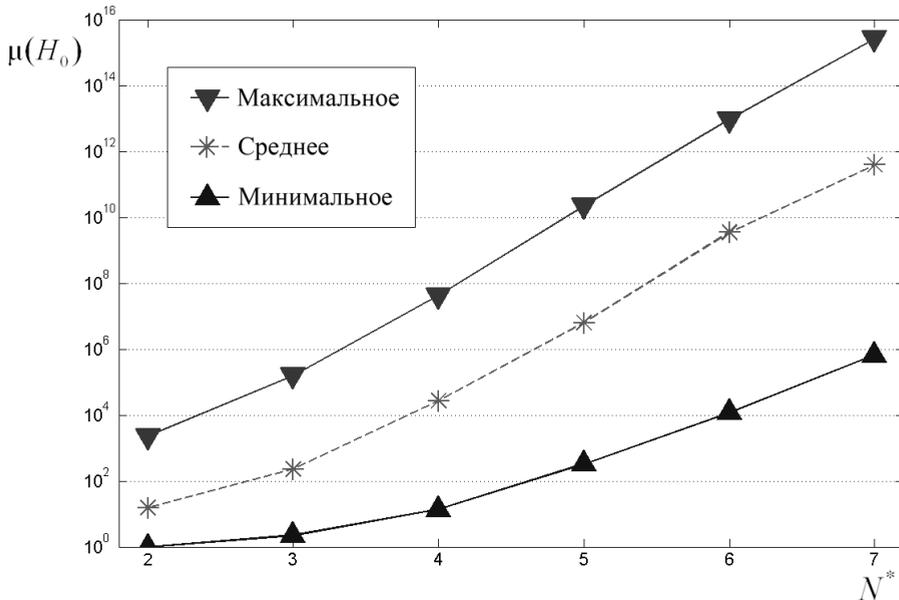


Рис. 2. Значения обусловленности матриц систем частотных уравнений аппроксимирующих моделей разной размерности

Вычислительная ошибка порождается неточным (в общем случае) представлением действительных чисел в памяти машины. Величины ошибок представления определяются длиной мантиссы используемого типа данных. Без применения экстенсивных методов вычислительную ошибку невозможно уменьшить, а избавиться от нее принципиально невозможно.

Для оценки влияния вычислительной погрешности были проведены следующие эксперименты: задавались различные входные данные, для которых при отсутствии ошибок вычисления должен был бы получаться одинаковый результат. Тогда получаемая вариация оценок параметров

модели позволяет судить о влиянии ошибок вычислений.

Были проведены эксперименты двух типов:

1. При заданном входном сигнале и фиксированных A, b варьировались коэффициенты c . Для полноразмерных моделей, при отсутствии ошибок вычисления, значения оценок собственных чисел \hat{A} при любых c должны были бы точно совпадать.

2. Фиксировалась вся система, а варьировались частоты входного сигнала.

В обоих типах экспериментов влияние вычислительных ошибок проявляется в появлении на комплексной плоскости множеств оценок собственных значений, по разбросу которых определяется чувствительность к погрешностям вычислений. Вычисления производились с типом данных с плавающей точкой двойной точности. Частотные характеристики определялись по аналитическим формулам для $\tau = \infty$, т.е. могли содержать только вычислительную ошибку.

На рис. 3 показаны точные собственные значения систем (крестиками) и их модельные оценки (кругами), полученные в детерминированном случае для генерирующих систем 10-го и 11-го порядков с одинаковыми матрицами A, b и различными коэффициентами векторов c . Полученные разбросы оценок собственных чисел означают, что для данных систем $N^* = 11$ параметры моделей вычисляются с большой погрешностью даже на основе точных исходных данных. Таким образом, решение задачи идентификации модели $N^* = 11$ в данном случае оказалось сильно чувствительным к вычислительным ошибкам, а сама задача в данных условиях оказалась некорректно поставленной.

