ДОПОВІДІ НАЦІОНАЛЬНОЇ АКАДЕМІЇ НАУК УКРАЇНИ

4 • 2009

МАТЕМАТИКА

УДК 531.36



**С. В. Бабенко, А. И. Двирный**

# Линейные матричные неравенства и устойчивость систем дифференциальных уравнений с кусочно-постоянными коэффициентами

*(Представлено академиком НАН Украины А. А. Мартынюком)*

*На основі методу лінійних матричних нерівностей отримані достатні умови асимптотичної стійкості за Ляпуновим лінійних систем диференціальних рівнянь з кусково-сталими коефіцієнтами.*

В данном сообщении приведены некоторые результаты, позволяющие свести задачу об устойчивости линейной системы дифференциальных уравнений с кусочно-постоянными коэфициентами к вопросу о совместимости некоторой системы линейных матричных неравенств. Метод линейных матричных неравенств [1–3] является достаточно разработанным методом исследования в теории устойчивости [4]. Его преимущество состоит в том, что он численно реализован в пакете прикладных программ MATLAB.

Рассматривается линейная система обыкновенных дифференциальных уравнений вида [5]

$$\frac{dx}{dt} = A_{\sigma(t)}x, \qquad x(t_0) = x_0, \tag{1}$$

где $x \in \mathbb{R}^n$, $t \geqslant t_0$, $A_{\sigma(t)}$ — кусочно-постоянная матрица, $\sigma(t) = j$ — кусочно-постоянная функция, принимающая последовательно значения из конечного множества $\{1, 2, \dots r\}$.

Введем отображение $X\colon \mathbb{R}^n \to \mathcal{K} \subset \mathcal{E}$, где $\mathcal{K}$ — конус симметричных положительно полуопределенных матриц [6], т. е. $\mathcal{K} = \{H \in \mathcal{E},\ \xi^T H\xi \geqslant 0,\ \xi \in \mathbb{R}^n\}$, $\mathcal{E}$ — пространство симметричных $n \times n$ матриц, $X(t) = xx^T$. Известно [7–9], что это отображение сохраняет устойчивость и переводит линейную систему уравнений (1) в матричную систему уравнений

$$\frac{dX}{dt} = A_jX + XA_j^T, \qquad X(t_0) = X_0 \in \mathcal{K}, \tag{2}$$

позитивную относительно конуса $\mathcal{K}$.

Введем линейные операторы

$$P_j \colon \mathcal{E} \to \mathcal{E}, \qquad P_j X = A_j X + X A_j^T, \qquad j = \overline{1, r},$$
$$G \colon \mathcal{E} \to \mathcal{E}, \qquad GX = (\operatorname{tr} X) I,$$

и систему (2) представим в виде

$$\begin{aligned} &\frac{dX}{dt} = P_j X, \\ &X(t_0) = X_0 \in \mathcal{K}. \end{aligned} \tag{3}$$

Определим линейный оператор монодромии

$$\Psi = \prod_{j=1}^{r} e^{P_{r-(j-1)}\overline{\theta}_{r-(j-1)} + \gamma_{r-(j-1)} G(\overline{\theta}_{r-(j-1)} - \underline{\theta}_{r-(j-1)})},$$

где $\overline{\theta}_j$, $\underline{\theta}_j$ — супремум и инфимум соответственно длин промежутков постоянства функции $\sigma(t)$, на которых она принимает значения, равные $j$; $\gamma_j$ — константа позитивности оператора $P_j$ относительно конуса $\mathcal{K}$, т. е. неотрицательная константа, для которой $P'_j \mathcal{K} \subset \mathcal{K}$, где $P'_j = P_j + \gamma_j G$ [10].

Рассмотрим частный случай, когда $r = 2$, $\overline{\theta}_i = \underline{\theta}_i = \theta_i$, $i = \overline{1, r}$. В этом случае оператор монодромии принимает вид

$$\Psi = e^{P_2 \theta_2} e^{P_1 \theta_1}.$$

Справедливо следующее утверждение.

