УДК 517.956.4

В. М. Кузаконь

Дифференциальные инварианты слоений

(Представлено членом-корреспондентом НАН Украины В. В. Шарко)

Обчислено структури алгебр диференціальних інваріантів для гладких шарувань на многовидах.

Пусть $\mathfrak{F}$ — гладкое слоение коразмерности m на многообразии M. Локально это слоение может быть задано набором $h = (h_1, \ldots, h_m)$ первых интегралов, где $h_i \in C^\infty_{\mathrm{loc}}(M)$, $dh_1 \wedge \cdots \wedge \wedge dh_m \neq 0$. При этом два набора h, и $\alpha(h)$, где $\alpha\colon R^m \to R^m$ — локальный диффеоморфизм, определяют одно и тоже слоение. Имея это в виду, рассмотрим расслоение $\pi\colon R^m \times M \to \to M$, тогда каждое локальное сечение $s_f\colon x \in M \mapsto (x, f_1(x), \ldots, f_m(x)) \in R^m \times M$ этого расслоения определяет слоение $f_1 = c_1, \ldots, f_m = c_m$ при условии регулярности

$$df_1 \wedge \cdots \wedge df_m \neq 0. \qquad (1)$$

Псевдогруппа всех локальных диффеоморфизмов R^m естественным образом действует на пространстве сечений π. А именно, образом сечения $s \in C^\infty_{\mathrm{loc}}(\pi)$ при диффеоморфизме α является сечение

$$\alpha(s) = (\alpha \times 1) \circ s. \qquad (2)$$

Пусть $J^k(\pi)$ — многообразие k-джетов локальных сечений расслоения π, а $J^k_0(\pi) \subset \subset J^k(\pi)$ — многообразие k-джетов регулярных сечений. Описанное выше калибровочное действие (2) поднимается [2] до действия $\alpha^{(k)}$ в расслоении k-джетов $\pi_k\colon J^k(\pi) \to M$,

$$\alpha^{(k)}([s]^k_x) = [\alpha(s)]^k_x,$$

где через $[s]^k_x$ обозначен k-джет сечения s в точке $x \in M$. Аналогично, каждое векторное поле V на пространстве R^m, рассматриваемое как вертикальное векторное поле на расслоении π, продолжается [2] до вертикального векторного поля $V^{(k)}$ на расслоении π_k. А именно, векторному полю $V^{(k)}$ отвечает локальная однопараметрическая группа преобразований

$$\alpha^{(k)}_t\colon J^k(\pi) \to J^k(\pi),$$

где $\alpha_t\colon R^m \times M \to R^m \times M$ — группа сдвигов вдоль векторного поля V. Отметим, что при этом $\alpha^{(k)}_t\colon J^k_0(\pi) \to J^k_0(\pi)$.

Дифференциальным инвариантом слоений порядка $\leqslant k$ мы называем [1, 3] гладкую функцию $F \in C^\infty(J^k_0(\pi))$ такую, что $V^k(F) = 0$, для всех векторных полей $V \in D(R^m)$ на R^m.

Выберем локальные координаты $(x_1, \ldots, x_n)$ в M, и пусть $u_1, \ldots, u_m$ — координаты в R^m. Соответствующие локальные координаты в $J^k(\pi)$ будем обозначать через u^i_σ, где

$$u^i_\sigma([s_f]^k_a) = \frac{\partial^{|\sigma|} f_i}{\partial x^\sigma}(a), \qquad a \in M,$$

и $\sigma = (\sigma_1, \ldots, \sigma_n)$ — мультииндекс длины $|\sigma| = \sigma_1 + \cdots + \sigma_n \leqslant k$.

Пусть

$$V_\varphi = \sum_{i=1}^{m} \varphi_i(u) \frac{\partial}{\partial u^i} \text{ —}$$

векторное поле на R^m, тогда в выбранной системе координат векторное поле $V_\varphi^{(k)}$ примет вид [2]

$$V_\varphi^{(k)} = \sum_{i,|\sigma|\leqslant k} D^\sigma(\varphi_i) \frac{\partial}{\partial u^i_\sigma},$$

где $D^\sigma = D_1^{\sigma_1} \circ \cdots \circ D_n^{\sigma_n}$,

$$D_i = \frac{\partial}{\partial x_i} + \sum_{j,\sigma} u^j_{\sigma+1_i} \frac{\partial}{\partial u^j_\sigma} \text{ —}$$

операторы полной производной.

Таким образом, условие, что функция $F = F(x, u^i_\sigma)$ является дифференциальным инвариантом слоений, эквивалентно тому, что

$$\sum_{i,\sigma} D^\sigma(\varphi_i) \frac{\partial F}{\partial u^i_\sigma} = 0 \tag{3}$$

для всех гладких функций $\varphi_1, \ldots, \varphi_m$.

Для описания дифференциальных инвариантов порядка $\leqslant k$ мы обозначили через N_k слой расслоения $\pi_k\colon J_0^k(\pi) \to M$ над точкой $x \in M$. Отметим, что N_k — гладкое многообразие размерности mC^k_{n+k}.