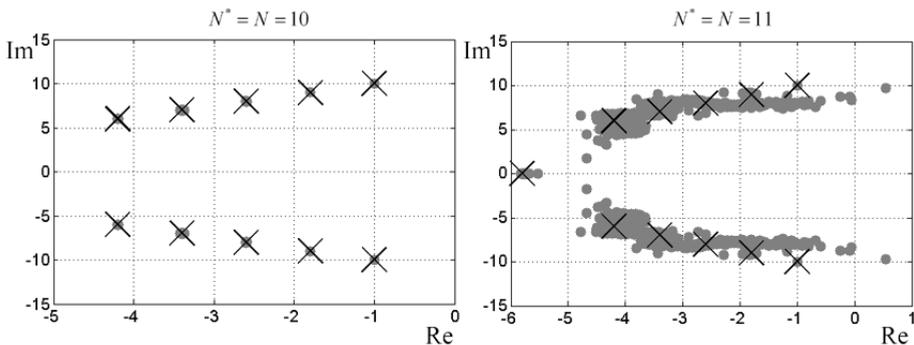


Рис. 3. Вариации оценок собственных значений моделей, порожденные вычислительными ошибками

Для определения условий некорректности в детерминированном случае был проведен эксперимент, в котором для большого числа систем разной размерности по чувствительности оценок параметров их моделей к вычислительным ошибкам определялась корректность задач их идентификации. Также находилось число обусловленности $\mu(H_0)$ системы (7). Результаты приведены на рис. 4.

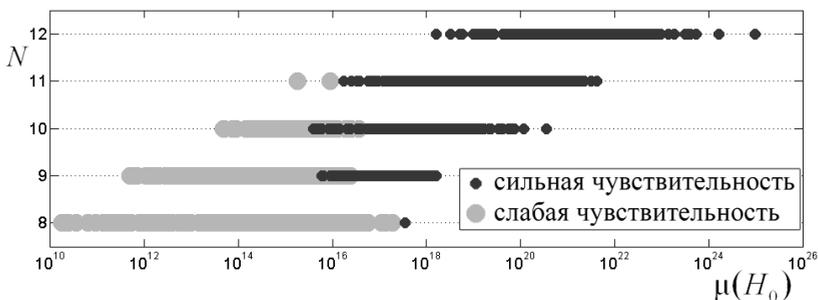


Рис. 4. Чувствительность оценок собственных значений моделей к вычислительным ошибкам

Из рисунка видны предельно допустимые значения обусловленности $\mu(H_0)$ порядка $10^{16} - 10^{17}$, при превышении которых решение становится неустойчивым по отношению к вычислительным ошибкам. Это значит, что использование типа данных с плавающей точкой двойной точности ограничивает возможности использования метода идентификации. Границей служит обусловленность матрицы системы частотных уравнений (7) (порядка 10^{17}) либо размерность модели (N или N^* не выше 11). В аналогичных экспериментах было также установлено, что для систем с чисто действительными собственными значениями размерность модели не может превышать 9. Пороговое значение числа обусловленности $\mu(H_0) = 10^{17}$ будем считать границей, выше которой находить модель бессмысленно: задача некорректна всегда, а найденные модели будут практически непригодными.

Использование обоих типов экспериментов по выделению только вычислительных ошибок дало совпадающие результаты.

Исследование влияния погрешностей исходных данных. Исследуем влияние на точность оценивания параметров модели тех составляющих (11), которые в детерминированном случае обнулялись. Полагая τ конечным, перейдем к рассмотрению недетерминированного случая, для которого (7) будет определяться неточно. Проведем исследование точности получаемых оценок частотных параметров, а затем интегральное влияние неопределенности на точность определения параметров модели и корректность постановки задачи идентификации.

Сходимость оценок частотных характеристик. Исследуем, как ведет себя погрешность получаемых оценок частотных характеристик от длительности эксперимента. Для этого рассмотрим системы порядка $N = 10$ с тремя парами комплексно-сопряженных и четырьмя действительными собственными значениями матрицы A . На вход подавался полигармонический сигнал из $S = 12$ гармоник, а шумовой сигнал представлялся в виде суммы восьми гармоник.

На рис. 5 приведены значения величин максимальных по всем координатам относительных погрешностей оценивания частотных характеристик. Сплошной линией показана ошибка, порождающаяся конечностью интервала интегрирования τ незашумленного выхода. Пунктиром показаны ошибки, вносящиеся шумом η для нерезонансного

случая при уровнях $\varepsilon = \frac{\|\eta\|_\infty}{\|y\|_\infty} = 0,01; 0,1$ (масштабировались амплитуды шумовых гармоник). Штриховыми линиями показана ошибка, возникающая в резонансном случае.