**Теорема 1.** *Если линейная система уравнений* (1) *такова, что система линейных матричных неравенств*

$$\begin{cases} \displaystyle\sum_{k=1}^{l-1} \frac{1}{k!} \sum_{j=0}^{k} C_k^j (\theta_1^k A_1^{k-j} X (A_1^T)^j + (-1)^{k+1} \theta_2^k A_2^{k-j} X (A_2^T)^j) < 0, \\ \displaystyle\sum_{j=0}^{l} C_l^j A_1^{l-j} X (A_1^T)^j \leqslant 0, \\ \displaystyle\sum_{j=0}^{l} C_l^j A_2^{l-j} X (A_2^T)^j \leqslant 0, \end{cases}$$

*где* $l = 2n - 1$, $n \in \mathbb{N}$, *совместна в классе положительно определенных матриц, то система* (1) *асимптотически устойчивая.*

**Доказательство.** Определим матрицу $\widetilde{X} = e^{-P_2 \theta_2} X$. Согласно положительности оператора $e^{-P_2 \theta_2}$ матрица $\widetilde{X}$ является положительно определенной.

Для $\forall\, \Phi \in \mathcal{K}^* = \mathcal{K}$, где $\mathcal{K}^*$ — конус, сопряженный к конусу $\mathcal{K}$ [6], введем к рассмотрению функцию

$$\phi(h) = \operatorname{tr}(\Phi(e^{P_1 \theta_1 h} X - e^{-P_2 \theta_2 h} X)).$$

Произведем разложение $\phi(h)$ в степенной ряд, используя при этом представление остаточного члена в форме Лагранжа:

$$\phi(h) = \mathrm{tr}\left(\Phi\left(\sum_{k=0}^{l-1}\left(\frac{h^k(P_1\theta_1)^k}{k!}X - \frac{(-1)^k h^k(P_2\theta_2)^k}{k!}X\right)\right)\right) +$$

$$+ \mathrm{tr}\left(\Phi\left(\frac{1}{l!}(h^l e^{P_1\theta_1\xi}(P_1\theta_1)^l X + (-1)^{l+1}h^l e^{-P_2\theta_2\xi}(P_2\theta_2)^l X)\right)\right),$$

$$\xi \in [0,h], \qquad l = 2n-1, \qquad n \in \mathbb{N}.$$

Тогда для $h = 1$ получаем выражение

$$\phi(1) = \mathrm{tr}(\Phi(e^{P_1\theta_1}X - e^{-P_2\theta_2}X)) = \mathrm{tr}\left(\Phi\left(\sum_{k=0}^{l-1}\left(\frac{(P_1\theta_1)^k}{k!}X - \frac{(-1)^k(P_2\theta_2)^k}{k!}X\right)\right)\right) +$$

$$+ \mathrm{tr}\left(\Phi\left(\frac{1}{l!}(e^{P_1\theta_1\xi}(P_1\theta_1)^l X + e^{-P_2\theta_2\xi}(P_2\theta_2)^l X)\right)\right) =$$

$$= \mathrm{tr}\left(\Phi\left(\sum_{k=1}^{l-1}\frac{1}{k!}\sum_{j=0}^{k}C_k^j(\theta_1^k A_1^{k-j}X(A_1^T)^j + (-1)^{k+1}\theta_2^k A_2^{k-j}X(A_2^T)^j)\right)\right) +$$

$$+ \mathrm{tr}\left(\Phi\left(\frac{1}{l!}\left(\theta_1^l e^{P_1\theta_1\xi}\sum_{j=0}^{l}C_l^j A_1^{l-j}X(A_1^T)^j + \theta_2^l e^{-P_2\theta_2\xi}\sum_{j=0}^{l}C_l^j A_2^{l-j}X(A_2^T)^j\right)\right)\right),$$

$$\xi \in [0,1].$$

Согласно сформулированным в теореме условиям и определению сопряженного конуса получаем

$$\phi(1) = \mathrm{tr}(\Phi(e^{P_1\theta_1}X - e^{-P_2\theta_2}X)) = (\Phi, e^{P_1\theta_1}X - e^{-P_2\theta_2}X) < 0.$$

Отсюда следует $e^{P_1\theta_1}X - e^{-P_2\theta_2}X \overset{\mathcal{K}}{<} 0$, т.е. $\Psi\widetilde{X} \overset{\mathcal{K}}{<} \widetilde{X}$. Согласно [11] линейная система дифференциальных уравнений (1) асимптотически устойчивая. Теорема доказана.

