

УДК 53.01:53.05 + 519.2

И.И. ГОРБАНЬ\*

**О ФЕНОМЕНЕ СТАТИСТИЧЕСКОЙ УСТОЙЧИВОСТИ**

\*Институт проблем математических машин и систем НАН Украины, Киев, Украина

**Анотація.** Представлено нову монографію, присвячену дослідженню фізичного феномену статистичної стійкості та викладенню основ фізико-математичної теорії гіпервипадкових явищ, що описує фізичні події, величини і процеси з урахуванням порушень статистичної стійкості. Книга розрахована на наукових працівників, інженерів і аспірантів, які досліджують статистичні закономірності реальних фізичних явищ, розробляють і використовують статистичні методи високоточних вимірювань, прогнозування і обробки сигналів на великих інтервалах спостереження, а також для студентів старших курсів університетів фізичних, технічних і математичних спеціальностей.

**Ключові слова:** феномен статистичної стійкості, теорія гіпервипадкових явищ, фізичний процес, порушення збіжності.

**Аннотация.** Представлена новая монография, посвященная исследованию физического феномена статистической устойчивости и изложению основ физико-математической теории гиперслучайных явлений, описывающей физические события, величины и процессы с учетом нарушений статистической устойчивости. Книга рассчитана на научных работников, инженеров и аспирантов, исследующих статистические закономерности реальных физических явлений, разрабатывающих и использующих статистические методы высокоточных измерений, прогнозирования и обработки сигналов на больших интервалах наблюдения, а также для студентов старших курсов университетов физических, технических и математических специальностей.

**Ключевые слова:** феномен статистической устойчивости, теория гиперслучайных явлений, физический процесс, нарушение сходимости.

**Abstract.** It is presented a new monograph dedicated to the research of physical phenomenon of statistical stability and exposure of basics of physical-mathematical theory of hyper-random phenomena, the latter describing physical events, variables and processes with consideration of violation of statistical stability. The book is oriented on scientists, engineers, and post-graduate students researching in statistical laws of natural physical phenomena as well as developing and using statistical methods for high-precision measuring, prediction and signal processing on long observation intervals. It may also be useful for high-level courses for university students majoring in physical, engineering, and mathematical fields.

**Keywords:** phenomenon of statistical stability, theory of hyper-random phenomena, physical process, violation of convergence.

**1. Введение**

В 2014 г. вышла новая монография [1], посвященная исследованию физического феномена статистической устойчивости и изложению основ физико-математической теории гиперслучайных явлений, описывающей физические события, величины и процессы с учетом нарушений статистической устойчивости. В отличие от предыдущих двух монографий [2, 3], в которых основное внимание уделено математическим аспектам теории гиперслучайных явлений, в новой книге акцент сделан на физической стороне вопроса.

Целью настоящей статьи является краткий обзор материалов новой книги.

## 2. Круг вопросов, рассматриваемых в монографии

**Феномен статистической устойчивости.** Одним из удивительных физических явлений является феномен статистической устойчивости, проявляющийся в стабильности статистик – функций выборки (частоты массовых событий, средних величин и пр.) Этот феномен наблюдается повсеместно и потому его можно отнести к числу фундаментальных явлений природы.

На феномен статистической устойчивости впервые обратил внимание торговец сукном Дж. Граунт в 1669 г. Его исследования привели к построению теории вероятностей, широко используемой в настоящее время в различных областях науки и техники.

**Аксиоматизация теории вероятностей.** До начала XX в. теория вероятностей рассматривалась как физическая теория, описывающая феномен статистической устойчивости.

В начале прошлого века был поднят вопрос об аксиоматизации теории вероятностей. В 1900 г. Давид Гильберт сформулировал эту проблему как составную часть задачи аксиоматизации законов физики.

Многие известные ученые приложили немало усилий для решения этой задачи. Предлагались разные подходы. В настоящее время общепризнанным считается теоретико-множественный подход А.Н. Колмогорова, возведенный в ранг международного стандарта ISO.

**Понятие случайного явления.** В соответствии с подходом А.Н. Колмогорова случайное событие описывается с помощью вероятностного пространства, задаваемого триадой  $(\Omega, \mathfrak{F}, P)$ , где  $\Omega$  – пространство элементарных событий  $\omega \in \Omega$ ,  $\mathfrak{F}$  – борелевское поле ( $\sigma$ -алгебра подмножеств событий) и  $P$  – вероятностная мера (вероятность) подмножеств событий.

