ДОПОВІДІ
НАЦІОНАЛЬНОЇ
АКАДЕМІЇ НАУК
УКРАЇНИ

4 • 2009

ІНФОРМАТИКА ТА КІБЕРНЕТИКА

УДК 519.6

© 2009

О. М. Литвин, І. В. Нефьодова

Деякі аспекти чисельної реалізації методу скінченних елементів з оптимальним вибором параметрів, базисних функцій та координат вузлів елементів

(Представлено академіком НАН України І. В. Сергієнком)

Наводяться основні твердження методу скінченних елементів з оптимальним вибором параметрів, базисних функцій та координат вузлів елементів.

1. Постановка задачі. У даній роботі досліджуються схеми методу скінченних елементів (МСЕ) розв'язування задачі Діріхле для двовимірного рівняння еліптичного типу другого порядку, в яких з умови мінімуму функціонала знаходяться вузлові параметри, базисні функції та координати вузлів сітки, на яку розбивається область інтегрування. В обчислювальній математиці відомі методи наближення функцій за допомогою деякого набору їх значень у фіксованих точках (вузлах), точність яких покращується при оптимальному виборі вузлів (поліноми Чебишова П. Л., квадратурні формули Гаусса тощо, які приводять до оптимальних алгоритмів). Тому дослідження схем МСЕ з оптимальним вибором вузлів сітки є актуальною задачею.

2. Аналіз останніх досліджень і публікацій. Проблемі оптимального або близького до оптимального вибору вузлів в МСЕ були присвячені роботи [1, 2], в яких дано апостеріорний аналіз похибки і викладено адаптивний процес проведення обчислень в МСЕ. Запропонований в цих роботах вибір оптимальної або близької до оптимальної сітки вузлів істотно оснований на припущенні, що базисні функції в МСЕ є відомими сплайнами. У [3] досліджуються питання найкращого вибору вузлів при інтерполюванні функцій ермітовими сплайнами, зокрема отримані явні вирази для асимптотично оптимального розміщення вузлів ермітових сплайнів. Ці результати можуть бути з відповідними змінами перенесені на випадок МСЕ, основаного на використанні поліноміальних сплайнів. У роботі [4] досліджуються деякі питання діагностики особливостей точного розв'язання задачі Коші методом згущення сітки.

У роботах О. М. Литвина та його учнів [5] досліджувалися схеми МСЕ, в яких оптимально вибиралися як вузлові параметри, так і базисні функції при фіксованому наборі вузлів розбиття. Тому актуальною є задача дослідження схем МСЕ з оптимальним вибором вузлових параметрів, базисних функцій та координат вузлів.

3. Формулювання цілей роботи (постановка завдання). Метою даної роботи є формулювання задачі оптимального вибору вузлових параметрів, базисних функцій та координат вузлів у методі скінченних елементів задачі Діріхле для рівняння еліптичного типу другого порядку (прямокутні елементи) та обґрунтування запропонованого методу її розв'язання; розробка алгоритму чисельної реалізації запропонованої оптимізаційної задачі.

4. Допоміжні твердження. Припустимо, що область Ω розбита лініями $x = x_k$ ($k = \overline{1,m}$), $y = y_l$ ($l = \overline{1,n}$) на елементи $\Pi_{k,l} = [x_k, x_{k+1}] \times [y_l, y_{l+1}]$ ($k = \overline{1, m-1}$, $l = \overline{1, n-1}$) і в кожному з цих елементів наближений розв'язок $\widetilde{u}(x,y)$ крайової задачі

$$Lu(x,y) = f(x,y), \qquad (x,y) \in \Omega, \tag{1}$$

$$u(x,y) = 0, \qquad (x,y) \in \partial\Omega, \tag{2}$$

де

$$Lu(x,y) = -\frac{\partial}{\partial x}\left(p1(x,y)\frac{\partial u(x,y)}{\partial x}\right) - \frac{\partial}{\partial x}\left(p2(x,y)\frac{\partial u(x,y)}{\partial y}\right) + q(x,y)u(x,y),$$

$$p1, p2 \in C^1(\Omega), \qquad q \in C(\Omega), \qquad f \in L^2(\Omega),$$

зображується у вигляді: $\widetilde{u}(x,y) = u_{k,l}(x,y)$, $(x,y) \in \Pi_{k,l} \subset \Omega$

$$u_{k,l}(x,y) = \sum_{\mu=0}^{1}\sum_{\nu=0}^{1} C_{k+\mu,l+\nu} h1^{\mu}_{k+\mu,l+\nu}(s) h2^{\nu}_{k+\mu,l+\nu}(t) = w_{k,l}(s,t), \tag{3}$$