**Теорема 2.** *Если линейная система* (1) *такова, что для заданной симметричной положительно определенной матрицы $Q$ линейное матричное уравнение*

$$\sum_{k=1}^{l-1}\frac{1}{k!}\sum_{j=0}^{k}C_k^j(\theta_1^k A_1^{k-j}X(A_1^T)^j + (-1)^{k+1}\theta_2^k A_2^{k-j}X(A_2^T)^j) = -Q$$

*имеет положительно определенное решение $X$, удовлетворяющее неравенству*

$$\frac{1}{l!}((2\theta_1\|A_1\|)^l e^{2\theta_1\|A_1\|} + (2\theta_2\|A_2\|)^l e^{2\theta_2\|A_2\|})\|X\| < \lambda_{\min}(Q), \qquad l \in \mathbb{N},$$

*то система* (1) *асимптотически устойчивая.*

**Доказательство.** Определим матрицу $\widetilde{X} = e^{-P_2\theta_2}X$, которая является положительно определенной ввиду положительности оператора $e^{-P_2\theta_2}$ и рассмотрим функцию вида

$$V(h) = x^T(e^{P_1\theta_1 h}X - e^{-P_2\theta_2 h}X)x.$$

Произведем разложение скалярной функции $V(h)$ в степенной ряд, используя при этом для остаточного члена представление в форме Лагранжа:

$$V(h) = x^T(e^{P_1\theta_1 h}X - e^{-P_2\theta_2 h}X)x = x^T\left(\sum_{k=1}^{l-1}\left(\frac{h^k(P_1\theta_1)^k}{k!}X - \frac{(-1)^k h^k(P_2\theta_2)^k}{k!}X\right)\right)x +$$

$$+ x^T\left(\frac{1}{l!}(h^l e^{P_1\theta_1\xi}(P_1\theta_1)^l X + (-1)^{l+1}h^l e^{-P_2\theta_2\xi}(P_2\theta_2)^l X\right)x, \qquad \xi \in [0,h].$$

Тогда для $h = 1$ получаем выражение

$$V(1) = x^T(e^{P_1\theta_1}X - e^{-P_2\theta_2}X)x = x^T\left(\sum_{k=1}^{l-1}\left(\frac{(P_1\theta_1)^k}{k!}X - \frac{(-1)^k(P_2\theta_2)^k}{k!}X\right)\right)x +$$

$$+ x^T\left(\frac{1}{l!}(e^{P_1\theta_1\xi}(P_1\theta_1)^l X + (-1)^{l+1}e^{-P_2\theta_2\xi}(P_2\theta_2)^l X)\right)x =$$

$$= x^T\left(\sum_{k=1}^{l-1}\left(\frac{(P_1\theta_1)^k X}{k!} - (-1)^k\frac{(P_2\theta_2)^k X}{k!}\right)\right)x +$$

$$+ x^T\left(\frac{1}{l!}(\theta_1^l e^{A_1\theta_1\xi}P_1^l X e^{A_1^T\theta_1\xi} + (-1)^{l+1}\theta_2^l e^{-A_2\theta_2\xi}P_2^l X e^{-A_2^T\theta_2\xi})\right)x =$$

$$= x^T\left(\sum_{k=1}^{l-1}\frac{1}{k!}\sum_{j=0}^{k}C_k^j(\theta_1^k A_1^{k-j}X(A_1^T)^j + (-1)^{k+1}\theta_2^k A_2^{k-j}X(A_2^T)^j)\right)x +$$

$$+ x^T\left(\frac{1}{l!}(\theta_1^l e^{A_1\theta_1\xi}P_1^l X e^{A_1^T\theta_1\xi} + \theta_2^l e^{-A_2\theta_2\xi}P_2^l X e^{-A_2^T\theta_2\xi})\right)x, \qquad \xi \in [0,1].$$

Произведем для квадратических форм отрицательно определенной матрицы

$$-Q = \sum_{k=1}^{l-1}\frac{1}{k!}\sum_{j=0}^{k}C_k^j(\theta_1^k A_1^{k-j}X(A_1^T)^j + (-1)^{k+1}\theta_2^k A_2^{k-j}X(A_2^T)^j)$$

