УДК 621.391:517.518:510.52

О. М. Литвин, О. П. Нечуйвітер

Наближене обчислення коефіцієнтів Фур'є функцій трьох змінних з використанням сплайн-інтерфлетації на класі диференційовних функцій

(Представлено академіком НАН України І. В. Сергієнком)

Досліджуються кубатурні формули обчислення коефіцієнтів Фур'є функцій трьох змінних з використанням сплайн-інтерфлетації на класі диференційовних функцій. Інформацію про функцію задано її слідами на системі взаємно перпендикулярних площин, ліній та значеннями функції у вузлових точках. Отримано оцінки похибки кубатурних формул.

Сучасні задачі цифрової обробки сигналів потребують розв'язку за допомогою інформаційних операторів різних типів. Це пов'язано з тим, що як дані можуть виступати значення функції у вузлових точках, сліди функції на лініях або площинах, інтеграли від наближуваної функції вздовж вибраної системи ліній або площин, що перетинають досліджуваний об'єкт. Ефективним у розв'язанні таких задач став апарат інтерлінації та інтерфлетації функцій [1]. Зокрема, в [2] викладено загальний підхід до побудови операторів фінітного тривимірного дискретно-неперервного перетворення Фур'є на основі методу Файлона, трилінійних сплайнів (лінійних за кожною змінною) та сплайн-інтерфлетації на класі диференційовних функцій у випадку, коли задано значення функції у вузлах. В [3, 4] наведено алгоритм для отримання більш точної оцінки похибки наближення 3D коефіцієнтів Фур'є кубатурними формулами, що в своїй побудові використовують оператори сплайн-інтерфлетації.

Метою даної роботи є наведення та дослідження кубатурних формул наближеного обчислення 3D коефіцієнтів Фур'є у випадках, коли як дані задано значення функції у вузлах, сліди функції на системі взаємно перпендикулярних ліній, системі взаємно перпендикулярних площин на класі дійсних функцій трьох змінних, визначених на $G = [0,1]^3$ і таких, що $|f^{(r,0,0)}(x,y,z)| \leqslant M$, $|f^{(0,r,0)}(x,y,z)| \leqslant M$, $|f^{(0,0,r)}(x,y,z)| \leqslant M$, $|f^{(r,r,0)}(x,y,z)| \leqslant \overline{M}$, $|f^{(r,0,r)}(x,y,z)| \leqslant \overline{M}$, $|f^{(0,r,r)}(x,y,z)| \leqslant \overline{M}$, $|f^{(r,r,r)}(x,y,z)| \leqslant \widetilde{M}$, $r = 1,2$. Для досягнення мети поставлено таку задачу: побудувати кубатурні формули наближеного обчислення 3D коефіцієнтів Фур'є, зокрема для

$$I_1^3(m,n,p) = \int\limits_0^1\int\limits_0^1\int\limits_0^1 f(x,y,z)\sin 2\pi mx \sin 2\pi ny \sin 2\pi pz dxdydz,$$

на основі сплайн-інтерфлетації функцій у випадку різних інформаційних операторів; отримати оцінку похибки наближення запропонованих кубатурних формул.

Введемо позначення

$$h_{10}(x) = \begin{cases} \dfrac{x-x_1}{-\Delta}, & x_0 \leqslant x < x_1, \\ 0, & x \geqslant x_1, \end{cases} \qquad h_{1\ell}(x) = \begin{cases} 0, & x \leqslant x_{\ell-1}, \\ \dfrac{x-x_{\ell-1}}{\Delta}, & x_{\ell-1} < x \leqslant x_\ell, \end{cases}$$

$$h_{1k}(x)=\begin{cases}0, & x\leqslant x_{k-1},\\ \dfrac{x-x_{k-1}}{\Delta}, & x_{k-1}<x<x_k,\\ \dfrac{x-x_{k+1}}{-\Delta}, & x_k\leqslant x<x_{k+1},\\ 0, & x\geqslant x_{k+1},\end{cases}\qquad k=\overline{1,\ell-1},\qquad x_k=k\Delta,\qquad \Delta=\frac{1}{\ell},$$