Под случайной величиной понимается измеримая функция, определенная на пространстве  $\Omega$  элементарных случайных событий  $\omega$ , а под случайной функцией – функция независимого аргумента, значение которой при фиксированном его значении представляет собой случайную величину.

Под случайным явлением понимается математический объект (случайное событие, величина или функция), который исчерпывающе характеризуется определенным, вполне конкретным законом распределения вероятностей.

В дальнейшем явление или математическая модель, не описываемая конкретным законом распределения, случайным не считается. Это чрезвычайно важное положение, на которое следует обратить особое внимание.

**Понятие вероятности.** В теории вероятностей ключевым является понятие вероятности события. В приведенном определении (по А.Н. Колмогорову) оно не имеет физической трактовки.

При более наглядном статистическом определении вероятности (по Р. фон Мизесу) вероятность  $P(A)$  случайного события  $A$  представляется как предел частоты  $p_N(A)$  его наблюдения при проведении опытов в одинаковых статистических условиях и устремлении количества опытов  $N$  к бесконечности:  $P(A) = \lim_{N \rightarrow \infty} p_N(A)$ .

При небольших значениях  $N$  частота  $p_N(A)$  может сильно флуктуировать, однако по мере увеличения  $N$  постепенно стабилизируется и при  $N \rightarrow \infty$  стремится к определенному пределу  $P(A)$ .

**Физические гипотезы теории вероятностей.** Все математические теории, в том числе и основанная на системе аксиом А.Н. Колмогорова теория вероятностей, касаются абстрактных математических понятий. Они не связаны с реальным физическим миром. Корректное их

применение на практике возможно при принятии физических гипотез, утверждающих адекватность описания объектов реального мира соответствующими математическими моделями.

Корректность использования теории вероятностей обеспечивается принятием двух физических гипотез:

- гипотезы идеальной статистической устойчивости (статистической прогнозируемости) параметров и характеристик физических явлений – реальных событий, величин, процессов и полей, означающей наличие сходимости статистик к некоторым постоянным величинам;

- гипотезы адекватного описания реальных физических явлений случайными (стохастическими) моделями.

Полагают, что гипотеза статистической устойчивости справедлива для широкого круга массовых физических явлений. Иными словами, принимается концепция устройства мира на случайных принципах.

**Гипотеза идеальной статистической устойчивости.** Одним из основных требований к физическим гипотезам является их согласованность с опытными данными.

Многие годы гипотеза идеальной статистической устойчивости не вызывала сомнений, хотя некоторые ученые (даже А.Н. Колмогоров и такие известные ученые, как А.А. Марков, А.В. Скороход, Э. Борель, В.Н. Тутубалин и др.) обращали внимание, что в реальном мире эта гипотеза справедлива лишь с определенными оговорками.

**Нарушение статистической устойчивости в реальном мире.** Экспериментальные исследования на больших интервалах наблюдения разнообразных процессов разной физической природы показывают, что гипотеза идеальной статистической устойчивости не подтверждается.

Реальный мир постоянно меняется. Изменения происходят на всех уровнях, в том числе и статистическом. Статистические оценки, сформированные на относительно небольших интервалах наблюдения, обладают относительной стабильностью. Проявляется она в том, что при увеличении объема статистических данных уровень флуктуаций значений оценок уменьшается. Это создает иллюзию идеальной статистической устойчивости. Однако, начиная с некоторого критического объема, при увеличении количества данных уровень флуктуаций практически не меняется, а иногда даже растет. Это обстоятельство указывает на неидеальный характер статистической устойчивости.

Нарушение статистической устойчивости в реальном мире означает, что понятие вероятности не имеет физической интерпретации. Вероятность оказывается математической абстракцией.

**Нарушение статистической устойчивости в детерминированных и случайных моделях.** Нарушение статистической устойчивости наблюдается в разных моделях, даже детерминированных и случайных.

Типичный пример – случайная величина, имеющая распределение Коши. Это распределение не имеет моментов, и поэтому любые оценки его моментов статистически неустойчивы (несостоятельны).