и остаточного члена

$$R = \frac{1}{l!}(\theta_1^l e^{A_1\theta_1\xi}P_1^l X e^{A_1^T\theta_1\xi} + (-1)^{l+1}\theta_2^l e^{-A_2\theta_2\xi}P_2^l X e^{-A_2^T\theta_2\xi})$$

следующие оценки:

$$x^T(-Q)x \leqslant \lambda_{\max}(-Q)\cdot\|x\|^2 = -\lambda_{\min}(Q)\cdot\|x\|^2. \tag{4}$$

Для оценки квадратической формы остаточного члена $R$ воспользуемся неравенством Коши–Буняковского:

$$x^T R x = \langle Rx, x\rangle \leqslant \|Rx\|\cdot\|x\| \leqslant \|R\|\cdot\|x\|^2. \tag{5}$$

Из выражений (4), (5) получаем

$$x^T R x - x^T Q x \leqslant (\|R\| - \lambda_{\min}(Q))\|x\|^2.$$

Понятно, что неравенство $\|R\| - \lambda_{\min}(Q) < 0$ влечет за собой

$$x^T R x - x^T Q x < 0.$$

Т. е. если

$$\|R\| \leqslant \frac{1}{l!}((2\theta_1\|A_1\|)^l e^{2\theta_1\|A_1\|\xi} + (2\theta_2\|A_2\|)^l e^{2\theta_2\|A_2\|\xi})\|X\| \leqslant$$

$$\leqslant \frac{1}{l!}((2\theta_1\|A_1\|)^l e^{2\theta_1\|A_1\|} + (2\theta_2\|A_2\|)^l e^{2\theta_2\|A_2\|})\|X\| < \lambda_{\min}(Q),$$

$\xi \in [0,1]$, то квадратическая форма матрицы $e^{P_1\theta_1}X - e^{-P_2\theta_2}X$ отрицательная. Отсюда следует $e^{P_1\theta_1}X - e^{-P_2\theta_2}X \overset{\mathcal{K}}{<} 0$, или $\Psi\widetilde{X} \overset{\mathcal{K}}{<} \widetilde{X}$. Тогда, согласно [11] линейная система дифференциальных уравнений (1) асимптотически устойчивая. Теорема доказана.

Следует отметить, что в зависимости от используемых нами оценок для нормы остаточного члена $R$, мы будем получать и новые достаточные условия асимптотической устойчивости линейной системы дифференциальных уравнений. Например, используя оценку Гельфанда–Шилова

$$\|e^{Ch}\| \leqslant e^{\gamma h}\sum_{k=0}^{n-1}\frac{(2h\|C\|)^k}{k!}, \qquad \gamma = \max \operatorname{Re}\lambda_i(C),$$

получим следующие результаты.

**Теорема 3.** *Если линейная система* (1) *такова, что для заданной симметричной положительно определенной матрицы $Q$ линейное матричное уравнение*

$$\sum_{k=1}^{l-1}\frac{1}{k!}\sum_{j=0}^{k} C_k^j(\theta_1^k A_1^{k-j}X(A_1^T)^j + (-1)^{k+1}\theta_2^k A_2^{k-j}X(A_2^T)^j) = -Q$$

*имеет положительно определенное решение $X$, удовлетворяющее неравенствам*

$$\frac{1}{l!}\left((2\theta_1\|A_1\|)^l e^{2\alpha_1\theta_1}\left(\sum_{k=0}^{n-1}\frac{(2\theta_1\|A_1\|)^k}{k!}\right)^2 + (2\theta_2\|A_2\|)^l e^{2\alpha_2\theta_2}\left(\sum_{k=0}^{n-1}\frac{(2\theta_2\|A_2\|)^k}{k!}\right)^2\right)\|X\| <$$

$$< \lambda_{\min}(Q), \qquad \text{если} \qquad \alpha_1 > 0, \qquad \alpha_2 > 0,$$

$$\frac{1}{l!}\left((2\theta_1\|A_1\|)^l e^{2\alpha_1\theta_1}\left(\sum_{k=0}^{n-1}\frac{(2\theta_1\|A_1\|)^k}{k!}\right)^2 + (2\theta_2\|A_2\|)^l \left(\sum_{k=0}^{n-1}\frac{(2\theta_2\|A_2\|)^k}{k!}\right)^2\right)\|X\| <$$