Обозначим через P_k распределение на многообразие N_k, задаваемое векторными полями $V_\varphi^{(k)}$, где компоненты $\varphi = (\varphi_1(u), \ldots, \varphi_m(u))$ являются полиномами степени $\leqslant k$ относительно переменных $u^1, \ldots, u^m$.

Теорема 1. *1. Распределение P_k является вполне интегрируемым распределением размерности mC^k_{m+k}.*

2. Функция $F \in C^\infty(J_0^k(\pi))$ является дифференциальным инвариантом слоений тогда и только тогда, когда ограничение F на слои N_k является 1-м интегралом распределения P_k.

Мы скажем, что дифференциальные инварианты $F_1, \ldots, F_r$ порядка $\leqslant k$ образуют функциональный базис в алгебре дифференциальных инвариантов слоений в окрестности $V \subset J_0^k(\pi)$, если любой дифференциальный инвариант порядка $\leqslant k$ является функцией $F_1, \ldots, F_r$ в этой окрестности и если $dF_1 \wedge \cdots \wedge dF_r \neq 0$ в этой окрестности. Число r мы называем размерностью алгебры дифференциальных инвариантов порядка $\leqslant k$.

Теорема 2. *Размерность r_k алгебры дифференциальных инвариантов слоений порядка $\leqslant k$ дается следующей формулой:*

$$r_k = m(C^k_{n+k} - C^k_{m+k}).$$

Как следует из этой теоремы (ср. [4]), не существует нетривиальных дифференциальных инвариантов порядка 0, а размерность алгебры дифференциальных инвариантов первого порядка равна $m(n-m)$.

Для того чтобы описать эти инварианты заметим, что слои проекции $\pi_{1,0}\colon J^1(\pi) \to M \times R^m$ суть $T^*M \otimes R^m$, а каждый 1-джет $[s_f]^1_a$ определяется m-ковекторами $\Theta_1 = d_a f_1, \ldots, \Theta_m = d_a f_m$, если $f_1(a) = \cdots = f_m(a) = 0$. Пусть $\Theta = \Theta_1 \wedge \cdots \wedge \Theta_m$, тогда под действием калибровочных преобразований, сохраняющих точку $s_f(a)$, m-ковектор Θ переходит в пропорциональный, а следовательно, всякая функция $F\colon \Lambda^m(T^*_a M) \setminus 0 \to R$ и имеющая однородность степени 0 задает дифференциальный инвариант порядка 1.

Это позволяет указать базис в дифференциальных инвариантах 1-го порядка. А именно, обозначение через M_I, где $I = 1 \leqslant i_1 < i_2 < \cdots < i_{n-m} \leqslant n$ — определитель матрицы $\|u^i_j\|$, $1 \leqslant i \leqslant m$, $1 \leqslant j \leqslant n$, из которой удалены столбцы с номерами $i_1, \ldots, i_{n-m}$, и пусть

$$M = \sqrt{\sum_I M_I^2}.$$

Теорема 3. *Размерность алгебры дифференциальных инвариантов слоений порядка 1 равна $m(n-m)$, а функция*

$$F_I = \frac{M_I}{M}$$

локально порождает эту алгебру.

Для нахождения дифференциальных инвариатов порядка $\geqslant 2$ заметим, что дифференцирования $\widehat{X}$, являющиеся полными производными вдоль векторных полей $X \in D(M)$ [2], коммутируют с калибровочным действием, а потому $\widehat{X}(F)$ является дифференциальным инвариантом порядка $(k+1)$ всякий раз, когда F является дифференциальным инвариантом порядка k. Непосредственный подсчет размерностей показывает, что справедлив следующий результат.

Теорема 4. *1. Функции $F_I^\sigma \in C^\infty(J_0^k\pi)$, где*

$$F_I^\sigma = D^\sigma(F_I), \qquad |\sigma| \leqslant k-1,$$

являются дифференциальными инвариантами порядка $\leqslant k$.

2. Любой дифференциальный инвариант слоений порядка $\leqslant k$ локально представим в виде функции инвариантов F_I^σ, $|\sigma| \leqslant k-1$.

1. *Алексеевский Д. В., Виноградов А. М., Лычагин В. В.* Основные идеи и понятия дифференциальной геометрии. Современные проблемы математики. Фундаментальные направления // Геометрия-1. Т. 28. – Москва: ВИНИТИ, 1988. – 289 с.
2. *Красильщик И. С., Лычагин В. В., Виноградов А. В.* Введение в геометрию нелинейных дифференциальных уравнений. – Москва: Наука, 1986. – 336 с.
3. *Кузаконь В. М.* Тензорные инварианты сечений субмерсий с дополнительными структурами // Мат. студії. – 2002. – **17**, № 2. – С. 199–210.
4. *Кузаконь В. М.* Вычисление дифференциальных инвариантов второго порядка субмерсий евклидовых пространств // Мат. методи та фiз.-мех. поля. – 2005. – **48**, № 4. – С. 95–99.

Одесская национальная академия пищевых технологий

Поступило в редакцию 09.07.2008

V. M. Kuzakon'

Differential invariants of foliations

We find the algebras of differential invariants for foliations on manifolds.