**Причины нарушения статистической устойчивости в реальном мире.** Нарушения статистической устойчивости вызываются разными причинами. Существенную роль играет приток в открытую систему извне вещества, энергии и (или) информации, питающий неравновесные процессы, различные нелинейные преобразования, низкочастотная линейная фильтрация особого вида и др.

Установлено, что статистическая устойчивость процесса определяется его спектральной плотностью мощности. Поэтому при низкочастотной фильтрации любой идеальный широкополосный стационарный статистически устойчивый шум может трансформироваться в статистически неустойчивый процесс.

Исследование нарушений статистической устойчивости и поиск эффективных способов адекватного описания реальных явлений окружающего мира с учетом этих нарушений привели к построению новой физико-математической теории гиперслучайных явлений.

**Понятие гиперслучайного явления.** В теории вероятностей базовыми математическими объектами (моделями) являются случайные явления – случайные событие, величина и функция; в теории гиперслучайных явлений в таком качестве выступают гиперслучайные явления – гиперслучайные событие, величина и функция, представляющие собой множества не связанных между собой случайных объектов, рассматриваемых как единое целое.

Гиперслучайное событие можно описать с помощью тетрады  $(\Omega, \mathfrak{Z}, G, P_g)$ , где  $\Omega$  – пространство элементарных событий  $\omega \in \Omega$ ,  $\mathfrak{Z}$  – борелевское поле,  $G$  – множество условий  $g \in G$ ,  $P_g$  – вероятностная мера подмножеств событий, зависящая от условия  $g$ . Таким образом, вероятностная мера задается для всех подмножеств событий и всех возможных условий  $g \in G$ . Меры же для условий  $g \in G$  нет.

Используя статистический подход, гиперслучайное событие  $A$  можно трактовать как событие, частота появления которого  $p_N(A)$  при увеличении числа опытов  $N$  не стабилизируется и при  $N \rightarrow \infty$  не имеет предела. В данном случае частота событий свойством статистической устойчивости не обладает. Однако таким свойством могут обладать другие статистики, например, статистики, описывающие границы диапазона изменения частоты событий.

Случайное явление исчерпывающе описывается вероятностным распределением, а гиперслучайное явление – множеством условных вероятностных распределений.

Случайная величина  $X$ , например, полностью характеризуется функцией распределения  $F(x)$ , а гиперслучайная величина  $X = \{X / g \in G\}$  – множеством условных функций распределения  $F(x / g)$ ,  $g \in G$ .

Гиперслучайная величина может быть представлена не только таким множеством, но и другими характеристиками и параметрами, в частности, верхней  $F_S(x) = \sup_{g \in G} F(x / g)$  и нижней  $F_I(x) = \inf_{g \in G} F(x / g)$  границами функции распределения, центральными и нецентральными моментами этих границ, границами моментов и др.

**Связь гиперслучайных моделей с другими моделями.** Случайную величину можно интерпретировать как гиперслучайную величину, у которой границы функции распределения совпадают:  $F_S(x) = F_I(x) = F(x)$ .

Детерминированную величину  $x_0$  приближенно можно рассматривать как вырожденный случай случайной (или гиперслучайной) величины с функцией распределения  $F(x)$ , имеющей единичный скачок в точке  $x_0$ .

Интервальная величина, характеризуемая границами интервала  $x_1, x_2$ , может быть представлена гиперслучайной величиной, у которой границы функции распределения  $F_S(x), F_I(x)$  имеют единичные скачки соответственно в точках  $x_1, x_2$ .

Таким образом, гиперслучайная величина является обобщением понятий детерминированной, случайной и интервальной величин. Благодаря такой универсальности с помощью гиперслучайных моделей можно моделировать разнообразные физические явления, обладающие разной степенью и видом неопределенности.

**Детерминизм и неопределенность.** На протяжении столетий считалось, что мир основан на детерминированных принципах. Обнаружение феномена статистической ус-

тойчивости поколебало эти представления. Выяснилось, что существенную роль играет не только детерминизм, но и неопределенность.

Важной формой неопределенности является многозначность. Многозначными математическими объектами являются случайные явления, интервальные величины и функции, а также гиперслучайные явления. В них присутствует неопределенность, хотя и разного вида. Неопределенность случайных явлений имеет вероятностную меру, а интервальные величины и функции не имеют меры. Гиперслучайные явления содержат неопределенность обоих типов.