де

$$s = \frac{x - x_k}{x_{k+1} - x_k}, \qquad t = \frac{y - y_l}{y_{l+1} - y_l}, \qquad h1^{\mu}_{k,l}(s), \qquad h2^{\nu}_{k,l}(t) \in C^2[0,1]$$

і мають властивості

$$\begin{aligned} &h1^0_{k,l}(0) = h2^0_{k,l}(0) = 1, \qquad h1^0_{k,l}(1) = h2^0_{k,l}(1) = 0, \\ &h1^1_{k,l}(0) = h2^1_{k,l}(0) = 0, \qquad h1^1_{k,l}(1) = h2^1_{k,l}(1) = 1, \qquad \forall\,(x_k, y_l) \in \overline{\Omega}. \end{aligned} \tag{4}$$

Лема 1. *Якщо функції $h1^{\mu}_{k,l}(s)$, $h2^{\nu}_{k,l}(t) \in C^2[0,1]$ задовольняють властивості* (4)*, то формула* (3) *задовольняє такі властивості:*

1) $u_{k,l}(x_{k+\mu}, y_{l+\nu}) = C_{k+\mu,l+\nu}$, $0 \leqslant \mu$, $\nu \leqslant 1$, $\Pi_{k,l} \subset \Omega$;

2) $\widetilde{u}(x,y) \in C(\Omega)\bigcap W^1_2(\Omega)$;

3) якщо $C_{k,l} = 0$ $\forall (x_k, y_l) \in \partial\Omega$, то $\widetilde{u}(x,y) \in \overset{\circ}{W}{}^1_2(\Omega) = \{u \in W^1_2(\Omega) \mid u(x,y) = 0, (x,y) \in \partial\Omega\}$.

Зауваження. Можна також припустити, що $h1^{\mu}_{k,l}(s)$, $h2^{\nu}_{k,l}(t) \in C^1[0,1]$.

Введемо позначення

$$\begin{gathered} \widetilde{J}_{k,l} = \iint\limits_{\Pi_{k,l}} \left(p1\left(\frac{\partial u_{k,l}}{\partial x}\right)^2 + p2\left(\frac{\partial u_{k,l}}{\partial y}\right)^2 + q u^2_{k,l} - 2 f u_{k,l}\right) dxdy, \\ p1 = p1(x,y), \quad p2 = p2(x,y), \quad q = q(x,y), \quad f = f(x,y), \quad u_{k,l} = u_{k,l}(x,y). \end{gathered} \tag{5}$$

Лема 2. *Для функціоналів $\widetilde{J}_{k,l}$ виконується рівність $\widetilde{J}_{k,l} = J_{k,l}$, де*

$$J_{k,l} = \int\limits_0^1 \int\limits_0^1 \biggl(p1_{k,l}(s,t) \biggl(\frac{\partial w_{k,l}(s,t)}{\partial s} \biggr)^2 \Delta 1_k^{-2} + p2_{k,l}(s,t) \biggl(\frac{\partial w_{k,l}(s,t)}{\partial t} \biggr)^2 \Delta 2_k^{-2} + $$

$$+ q_{k,l}(s,t) w_{k,l}^2(s,t) - 2 f_{k,l}(s,t) w_{k,l}(s,t) \biggr) \Delta 1_k \Delta 2_l ds dt, \qquad (6)$$

$$\Delta 1_k = x_{k+1} - x_k, \qquad \Delta 2_l = y_{l+1} - y_l,$$

$$p1_{k,l}(s,t) = p1(s\Delta 1_k + x_k, t\Delta 2_l + y_l), \qquad p2_{k,l}(s,t) = p2(s\Delta 1_k + x_k, t\Delta 2_l + y_l),$$

$$q_{k,l}(s,t) = q(s\Delta 1_k + x_k, t\Delta 2_l + y_l), \qquad f_{k,l}(s,t) = f(s\Delta 1_k + x_k, t\Delta 2_l + y_l).$$

Основні твердження роботи.