$$\widetilde{h}_{10}(x)=\begin{cases}\dfrac{x-\widetilde{x}_1}{-\Delta_1}, & \widetilde{x}_0\leqslant x<\widetilde{x}_1,\\ 0, & x\geqslant \widetilde{x}_1,\end{cases}\qquad \widetilde{h}_{1\ell^{3/2}}(x)=\begin{cases}0, & x\leqslant \widetilde{x}_{\ell^{3/2}-1},\\ \dfrac{x-\widetilde{x}_{\ell^{3/2}-1}}{\Delta}, & \widetilde{x}_{\ell^{3/2}-1}<x\leqslant \widetilde{x}_{\ell^{3/2}},\end{cases}$$

$$\widetilde{h}_{1\widetilde{k}}(x)=\begin{cases}0, & x\leqslant \widetilde{x}_{\widetilde{k}-1},\\ \dfrac{x-\widetilde{x}_{\widetilde{k}-1}}{\Delta_1}, & \widetilde{x}_{\widetilde{k}-1}<x<\widetilde{x}_{\widetilde{k}},\\ \dfrac{x-\widetilde{x}_{\widetilde{k}+1}}{-\Delta_1}, & \widetilde{x}_{\widetilde{k}}\leqslant x<\widetilde{x}_{\widetilde{k}+1},\\ 0, & x\geqslant \widetilde{x}_{\widetilde{k}+1},\end{cases}\qquad \widetilde{k}=\overline{1,\ell^{3/2}-1},\quad \widetilde{x}_{\widetilde{k}}=\widetilde{k}\Delta_1,\quad \Delta_1=\frac{1}{\ell^{3/2}},$$

$$\overline{h}_{10}(x)=\begin{cases}\dfrac{x-\overline{x}_1}{-\Delta_2}, & \overline{x}_0\leqslant x<\overline{x}_1,\\ 0, & x\geqslant \overline{x}_1,\end{cases}\qquad \overline{h}_{1\ell^3}(x)=\begin{cases}0, & x\leqslant \overline{x}_{\ell^3-1},\\ \dfrac{x-\overline{x}_{\ell^3-1}}{\Delta_2}, & \overline{x}_{\ell^3-1}<x\leqslant \overline{x}_{\ell^3},\end{cases}$$

$$\overline{h}_{1\overline{k}}(x)=\begin{cases}0, & x\leqslant \overline{x}_{\overline{k}-1},\\ \dfrac{x-\overline{x}_{\overline{k}-1}}{\Delta_2}, & \overline{x}_{\overline{k}-1}<x<\overline{x}_{\overline{k}},\\ \dfrac{x-\overline{x}_{\overline{k}+1}}{-\Delta_2}, & \overline{x}_{\overline{k}}\leqslant x<\overline{x}_{\overline{k}+1},\\ 0, & x\geqslant \overline{x}_{\overline{k}+1},\end{cases}\qquad \overline{k}=\overline{1,\ell^3-1},\qquad \overline{x}_{\overline{k}}=\overline{k}\Delta_2,\qquad \Delta_2=\frac{1}{\ell^3}.$$

Аналогічно визначаються функції

1) $h_{2j}(y)$, $j=\overline{0,\ell}$, $h_{3s}(z)$, $s=\overline{0,\ell}$, $y_j=j\Delta$, $z_s=s\Delta$, $\Delta=1/\ell$;

2) $\widetilde{h}_{2\widetilde{j}}(y)$ $\widetilde{j}=\overline{0,\ell^{3/2}}$, $\widetilde{h}_{3\widetilde{s}}(z)$, $\widetilde{s}=\overline{0,\ell^{3/2}}$, $\widetilde{y}_{\widetilde{j}}=\widetilde{j}\Delta_1$, $\widetilde{z}_{\widetilde{s}}=\widetilde{j}\Delta_1$, $\Delta_1=1/\ell^{3/2}$;

3) $\overline{h}_{2\overline{j}}(y)$ $\overline{j}=\overline{0,\ell^3}$, $\overline{h}_{3\overline{s}}(z)$, $\overline{s}=\overline{0,\ell^3}$, $\overline{y}_{\overline{j}}=\overline{j}\Delta_2$, $\overline{z}_{\overline{s}}=\overline{s}\Delta_2$, $\Delta_2=1/\ell^3$.