**Объект и предмет исследования теории гиперслучайных явлений.** Объектом исследования теории гиперслучайных явлений являются реальные физические явления – события, величины, процессы и поля, а предметом исследования – нарушения статистической устойчивости характеристик и параметров реальных физических явлений.

**Общая характеристика теории гиперслучайных явлений.** Теория гиперслучайных явлений имеет математическую и физическую составляющие. Математическая составляющая основана на классических аксиомах теории вероятностей А.Н. Колмогорова, физическая – на двух гиперслучайных физических гипотезах адекватности:

- гипотезе ограниченной статистической устойчивости реальных событий, величин, процессов и полей;
- гипотезе адекватного описания реальных физических явлений гиперслучайными моделями.

Предположение, что эти гипотезы справедливы для широкого круга массовых явлений, ведет к принятию новой концепции устройства мира: его устройству на гиперслучайных принципах. Основополагающая роль в ней отводится ограниченной статистической устойчивости.

С точки зрения математики, теория гиперслучайных явлений – ветвь теории вероятностей; с точки зрения физики – новая теория, основанная на новых представлениях об устройстве окружающего мира.

**Закон больших чисел и центральная предельная теорема при нарушении статистической устойчивости.** Факт нарушения статистической устойчивости проявляется в статистических свойствах физических явлений, в частности, описываемых законом больших чисел и центральной предельной теоремой.

Исследования показывают, что как при отсутствии, так и при наличии нарушений статистической устойчивости выборочное среднее случайной выборки стремится к среднему математических ожиданий. Однако при отсутствии нарушений статистической устойчивости выборочное среднее сходится к определенному числу, а при нарушении устойчивости – стремится к бесконечности (плюс или минус) или флуктуирует в пределах определенного интервала. В общем случае предельное выборочное среднее может представлять собой число, случайную величину, интервал или гиперслучайную величину с непрерывной зоной неопределенности, ограниченную кривыми, состоящими из фрагментов гауссовских кривых.

Выборочное среднее гиперслучайной выборки сходится к фиксированной величине (числу), к множеству фиксированных величин (чисел), флуктуирует в одном или нескольких непересекающихся интервалах или стремится к бесконечности. При этом предельное выборочное среднее может представлять собой число, интервал, мультиинтервал, случайную величину или гиперслучайную величину с необязательно непрерывной зоной неопределенности, ограниченную кривыми, состоящими из фрагментов гауссовских кривых.

**Потенциальная точность измерений при нарушении статистической устойчивости.** Одним из важнейших вопросов является вопрос о потенциальной точности измерений.

Согласно классическим представлениям, разработанным еще Галилео Галилеем, измеряемая физическая величина может быть представлена однозначной детерминированной величиной, а результат измерения – случайной величиной. Погрешность измерения имеет две составляющие: систематическую и случайную.

Согласно теории вероятностей, при устремлении объема выборки к бесконечности случайная составляющая стремится к нулю и в целом погрешность – к систематической составляющей. Однако на практике, как известно, это не происходит. Виной тому – нарушение статистической устойчивости.

В рамках гиперслучайной парадигмы погрешность носит гиперслучайный характер и описывается гиперслучайной величиной.

В общем случае выделить в гиперслучайной погрешности отдельные составляющие не удастся. В одном из простейших случаев (когда границы функции распределения гиперслучайной погрешности отличаются друг от друга только математическими ожиданиями границ) погрешность можно разделить на систематическую, случайную и неопределенную (непрогнозируемую), описываемую интервальной величиной.

При устремлении объема выборки к бесконечности гиперслучайная погрешность сохраняет гиперслучайный характер.

Это объясняет многие известные, но долгое время остававшиеся непонятными факты, в частности, почему точность любых физических измерений ограничена, почему при использовании большого числа экспериментальных данных точность не зависит от объема данных и др.

**Как формируется неопределенность.** Существует множество путей образования неопределенности. Простейший из них – нелинейное преобразование, порождающее многозначность. Усреднение детерминированных данных при отсутствии сходимости также может приводить к образованию неопределенности.

**Эффективность использования различных моделей.** Разные модели по-разному и с разной точностью описывают недетерминированные свойства окружающего мира.