Разница частот в случае близком к резонансу составляла 0,001. Все частотные характеристики рассчитывались по аналитическим формулам, т.е. ошибок численного интегрирования не содержат.

Из рис. 5 видно, что величины $\Delta\hat{\Phi}^{\text{det}}(\tau), \Delta\hat{\Psi}^{\text{det}}(\tau)$ зависят от длительности эксперимента τ обратно пропорционально, а $\Delta\hat{\Phi}^{\text{noise}}(\tau), \Delta\hat{\Psi}^{\text{noise}}(\tau)$ — практически везде пропорционально $\frac{\varepsilon}{\tau}$. Лишь при очень близком расположении одной из частот шума $\omega_{\Sigma}^{(\eta)}$ к частоте одной из гармоник входного сигнала ω_{rez} , получаемые оценки составляющих частотных параметров $\hat{\Phi}_{\text{rez}}, \hat{\Psi}_{\text{rez}}$ становятся неудовлетворительными.

Исследование зависимости от длительности наблюдения. Рассмотрим влияние ошибки, порождаемой конечностью времени интегрирования: $\tau \neq \infty$. Рассматривать будем случай без шума, так как при наличии шума, в нерезонансном случае, закономерности будут аналогичные, поскольку погрешности оценок частотных параметров, порождающие их, убывают при увеличении τ с равной скоростью.

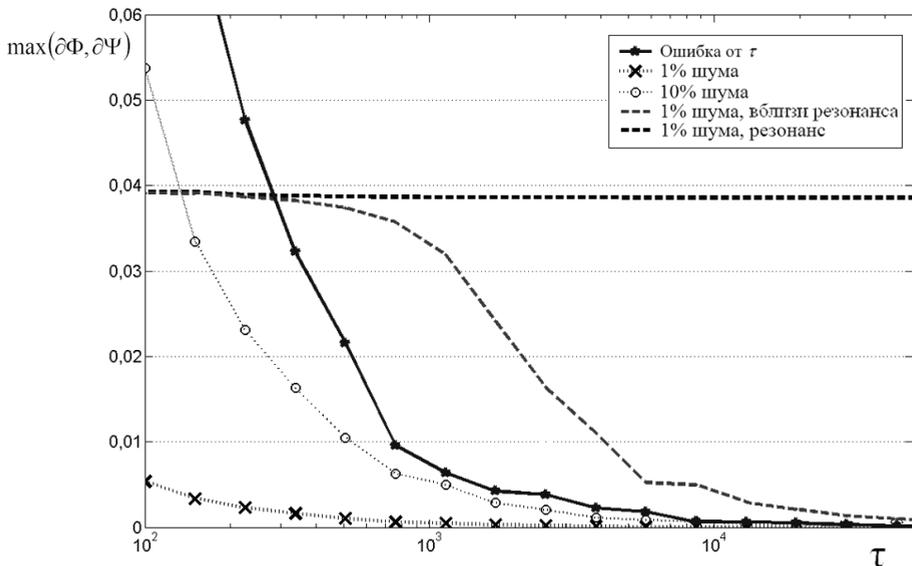


Рис. 5. Относительная ошибка определения частотных характеристик в зависимости от длительности эксперимента

Если варьировать τ в некотором малом интервале около фиксированного τ^* , это дает возможность получать рандомизированный набор данных для решения системы (7). Разбросы оценок параметров аппроксимирующей модели с $N^* = 3$ при $N = 10$ приведены на рис. 6.