Теорема 1. *Функція $h1^i_{k+i,l}(s)$ входить у функціонали $J_{k,l}$, $J_{k,l-1}$. Тому з урахуванням того, що $J_\Omega(u) = \sum\limits_{\prod_{k,l} \subset \Omega} J_{k,l}$, рівняння Ейлера для функціонала J_Ω, відносно функції $h1^i_{k+i,l}(s)$, $i = 0, 1$, матиме вигляд*

$$\sum_{\mu=0}^{1} \sum_{\nu=0}^{1} \frac{\partial}{\partial s} \biggl((A1^{i,0}_{k,l,\mu,\nu}(s) + A1^{i,1}_{k,l-1,\mu,\nu}(s)) \frac{dh1^{\mu}_{k+\mu,l+\nu}(s)}{ds} \biggr) -$$

$$- \sum_{\mu=0}^{1} \sum_{\nu=0}^{1} (B1^{i,0}_{k,l,\mu,\nu}(s) + B1^{i,1}_{k,l-1,\mu,\nu}(s)) h1^{\mu}_{k+\mu,l+\nu}(s) - F1^{i,0}_{k,l}(s) - F1^{i,1}_{k,l-1}(s) = 0, \qquad (7)$$

де

$$A1^{i,0}_{k,l,\mu,\nu}(s) = C_{k+\mu,l+\nu} C_{k+i,l} \frac{\Delta 2_l}{\Delta 1_k} \int\limits_0^1 (p1_{k,l}(s,t) h2^{\nu}_{k+\mu,l+\nu}(t) h2^0_{k+i,l}(t)) dt,$$

$$A1^{i,1}_{k,l-1,\mu,\nu}(s) = C_{k+\mu,l+\nu} C_{k+i,l} \frac{\Delta 2_{l-1}}{\Delta 1_k} \int\limits_0^1 (p1_{k,l-1}(s,t) h2^{\nu}_{k+\mu,l+\nu}(t) h2^1_{k+i,l}(t)) dt,$$

$$B1^{i,0}_{k,l,\mu,\nu}(s) = \biggl(\frac{\Delta 1_k}{\Delta 2_l} \int\limits_0^1 \biggl(p2_{k,l}(s,t) \frac{dh2^{\nu}_{k+\mu,l+\nu}(t)}{dt} \frac{dh2^0_{k+i,l}(t)}{dt} \biggr) dt -$$

$$- \Delta 1_k \Delta 2_l \int\limits_0^1 (q_{k,l}(s,t) h2^{\nu}_{k+\mu,l+\nu}(t) h2^0_{k+i,l}(t)) dt \biggr) C_{k+\mu,l+\nu} C_{k+i,l},$$

$$B1^{i,1}_{k,l-1,\mu,\nu}(s) = \biggl(\frac{\Delta 1_k}{\Delta 2_{l-1}} \int\limits_0^1 \biggl(p2_{k,l-1}(s,t) \frac{dh2^{\nu}_{k+\mu,l+\nu}(t)}{dt} \cdot \frac{dh2^1_{k+i,l}(t)}{dt} \biggr) dt -$$

$$- \Delta 1_k \Delta 2_{l-1} \int\limits_0^1 (q_{k,l-1}(s,t) h2^{\nu}_{k+\mu,l+\nu}(t) h2^1_{k+i,l}(t)) dt \biggr) C_{k+\mu,l+\nu} C_{k+i,l},$$

$$F1^{i,0}_{k,l}(s) = C_{k+i,l}\Delta 1_k \Delta 2_l \int\limits_0^1 f_{k,l}(s,t) h2^0_{k+i,l}(t)dt,$$

$$F1^{i,1}_{k,l}(s) = C_{k+i,l}\Delta 1_k \Delta 2_{l-1} \int\limits_0^1 f_{k,l-1}(s,t) h2^1_{k+i,l}(t)dt.$$

Аналогічну систему рівнянь можна отримати при мінімізації функціонала J_Ω за функціями $h2^j_{k,l+j}(s)$, $j = 0,1$,

$$\sum_{\mu=0}^{1}\sum_{\nu=0}^{1} \frac{\partial}{\partial t}\biggl((A2^{0,j}_{k,l,\mu,\nu}(t) + A2^{1,j}_{k-1,l,\mu,\nu}(t))\frac{dh2^\nu_{k+\mu,l+\nu}(t)}{dt}\biggr) -$$

$$- \sum_{\mu=0}^{1}\sum_{\nu=0}^{1}(B2^{0,j}_{k,l,\mu,\nu}(t) + B2^{1,j}_{k-1,l,\mu,\nu}(t))h2^\nu_{k+\mu,l+\nu}(t) - F2^{0,j}_{k,l}(t) - F2^{1,j}_{k-1,l}(t) = 0. \qquad (8)$$

Вирази для відповідних коефіцієнтів опускаємо.