Поскольку понятие вероятности не имеет физической интерпретации, надо признать, что стохастические модели описывают эти свойства приближенно. Адекватное описание могут обеспечить интервальные и гиперслучайные модели.

Указанное обстоятельство, однако, не означает, что стохастические и другие подобные модели бесполезны. Неполное соответствие моделей моделируемым объектам существенно лишь при больших объемах выборки. Зачастую объемы выборок невелики. Тогда погрешность описания реальных объектов стохастическими и другими приближенными моделями пренебрежимо мала. Как правило, эти модели проще, чем интервальные и гиперслучайные модели, и потому во многих случаях оказываются предпочтительными.

Необходимость в более сложных интервальных и гиперслучайных моделях возникает тогда, когда проявляется ограниченный характер феномена статистической устойчивости – обычно при больших интервалах наблюдения и больших объемах выборки.

**Область применения гиперслучайных моделей.** Первоочередная область применения гиперслучайных моделей связана со статистической обработкой различных физических процессов (электрических, магнитных, электромагнитных, акустических, гидроакустических, сейсмоакустических, метеорологических и пр.) большой длительности, а также с высокоточными измерениями физических величин и прогнозированием физических процессов на основе статистической обработки больших массивов данных.

Гиперслучайные модели могут использоваться также при моделировании физических событий, величин, процессов и полей, для которых, ввиду чрезвычайной малости объема статистического материала, невозможно получить качественные оценки параметров и характеристик, а можно лишь указать границы, в которых они находятся.

**Проблема формализации физических понятий.** Использование нестохастических моделей, к числу которых относятся интервальные и гиперслучайные модели, обостряет скрытую проблему корректной формализации физических понятий, определяемых с использованием стохастических моделей, в частности, понятия энтропии.

Сложность в том, что вероятность не имеет физической интерпретации, и поэтому все физические понятия, использующие понятие вероятности, оказываются фактически неопределенными. Но эту трудность, как выясняется, можно преодолеть.

**Математический анализ расходящихся и многозначных функций.** Теория гиперслучайных явлений затрагивает малоизученную область математики, касающуюся нарушения сходимости и многозначности.

Современная математика построена на математическом анализе, оперирующем с однозначными последовательностями и функциями, имеющими однозначные пределы.

Развитие методов теории гиперслучайных явлений привело к формированию основ математического анализа расходящихся и многозначных функций. Понятия предела обобщены на случай расходящихся (в обычном смысле) последовательностей и функций, а понятия сходимости, непрерывности, дифференцируемости, первообразной, неопределенного и определенного интегралов – на случай многозначных функций.

### 3. Структура книги

Монография состоит из пяти частей, объединяющих 33 главы. *Первая часть* (главы 1–8) посвящена рассмотрению особенностей феномена статистической устойчивости и разработке методики исследования нарушений статистической устойчивости, в том числе при ограниченном объеме данных. *Вторая часть* (главы 9–13) содержит описание множества экспериментальных исследований, посвященных изучению нарушений статистической устойчивости разнообразных процессов разной физической природы. *Третья часть* (главы 14–21) представляет краткое изложение математических основ теории гиперслучайных явлений. *Четвертая часть* (главы 22–25) посвящена обобщению математических положений теории гиперслучайных явлений и формированию основ математического анализа расходящихся и многозначных функций. *Пятая часть* (главы 26–33) содержит теоретические и экспериментальные исследования статистических закономерностей при нарушениях статистической устойчивости.

### 4. Названия и аннотации глав книги

Общее представление о содержании глав книги дают их названия и аннотации, приведенные ниже.

**Глава 1. Феномен статистической устойчивости и его свойства.** Рассмотрены основные проявления феномена статистической устойчивости: статистическая устойчивость частоты событий и среднего значения. Обращено внимание, что феномен статистической устойчивости обладает свойством эмерджентности и присущ физическим явлениям не только стохастической природы. Обсуждена гипотеза идеальной (абсолютной) статистической устойчивости, предполагающая наличие сходимости частоты событий и средних величин. Приведены примеры статистически неустойчивых процессов. Обсуждены термины «одинаковые статистические условия» и «непрогнозируемые статистические условия».