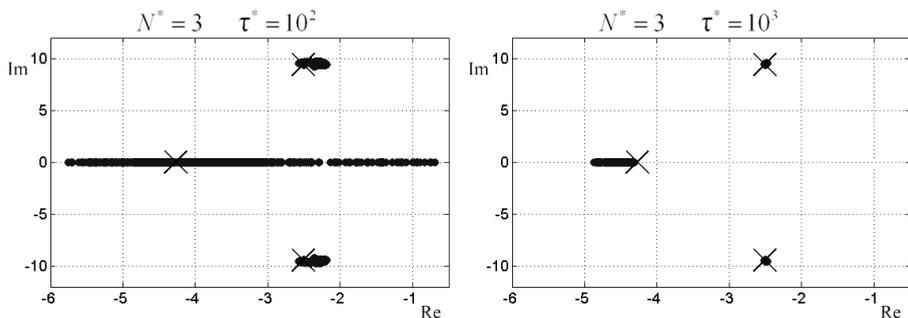


Рис. 6. Вариации оценок собственных чисел аппроксимирующей модели в зависимости от длительности наблюдения

Разбросы оценок собственных значений для модели третьего порядка при длительности эксперимента порядка $\tau^* = 10^2$ показаны слева, а при $\tau^* = 10^3$ — справа. Крестиками обозначены собственные значения аппроксимирующей модели при точных исходных данных.

Увеличение порядка модели приводит к необходимости на порядки увеличивать длительность эксперимента. Для построения сложных моделей, допустимых вычислительными ошибками, требуются длительности практически нереализуемые в экспериментах.

Таким образом, размерность аппроксимирующей модели следует согласовывать с величиной ошибки вычисления частотных характеристик, которые, в свою очередь, зависят от τ и ε . При фиксированной длительности τ от выбранной размерности модели N^* зависит, будет ли задача корректной, а решение — устойчивым. Это фундаментальное свойство процедуры идентификации представлено в табл. 1 и 2. В табл. 1 генерирующая система имела порядок 10 (три пары комплексно-сопряженных и четыре действительных собственных числа), а в табл. 2 — тот же порядок, но все собственные значения были действительными. Для различных значений размерности модели N^* и длительностей τ , устойчивость получаемых решений устанавливалась с использованием рандомизации. Темным выделены соотношения τ/N^* , при которых решение, на основе получаемых разбросов, квалифицировалось как неустойчивое. Светлая область соответствует устойчивому решению (слабо чувствительному к погрешности). В таблицах также приведены получаемые значения обусловленности $\mu(H)$ для этих моделей.

При увеличении длительности τ разброс оценок параметров при фиксированной размерности модели сужается. Чтобы получить модель более высоких порядков, требуется согласованное увеличение τ .

Из таблиц видно, что граница устойчивости существенно зависит от того, какие были собственные значения у генерирующей системы. Для первой системы при равном значении длительности наблюдения можно построить модель более высокого порядка, чем для второй. Из табл. 2 видно, что для второй системы построить модель 9-го и 10-го порядков вообще не удается, вследствие установленного выше ограничения на обусловленность

$\mu(H_0)=10^{17}$, после которого на результат существенно влияют вычислительные ошибки.

Таблица 1

Числа обусловленности матриц систем частотных уравнений и корректность постановки задачи идентификации в зависимости от соотношения размерности модели и длительности наблюдения для генерирующей системы с тремя комплексно-сопряженными парами и четырьмя действительными собственными значениями

Длительность наблюдения	Размерность модели									
	2	3	4	5	6	7	8	9	10	
10^2	$3,5*10^0$	$5,0*10^1$	$3,6*10^3$	$1,2*10^5$	$1,4*10^6$	$4,2*10^7$	$2,1*10^8$	$7,5*10^9$	$6,6*10^{10}$	
10^3	$3,2*10^0$	$4,9*10^1$	$9,7*10^2$	$4,4*10^4$	$7,6*10^5$	$2,0*10^8$	$2,9*10^9$	$3,4*10^{10}$	$1,2*10^{12}$	
10^4	$3,2*10^0$	$4,9*10^1$	$9,0*10^2$	$3,1*10^4$	$6,3*10^5$	$2,0*10^8$	$2,0*10^{10}$	$4,6*10^{11}$	$6,3*10^{12}$	
10^5	$3,2*10^0$	$4,9*10^1$	$8,9*10^2$	$3,0*10^4$	$6,2*10^5$	$1,2*10^8$	$2,1*10^{10}$	$2,3*10^{11}$	$6,1*10^{13}$	
10^6	$3,2*10^0$	$4,9*10^1$	$8,9*10^2$	$2,9*10^4$	$6,2*10^5$	$1,1*10^8$	$8,6*10^9$	$1,4*10^{11}$	$1,1*10^{15}$	
10^7	$3,2*10^0$	$4,9*10^1$	$8,9*10^2$	$2,9*10^4$	$6,2*10^5$	$1,1*10^8$	$7,9*10^9$	$1,4*10^{11}$	$6,3*10^{14}$	
10^8	$3,2*10^0$	$4,9*10^1$	$8,9*10^2$	$2,9*10^4$	$6,2*10^5$	$1,1*10^8$	$7,9*10^9$	$1,4*10^{11}$	$6,3*10^{14}$	