$$< \lambda_{\min}(Q), \qquad \text{если} \qquad \alpha_1 > 0, \qquad \alpha_2 < 0,$$

$$\frac{1}{l!}\left((2\theta_1\|A_1\|)^l \left(\sum_{k=0}^{n-1}\frac{(2\theta_1\|A_1\|)^k}{k!}\right)^2 + (2\theta_2\|A_2\|)^l e^{2\alpha_2\theta_2}\left(\sum_{k=0}^{n-1}\frac{(2\theta_2\|A_2\|)^k}{k!}\right)^2\right)\|X\| <$$

$$< \lambda_{\min}(Q), \qquad \text{если} \qquad \alpha_1 < 0, \qquad \alpha_2 > 0,$$

$$\frac{1}{l!}\left((2\theta_1\|A_1\|)^l \left(\sum_{k=0}^{n-1}\frac{(2\theta_1\|A_1\|)^k}{k!}\right)^2 + (2\theta_2\|A_2\|)^l \left(\sum_{k=0}^{n-1}\frac{(2\theta_2\|A_2\|)^k}{k!}\right)^2\right)\|X\| <$$

$$< \lambda_{\min}(Q), \qquad \text{если} \qquad \alpha_1 < 0, \qquad \alpha_2 < 0,$$

*где $\alpha_1 = \max \operatorname{Re}\lambda_i(A_1)$, $\alpha_2 = -\min \operatorname{Re}\lambda_i(A_2)$, то система* (1) *асимптотически устойчива.*

1. *Boyd S., El Ghaoui L., Feron E., Balakrishnan V.* Linear Matrix Inequalities in System and Control Theory // Studies in Applied Mathematics. Vol. 15. – Philadelphia, PA: 1994. – 193 p.
2. *Siljak D. D., Stipanovic D. M.* Robust stabilization of nonlinear systems: the LMI approach // Math. Probl. Eng. – 2000. – **6**. – P. 461–493.
3. *Слынько В. И.* Линейные матричные неравенства и устойчивость движения импульсных систем // Доп. НАН України. – 2008. – № 4. – С. 68–71.
4. *Демидович Б. П.* Лекции по математической теории устойчивости. – Москва: Наука, 1967. – 472 с.
5. *Zhai G., Hu Bo, Yasuda K., Michel A.* Piecewise Lyapunov functions for switched systems with average dwell time // Asian J. Control. – 2000. – **2**, No 3. – P. 192–197.
6. *Красносельский М. А., Лифшиц Е. А., Соболев В. И.* Позитивные линейные системы. – Москва: Наука, 1985. – 256 с.
7. *Груйич Л. Т., Мартынюк А. А., Риббенс-Павелла М.* Устойчивость крупномасштабных систем при структурных и сингулярных возмущениях. – Киев: Наук. думка, 1984. – 308 с.
8. *Постников Н. С., Сабаев Е. Ф.* Матричные системы сравнения и их приложения к задачам автоматического регулирования // Автоматика и телемеханика. – 1981. – **42**, № 3. – С. 24–34.
9. *Michel A. N., Wang K., Hu B.* Qualitative theory of dynamical systems. – New York: Marcel Dekker, 2001. – 707 p.
10. *Двирный А. И., Слынько В. И.* Об устойчивости линейных импульсных систем относительно конуса // Доп. НАН України. – 2004. – № 4. – С. 42–48.
11. *Бабенко С. В., Двирный А. И.* Устойчивость линейных систем обыкновенных дифференциальных уравнений с кусочно-постоянными коэффициентами // Там само. – 2009. – № 2. – С. 7–10.

*Академия пожарной безопасности*
*им. Героев Чернобыля, Черкассы*

*Поступило в редакцию 15.07.2008*

**S. V. Babenko, A. I. Dvirny**

## Linear matrix inequalities and stability of the systems of differential equations with piecewise constant coefficients

*The sufficient conditions of the asymptotic Lyapunov's stability for a linear system of differential equations with piecewise constant coefficients are derived. The method of linear matrix inequalities is used.*