**Глава 2. Принципы описания феномена статистической устойчивости.** Описана шестая проблема Д. Гильберта, касающаяся аксиоматизации законов физики. Рассмотрены общепризнанные математические принципы аксиоматизации теории вероятностей и механики. Предложен вариант решения шестой проблемы на основе дополнения аксиоматизированных математических теорий, описывающих законы физики, физическими гипотезами

адекватности, устанавливающими связь между математическими теориями и реальным миром. Рассмотрены основополагающие понятия теории вероятностей и теории гиперслучайных явлений. Сформулированы гипотезы адекватности для теории вероятностей и теории гиперслучайных явлений. Обращено внимание, что понятие вероятности не имеет физической интерпретации в реальном мире.

**Глава 3. Детерминизм и неопределенность.** Рассмотрены различные концептуальные взгляды на устройство мира с позиций детерминизма и неопределенности. Приведена классификация неопределенностей. Описан способ единообразного представления моделей с помощью функции распределения. Предложена классификация математических моделей.

**Глава 4. Статистически неустойчивые стохастические модели.** Рассмотрены случайные величины и случайные процессы, статистически неустойчивые по отношению к определенным статистикам. Проанализированы с точки зрения статистической устойчивости различные виды нестационарных процессов.

**Глава 5. Формализация понятия статистической устойчивости.** Формализовано понятие статистической устойчивости. Введены параметры статистической неустойчивости. Предложены единицы измерения параметров статистической неустойчивости. Введены понятия статистической устойчивости/неустойчивости процессов в узком и широком смысле. Исследована статистическая устойчивость ряда моделей процессов.

**Глава 6. Зависимость статистической устойчивости процесса от особенностей его временных характеристик.** Исследована зависимость статистической устойчивости процесса от особенностей его временных характеристик, в частности, от флуктуации математического ожидания и корреляции отсчетов.

**Глава 7. Зависимость статистической устойчивости непрерывного процесса от его спектра.** Рассмотрено преобразование Винера-Хинчина. Обращено внимание, что существуют случайные процессы, которые не имеют одновременно корреляционной функции и спектральной плотности мощности. Установлена связь между статистической устойчивостью непрерывного процесса и его спектральной плотностью мощности. Исследована статистическая устойчивость непрерывных процессов со степенной спектральной плотности мощности.

**Глава 8. Зависимость статистической устойчивости дискретного процесса от его спектра.** Установлена связь между статистической устойчивостью дискретного процесса и его спектральной плотностью мощности. Приведены результаты моделирования, подтверждающие корректность формул, описывающих зависимость параметров статистической неустойчивости от спектральной плотности мощности процесса.

**Глава 9. Экспериментальные исследования статистической устойчивости различных физических процессов на больших интервалах наблюдения.** Приведены результаты экспериментальных исследований статистической устойчивости различных физических процессов: собственных шумов усилителя, гидроакустических шумов морских судов, колебаний напряжения городской электросети, высоты морских волн и периода их следования, магнитного поля Земли и котировки валют. Обращено внимание, что на небольших интервалах наблюдения нарушения статистической устойчивости не обнаруживаются, однако на больших интервалах наблюдения все они оказываются статистически неустойчивыми.

**Глава 10. Экспериментальные исследования статистической устойчивости метеорологических данных.** Приведены результаты экспериментальных исследований на больших интервалах наблюдения статистической устойчивости колебаний температуры воздуха и количества осадков в районах Москвы и Киева, а также скорости ветра в районе Чернобыля. Все исследованные процессы оказались статистически неустойчивыми. Степень их неустойчивости разная. Установлено, что колебания температуры значительно более неустойчивы, чем колебания количества осадков.

**Глава 11. Экспериментальные исследования статистической устойчивости колебаний температуры воды и скорости звука в Тихом океане.** Приведены результаты экспериментальных исследований на больших интервалах наблюдения статистической устойчивости колебаний температуры воды и скорости звука в Тихом океане. Установлена статистическая неустойчивость этих процессов.

**Глава 12. Экспериментальные исследования статистической устойчивости излучения астрофизических объектов.** Приведены результаты экспериментальных исследований на больших интервалах наблюдения статистической устойчивости излучения астрофизических объектов в рентгеновском диапазоне частот. Все исследованные колебания оказались статистически неустойчивыми. Наиболее устойчивыми оказались колебания интенсивности излучения пульсара PSRJ 1012+5307. Установлено, что на всем интервале наблюдения эти колебания статистически устойчивы по отношению к среднему, но неустойчивы по отношению к среднеквадратическому отклонению.