Заметим, что значение обусловленности $\mu(H_0)$ при конечном τ неизвестно, но его можно оценивать по величине $\mu(H)$, которая сходится к $\mu(H_0)$ при увеличении τ .

Таблица 2

Числа обусловленности матриц систем частотных уравнений и корректность постановки задачи идентификации в зависимости от соотношения размерности модели и длительности наблюдения для генерирующей системы с десятью действительными собственными значениями

Длительность наблюдения	Размерность модели									
	2	3	4	5	6	7	8	9	10	
10^2	$3,6*10^1$	$1,3*10^3$	$1,7*10^4$	$1,3*10^5$	$2,1*10^6$	$2,1*10^7$	$1,1*10^9$	$4,3*10^{10}$	$1,1*10^{12}$	
10^3	$2,4*10^1$	$2,2*10^3$	$3,8*10^4$	$1,0*10^6$	$1,0*10^7$	$8,9*10^7$	$6,5*10^9$	$2,0*10^{11}$	$2,6*10^{12}$	
10^4	$2,3*10^1$	$8,3*10^2$	$5,8*10^5$	$4,0*10^6$	$9,6*10^7$	$7,1*10^8$	$4,0*10^{10}$	$5,2*10^{11}$	$9,7*10^{13}$	
10^5	$2,3*10^1$	$7,8*10^2$	$1,9*10^5$	$3,7*10^7$	$4,4*10^8$	$5,9*10^9$	$9,1*10^{10}$	$6,3*10^{12}$	$3,5*10^{14}$	
10^6	$2,3*10^1$	$7,8*10^2$	$1,7*10^5$	$4,2*10^7$	$4,4*10^9$	$3,9*10^{10}$	$1,2*10^{12}$	$8,2*10^{12}$	$8,1*10^{14}$	
10^7	$2,3*10^1$	$7,8*10^2$	$1,7*10^5$	$3,5*10^7$	$1,4*10^{10}$	$2,1*10^{11}$	$6,3*10^{12}$	$6,3*10^{13}$	$1,0*10^{16}$	
10^8	$2,3*10^1$	$7,8*10^2$	$1,7*10^5$	$3,5*10^7$	$6,3*10^9$	$3,0*10^{12}$	$3,4*10^{13}$	$1,4*10^{15}$	$1,7*10^{16}$	
10^9	$2,3*10^1$	$7,8*10^2$	$1,7*10^5$	$3,5*10^7$	$5,8*10^9$	$2,1*10^{12}$	$2,1*10^{14}$	$2,7*10^{15}$	$2,5*10^{17}$	
10^{10}	$2,3*10^1$	$7,8*10^2$	$1,7*10^5$	$3,5*10^7$	$5,8*10^9$	$1,4*10^{12}$	$1,8*10^{15}$	$2,3*10^{16}$	$9,1*10^{17}$	
бесконечность	$2,3*10^1$	$7,8*10^2$	$1,7*10^5$	$3,5*10^7$	$5,8*10^9$	$1,4*10^{12}$	$1,2*10^{15}$	$3,6*10^{17}$	$4,6*10^{18}$	

Таким образом, для корректного определения аппроксимирующей модели нельзя выходить за пределы устойчивой области. Причем ее границу лучше всего устанавливать по числу обусловленности, что следует из табл. 1 и 2. Методом численного моделирования были проведены вычислительные эксперименты по установлению областей устойчивости для генерирующих систем с разными структурными свойствами, которые варьировались в широком диапазоне. Результаты этих исследований представлены на рис. 7.