Системи (7), (8) являють собою систему інтегро-диференціальних рівнянь з такою властивістю: система (7) є системою диференціальних рівнянь, коефіцієнти якої A1, B1 залежать від функцій $h2^\nu_{k+\mu,l+\nu}(t)$ і навпаки, система (8) є системою диференціальних рівнянь, коефіцієнти якої A2, B2 залежать від функцій $h1^\mu_{k+\mu,l+\nu}(s)$. Ця властивість лежить в основі запропонованого методу наближеного знаходження розв'язку поставленої оптимізаційної задачі.

Теорема 2. *Якщо наближений розв'язок задачі* (1), (2) *шукати у вигляді* $\widetilde{u}(x,y)$, *то для знаходження* $C_{k,l}$ *отримаємо систему Рітца*

$$\sum_{(x_k,y_l)\in\Omega} \gamma_{m,n,k,l}C_{k,l} = \beta_{m,n}, \qquad (x_m,y_n)\in\Omega, \qquad (9)$$

де $\gamma_{m,n,k,l} = [h1_{k,l}(x)h2_{k,l}(y), h1_{m,n}(x)h2_{m,n}(y)]$,

$$[\varphi(x,y),\psi(x,y)] := \iint\limits_\Omega \biggl(p1(x,y)\frac{\partial\varphi(x,y)}{\partial x}\frac{\partial\psi(x,y)}{\partial x} + p2(x,y)\frac{\partial\varphi(x,y)}{\partial y}\frac{\partial\psi(x,y)}{\partial y} +$$

$$+ g(x,y)\varphi(x,y)\psi(x,y)\biggr)dxdy,$$

$$\beta_{m,n} = \iint\limits_\Omega f(x,y)h1_{m,n}(x)h2_{m,n}(y)\,dxdy.$$

Для знаходження невідомих функцій $h1_{k,l}(x)$, $h2_{k,l}(y)$ необхідно розв'язати систему інтегро-диференціальних рівнянь

$$\delta_{h1^\mu_{k,l}}J_\Omega(\widetilde{u}) = 0, \qquad \delta_{h2^\nu_{k,l}}J_\Omega(\widetilde{u}) = 0, \qquad \forall\,(k,l)\colon \quad (x_k,y_l)\in\Omega, \quad 0\leqslant\mu, \quad \nu\leqslant 1. \qquad (10)$$

Для оптимального вибору вузлів (x_k,y_l) потрібно розв'язати задачу

$$J_\Omega(\widetilde{u}) \to \min_{(x_k,y_l)\in\Omega}, \qquad (11)$$

де мінімізація функціонала проводиться при умові, що $h1^\mu_{k,l}$, $h2^\nu_{k,l}$ знайдені.

Алгоритм чисельного розв'язання оптимізаційної задачі (9)–(11). Мінімізація функціонала $J_\Omega(\widetilde{u})$ за сталими $C_{k,l}$, функціями $h1^{\mu}_{k,l}(s)$, $h2^{\nu}_{k,l}(t)$ та вузлами (x_k, y_l) повинна проводитись одночасно, але з практичної точки зору зручним є ітераційний процес, який опишемо за кроками.

Крок 1. Задаємо початкове розбиття області Ω на прямокутні елементи $\prod\limits_{k,l}$ прямими $x = x_k$ $(k = \overline{1, m1})$ та $y = y_l$ $(l = \overline{1, m2})$. Отримані вузли (x_k, y_l) будемо вважати початковим наближенням системи вузлів і позначати $(x_k^{\langle 0\rangle}, y_l^{\langle 0\rangle})$.

Крок 2. Задаємо початкові базисні функції $h1^{\mu\langle 0\rangle}_{k,l}(s)$, $h2^{\nu\langle 0\rangle}_{k,l}(t)$ у вигляді довільних функцій з властивостями (4).

Крок 3. Знаходимо початкове наближення $C^{\langle 0\rangle}_{k,l}$ для невідомих параметрів $C_{k,l}$ шляхом розв'язання відповідної системи Рітца (9).

Крок 4. Знаходимо оптимальні значення $(x_k^{\langle 1\rangle}, y_l^{\langle 1\rangle})$, які відповідають базисним функціям $h1^{\mu\langle 0\rangle}_{k,l}(s)$, $h2^{\nu\langle 0\rangle}_{k,l}(t)$, з умови $J_\Omega(u_{k,l}) \to \min\limits_{(x_k, y_l)\in\Omega}$, якщо $C_{k,l}$ змінюється на кожній ітерації, тобто на кожній ітерації $C_{k,l}$ знаходиться шляхом розв'язання відповідної системи Рітца.