**Глава 13. Статистическая устойчивость различных шумов и процессов.** Рассмотрены разные типы шумов: цветные, фликкер-шумы, самоподобные (фрактальные). Обобщены результаты исследований статистической устойчивости различных шумов и процессов. Исследованы причины нарушения статистической устойчивости. Установлено, что статистически неустойчивые процессы могут образовываться разными путями: в результате поступления извне в открытую систему вещества, энергии и (или) информации, нелинейных и даже линейных преобразований.

**Глава 14. Гиперслучайные события.** Введено понятие гиперслучайного события. Для описания гиперслучайного события использованы условные вероятности и границы вероятностей. Приведены свойства этих параметров.

**Глава 15. Скалярные гиперслучайные величины.** Определено понятие скалярной гиперслучайной величины. Для ее описания использованы условные функции распределения (дающие исчерпывающее описание гиперслучайной величины), границы функции распределения и их моменты, а также границы моментов. Приведены свойства этих характеристик и параметров.

**Глава 16. Векторные гиперслучайные величины.** Введено понятие векторной гиперслучайной величины. Методы описания скалярной гиперслучайной величины обобщены на случай векторной гиперслучайной величины. Приведены свойства характеристик и параметров векторных гиперслучайных величин.

**Глава 17. Гиперслучайные функции.** Введено понятие скалярной гиперслучайной функции. Рассмотрены различные способы ее представления. Для описания использованы условные функции распределения (дающие наиболее полную характеристику гиперслучайной функции), а также границы функции распределения, плотности распределения границ, моменты границ и границы моментов.

**Глава 18. Основы математического анализа случайных и гиперслучайных функций.** Изложены основы математического анализа случайных функций: определены понятия сходимости последовательности случайных величин и функций, производной и интеграла случайной функции. Введены понятия сходимости последовательности гиперслучайных величин и функций, а также понятия непрерывности, дифференцируемости и интегрируемости гиперслучайных функций.

**Глава 19. Стационарные и эргодические гиперслучайные функции.** Известные для случайных функций понятия стационарности и эргодичности обобщены на гиперслучайные функции. Рассмотрены спектральные методы описания стационарных гиперслучайных функций. Приведены свойства стационарных и эргодических гиперслучайных функций.

**Глава 20. Преобразование гиперслучайных величин и процессов.** Проанализированы различные способы представления гиперслучайных величин и процессов на

предмет целесообразности их применения при различных типах преобразования. Приведены соотношения, связывающие характеристики и параметры преобразованных и исходных гиперслучайных величин и процессов. Даны рекомендации по использованию различных способов описания гиперслучайных величин при линейных и нелинейных преобразованиях, а также гиперслучайных процессов при безынерционных и инерционных преобразованиях.

**Глава 21. Основы статистики гиперслучайных явлений.** Формализовано понятие гиперслучайной выборки и приведены ее свойства. Описана методология формирования оценок характеристик гиперслучайной величины. Акцентируется внимание на нарушении сходимости реальных оценок и адекватности их описания гиперслучайными моделями.

**Глава 22. Расходящиеся последовательности и функции.** Понятие предела сходящейся числовой последовательности обобщено на случай расходящихся последовательностей и функций. В отличие от обычного предела, принимающего обязательно единственное значение, обобщенный предел принимает множество значений. Для расходящейся числовой последовательности введено понятие спектра предельных точек. Доказана теорема о последовательности средних.

**Глава 23. Описание расходящихся последовательностей и функций.** Приведен способ описания расходящихся последовательностей и функций с помощью функций распределения. Доказана теорема о спектре частот значений разряда последовательности. Приведены примеры описания расходящихся функций.

**Глава 24. Многозначные величины, последовательности и функции.** Рассмотрены различные варианты описания многозначных величин и функций. С помощью математического аппарата теории гиперслучайных явлений формализованы понятия многозначной величины и многозначной функции. Установлена связь между многозначностью и нарушением сходимости. Введены понятия спектров и функций распределения многозначных величин и функций.

**Глава 25. Основы математического анализа многозначных функций.** Для многозначных функций введены понятия непрерывной функции, производной, неопределенного и определенного интегралов, а также спектра главных значений определенного интеграла.