На плоскости параметров τ , $\mu(H)$ показаны области, где задачи идентификации для систем при всех возможных параметрах являются корректно поставленными, а где — нет. Область А соответствует моделям, слабо чувствительным к погрешностям в исходных данных. Область В — переходная: модель с сингулярным числом из этой области может оказаться по условиям корректности как пригодной, так и непригодной в зависимости от того, какие параметры имела генерирующая система. Область С — область некорректной постановки задачи идентификации; модели, соответствующие этой области, непригодны. D обозначает область, в которой некорректность вызывается наличием вычислительной ошибки, определена порогом в $\mu(H) = 10^{17}$.

Критерий пригодности модели по разбросу оценок ее параметров субъективен; в данном эксперименте пригодной считалась модель, у которой оценки всех собственных значений не отклонялись более чем на 5 % от своего среднего значения (при локальном варьировании τ). При применении других критериев пригодности, а также в случае наличия шума и численном интегрировании при нахождении оценок частотных параметров, границы областей показанных на рис. 7, могут варьироваться. Тем не менее, общая картина сохраняется.

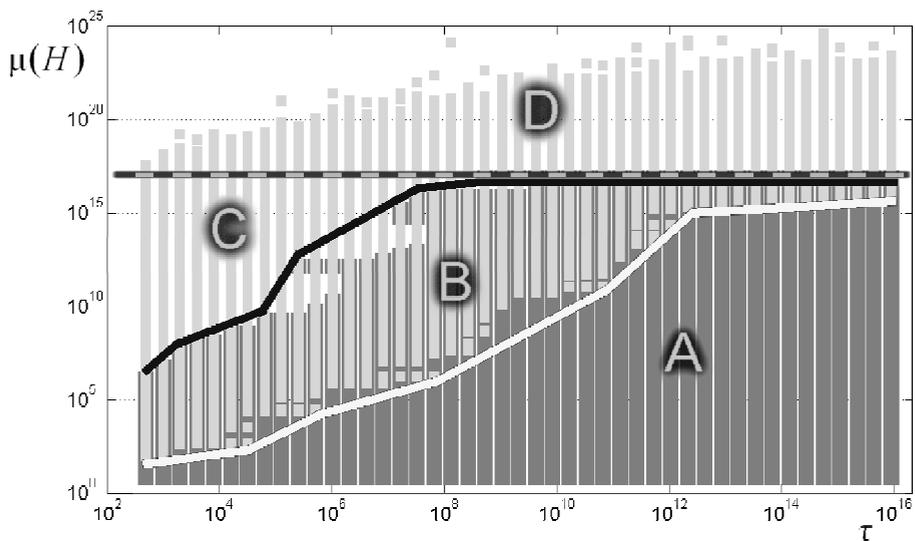


Рис. 7. Области устойчивости решения задачи идентификации

При построении аппроксимирующей модели, выбор ее размерности должен всегда связываться с имеющейся неопределенностью. При этом

оценки собственных значений модели могут существенно отличаться от собственных значений исходной системы. При увеличении размерности аппроксимирующей модели от N^* к $N^* + 1$ в пределах области устойчивости невязка по выходу $\|y - \hat{y}\|$ будет уменьшаться. На рис. 8 показаны зависимости ошибок по выходу $\|y - \hat{y}\|$ от τ для аппроксимирующих моделей разных порядков при двух разных генерирующих системах 10-го порядка.

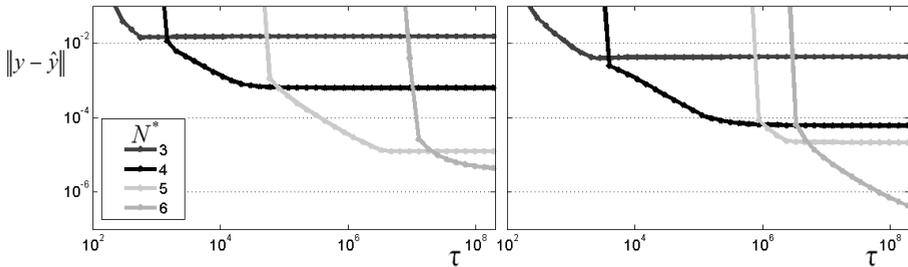


Рис. 8. Невязки аппроксимирующих моделей по выходу для двух генерирующих систем 10-го порядка