Кроки 1–4 завершують блок, який умовно можна назвати блоком оптимального вибору вузлів (x_k, y_l) при відомих базисних функціях $h1^{\mu\langle 0\rangle}_{k,l}(s)$, $h2^{\nu\langle 0\rangle}_{k,l}(t)$. Наступний блок умовно можна назвати блоком оптимального вибору базисних функцій $h1^{\mu}_{k,l}(s)$, $h2^{\nu}_{k,l}(t)$ при заданій сітці розбиття з вузлами (x_k, y_l).

Крок 5. Підставляємо у функціонал $J_\Omega(u_{k,l})$ знайдені значення $C^{\langle 1\rangle}_{k,l}$, вузли $(x_k^{\langle 1\rangle}, y_l^{\langle 1\rangle})$ та початкове наближення до функцій $h2^{\nu\langle 0\rangle}_{k,l}(t)$. В результаті $J_\Omega(\widetilde{u})$ буде функціоналом, який залежить лише від невідомих функцій $h1_{k,l}(s)$, $h1'_{k,l}(s)$ та від змінної s, тобто $J_\Omega(\widetilde{u}) = J1(h1_{k,l}(s), h1'_{k,l}(s), s)$.

Знаходимо ці функції з умови мінімуму функціонала $J_\Omega(\widetilde{u})$, розв'язуючи систему рівнянь (7), коефіцієнти якої залежать від функцій $h2^{\nu\langle 0\rangle}_{k,l}(t)$. Знайдені $h1_{k,l}(s)$ позначимо як $h1^{\mu\langle 1\rangle}_{k,l}(s)$ і підставимо їх у систему (8). З цієї системи знаходимо $h2_{k,l}(t)$ та позначаємо $h2^{\nu\langle 1\rangle}_{k,l}(t)$.

Крок 5 дозволяє знову повторити кроки 1–4, тобто вибрати оптимальну сітку при умові, що базисні функції $h1^{\mu}_{k,l}(s)$, $h2^{\nu}_{k,l}(t)$ вибрані оптимально на кроці 5.

Процес цей продовжуємо до тих пір, поки не буде виконуватись одна із умов:

1) $|J^{\langle r\rangle}_\Omega(\widetilde{u}) - J^{\langle r-1\rangle}_\Omega(\widetilde{u})| < \varepsilon$,

2) $|x_k^{\langle r\rangle} - x_k^{\langle r-1\rangle}| < \varepsilon 1$, $|y_l^{\langle r\rangle} - y_l^{\langle r-1\rangle}| < \varepsilon 1$,

де ε та $\varepsilon 1$ — задані дослідником числа.

Таким чином, в роботі запропоновано загальний метод побудови схем МСЕ з оптимальним вибором вузлових параметрів, базисних функцій та вузлів.

1. *Kelly D. W., Gago J. P. de S. R., Zienkiewicz O. C., Babuska I.* A posteriori error analysis and adaptive processes in the finite element method: Part I. Error analysis // Int. J. for numer. methods in Eng. – 1983. – **19**. – P. 1593–1619.
2. *Kelly D. W., Gago J. P. de S. R., Zienkiewicz O. C., Babuska I.* A posteriori error analysis and adaptive processes in the finite element method: Part II. Adaptive mesh refinement // Ibid. – P. 1621–1656.
3. *Лигун А. А., Сторчай В. Ф.* О наилучшем выборе узлов при интерполировании функций эрмитовыми сплайнами // Analysis math., 3. – 1976. – № 2. – С. 267–275.

4. *Альшина Е. А., Калиткин Н. Н., Корякин П. В.* Диагностика особенностей точного решения методом сгущения сеток // Докл. АН. – 2005. – **404**, № 3. – С. 295–299.
5. *Литвин О. М.* Методи обчислень. Додаткові розділи. – Київ: Наук. думка, 2005. – 331 с.

Українська інженерно-педагогічна академія, Харків *Надійшло до редакції 16.09.2008*

O. M. Lytvyn, I. V. Nefodova

Some aspects of numerical realization of the finite element method with optimal choice of the parameters, basic functions, and coordinates of knots of elements

The finite element method scheme with optimal choice of the parameters, basic functions, and knots is proposed.