**Глава 26. Закон больших чисел.** Установлено, что закон больших чисел, известный для последовательности случайных величин, справедлив как при наличии, так и отсутствии сходимости выборочного среднего. При отсутствии сходимости выборочное среднее приближается к среднему математических ожиданий, синхронно флуктуируя с ним в определенном интервале. Закон больших чисел обобщен на случай последовательности гиперслучайных величин. Исследованы особенности проявления обобщенного закона больших чисел.

**Глава 27. Центральная предельная теорема.** Исследованы особенности центральной предельной теоремы для последовательности случайных величин при наличии и отсутствии сходимости выборочного среднего к фиксированному числу. Обобщена центральная предельная теорема на случай последовательности гиперслучайных величин. Приведены результаты экспериментальных исследований, демонстрирующие отсутствие сходимости выборочных средних реальных физических процессов к фиксированным числам.

**Глава 28. Концепции точности и модели измерений.** Проанализированы две концепции оценки точности измерений: концепция погрешности и концепция неопределенности. Рассмотрен ряд моделей измерений.

**Глава 29. Гиперслучайные оценки детерминированных величин.** Исследована детерминированно-гиперслучайная модель измерения. Для точечных гиперслучайных

оценок введены понятия несмещенной, состоятельной, эффективной и достаточной оценок, а для интервальных гиперслучайных оценок – понятия доверительного интервала и границ доверительной вероятности. Доказаны теоремы, определяющие границы верхней границы точности точечной оценки и границы доверительного интервала интервальной оценки. Показано, что гиперслучайные оценки детерминированных величин несостоятельны и поэтому точность измерений оказывается ограниченной.

**Глава 30. Гиперслучайные оценки гиперслучайных величин.** Рассмотрена гиперслучайно-гиперслучайная модель измерения. Выведены формулы, описывающие погрешность гиперслучайной оценки гиперслучайной величины в общем и частных случаях. Получены соотношения, позволяющие рассчитывать погрешность гиперслучайной оценки при косвенных измерениях гиперслучайной величины.

**Глава 31. Характеристики гиперслучайных оценок гиперслучайных величин.** Для точечных гиперслучайных оценок гиперслучайных величин введены понятия несмещенной, состоятельной, эффективной и достаточной оценок. Доказаны теоремы, определяющие границы верхней границы точности точечной оценки и границы доверительного интервала интервальной оценки. Дано математическое обоснование известного из практики факта, что точность любых реальных физических измерений имеет предел, преодолеть который не удастся даже при очень большом объеме данных.

**Глава 32. Энтропия неопределенности при нарушении статистической устойчивости.** Проанализированы различные варианты определения понятия энтропии. Понятие шенноновской энтропии для случайных величин распространено на неопределенные величины, не имеющие вероятностной меры. Введены понятия энтропии гиперслучайной и интервальной величин.

**Глава 33. Формирование неопределенности.** Исследованы пути формирования неопределенности. Выяснено, что неопределенность может возникать в результате определенного типа нелинейных преобразований и в процессе усреднения детерминированных величин при отсутствии сходимости. Дано теоретическое обоснование тому, что интервальные, мультиинтервальные и гиперслучайные модели адекватно отражают реалии окружающего мира, а случайные модели являются математическими абстракциями.

В **Приложение 1** вынесены высказывания известных ученых по поводу феномена статистической устойчивости, в **Приложение 2** – базовые понятия интервальной арифметики, в **Приложение 3** – практические рекомендации, касающиеся исследования статистической устойчивости процессов, а в **Приложении 4** кратко изложена история формирования теории гиперслучайных явлений.

В **список литературы**, содержащий 338 источников, включены работы отечественных и зарубежных авторов, использованные при написании монографии.

## **СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ**

1. Горбань И.И. Феномен статистической устойчивости / Горбань И.И. – К.: Наукова думка, 2014. – 444 с.
2. Горбань И.И. Теория гиперслучайных явлений / Горбань И.И. – К.: ИПММС НАН Украины, 2007. – 184 с.
3. Горбань И.И. Теория гиперслучайных явлений: физические и математические основы / Горбань И.И. – К.: Наукова думка, 2011. – 318 с.

*Стаття надійшла до редакції 26.09.2014*