С увеличением длительности наблюдения τ , уровень погрешности оценивания частотных характеристик уменьшается и задачи идентификации моделей более высоких порядков становятся корректными. Видно также, что при увеличении τ после некоторого порогового значения, качество модели не улучшается, а ее параметры практически не чувствительны к изменениям реализаций шума и погрешностей. Так, для системы (рис. 8, левая часть), при $\tau = 10^6$ аппроксимирующие модели 6-го порядка и выше являются непригодными, тогда как модели до $N^* = 5$ пригодны. Увеличение длительности до $\tau = 10^8$ делает корректной задачу для модели $N^* = 6$, хотя прирост точности небольшой.

Таким образом, можно констатировать, что задачи идентификации многомерных систем могут быть как корректно, так и некорректно поставленными, в зависимости от того, какие используются для этого исходные данные. Если идентификация проводится частотным методом, то основными характеристиками данных являются длительность эксперимента τ и погрешность ε . Параметром регуляризации в этих задачах является размерность модели N^* , либо, правильнее, число обусловленности $\mu(H)$. Для его определения можно использовать рис. 7. Если в области В нет сингулярных чисел, то любая модель соответствующая области А является аппроксимирующей. Наиболее близкой к точной будет та, у которой $\mu(H)$ наибольшее. Когда в В находятся сингулярные числа (обычно это одно или два значения), корректная модель с наилучшей аппроксимацией может быть среди них. Установить это можно, используя процедуру рандомизации по τ для построения множества собственных значений модели соответствующей размерности. По разбросу точек на этих множествах судим о пригодности модели.

Выводы

Исследование задач идентификации многомерных систем на основе частотного метода показало, что корректность задачи построения аппроксимирующей модели зависит от многих факторов, главным из которых является соотношение величин имеющейся неопределенности и сложности восстанавливаемой модели. Для данного метода они определялись соответственно величинами τ , ε и $\mu(H)$.

Только модели, полученные при решении корректно поставленной задачи, могут иметь практическую пригодность, в ином случае оценки параметров моделей становятся сильно чувствительными к различным погрешностям. Примененный метод рандомизации предполагает построение множества моделей по имеющимся экспериментальным данным. Определение устойчивости получаемых решений производится по разбросу параметров, соответствующих жордановской реализации.

Для моделей различных структур снижение порядка аппроксимирующей модели снижает чувствительность ее параметров к неопределенности в данных. В этом смысле размерность искомой модели N^* можно рассматривать как параметр регуляризации задачи идентификации. При изменении N^* , меняется $\mu(H)$, с которой непосредственно связывается вариация оценок. Было получено разбиение плоскости $\tau - \mu(H)$ на области, где задачи построения аппроксимирующих моделей будут корректными, а где — нет, что позволяет упростить проведение регуляризации задачи.

1. Кардашев А.А. Определение параметров системы по экспериментальным (заданным) частотным характеристикам / А.А. Кардашев, Л.В. Карнюшин // Автоматика и телемеханика. — 1958. — Т. 19, № 4. — С. 334–345.
2. Levy E.C. Complex curve fitting. / E.C. Levy // IRE Transactions on Automatic Control. — 1959 — Vol. 4 — P. 37–49.
3. Pintelon R. Parametric identification of transfer functions in the frequency domain — A survey. / R. Pintelon, P. Guillaume, Y. Rolain, J. Shoukens, H. Van hamme // IEEE Transactions on Automatic Control. — 1994 — Vol. AC-39, No. 11 — P. 2245–2260.
4. Александров А.Г. Метод частотных параметров / А.Г. Александров // Автоматика и телемеханика. — 1989. — Т. 50, № 12. — С. 3–15.
5. Александров А.Г. Конечно-частотная идентификация многомерных объектов / А.Г. Александров, Ю.Ф. Орлов // Тр. 2-й Российско-шведской конференции по автоматическому управлению. RSCC'95. — СПб., 1995. — С. 65–69.
6. Губарев В.Ф. Идентификация многомерных систем по параметрам установившегося режима / В.Ф. Губарев, С.В. Мельничук // Проблемы управления и информатики. — 2012. — № 5. — С. 26–42.

Получено 04.04.2014