Розглянемо оператори

$$O_1f(x,y,z)=\sum_{k=0}^{\ell}f(x_k,y,z)h_{1k}(x),\qquad O_2f(x,y,z)=\sum_{j=0}^{\ell}f(x,y_j,z)h_{2j}(y),$$

$$O_3f(x,y,z)=\sum_{s=0}^{\ell}f(x,y,z_s)h_{3s}(z),\qquad \widetilde{O}_1f(x,y,z)=\sum_{\widetilde{k}=0}^{\ell^{3/2}}f(\widetilde{x}_{\widetilde{k}},y,z)h_{1\widetilde{k}}(x),$$

$$\widetilde{O}_2f(x,y,z)=\sum_{\widetilde{j}=0}^{\ell^{3/2}}f(x,\widetilde{y}_{\widetilde{j}},z)\widetilde{h}_{2\widetilde{j}}(y),\qquad \widetilde{O}_3f(x,y,z)=\sum_{\widetilde{s}=0}^{\ell^{3/2}}f(x,y,\widetilde{z}_{\widetilde{s}})\widetilde{h}_{3\widetilde{s}}(z),$$

$$\overline{O}_1 f(x,y,z) = \sum_{\overline{k}=0}^{\ell^3} f(\overline{x}_{\overline{k}}, y, z) h_{1\overline{k}}(x), \qquad \overline{O}_2 f(x,y,z) = \sum_{\overline{j}=0}^{\ell^3} f(x, \overline{y}_{\overline{j}}, z) \overline{h}_{2\overline{j}}(y),$$

$$\overline{O}_3 f(x,y,z) = \sum_{\overline{s}=0}^{\ell^3} f(x, y, \overline{z}_{\overline{s}}) \overline{h}_{3\overline{s}}(z).$$

Означення 1. Під слідом функції $f(x,y,z)$ на лініях розуміємо

$$f(x_k, y_j, z), \qquad 0 \leqslant z \leqslant 1, \qquad f(x_k, y, z_s), \qquad 0 \leqslant y \leqslant 1, \qquad f(x, y_j, z_s), \qquad 0 \leqslant x \leqslant 1.$$

Означення 2. Під слідом функції $f(x,y,z)$ на площинах розуміємо

$$f(x_k, y, z), \qquad 0 \leqslant y \leqslant 1, \qquad 0 \leqslant z \leqslant 1, \qquad f(x, y_j, z), \qquad 0 \leqslant x \leqslant 1, \qquad 0 \leqslant z \leqslant 1,$$
$$f(x, y, z_s), \qquad 0 \leqslant x \leqslant 1, \qquad 0 \leqslant y \leqslant 1.$$

Лема 1 [1]. *Оператор сплайн-інтерфлетації*

$$Of(x,y,z) = O_1 f(x,y,z) + O_2 f(x,y,z) + O_3 f(x,y,z) - O_1 O_2 f(x,y,z) -$$
$$- O_2 O_3 f(x,y,z) - O_1 O_3 f(x,y,z) + O_1 O_2 O_3 f(x,y,z)$$

має властивість $|f(x,y,z) - Of(x,y,z)| = O(1/\ell^{3r})$.

Лема 2 [1]. *Оператор сплайн-інтерлінації, побудований на основі інтерфлетації*

$$\widetilde{O} f(x,y,z) = O_1 \widetilde{O}_2 f(x,y,z) + O_1 \widetilde{O}_3 f(x,y,z) - O_1 \widetilde{O}_2 \widetilde{O}_3 f(x,y,z) + O_2 \widetilde{O}_1 f(x,y,z) +$$
$$+ O_2 \widetilde{O}_3 f(x,y,z) - O_2 \widetilde{O}_1 \widetilde{O}_3 f(x,y,z) + O_3 \widetilde{O}_1 f(x,y,z) + O_3 \widetilde{O}_2 f(x,y,z) -$$
$$- O_3 \widetilde{O}_1 \widetilde{O}_2 f(x,y,z) - O_1 O_2 f(x,y,z) - O_1 O_3 f(x,y,z) - O_2 O_3 f(x,y,z) +$$
$$+ O_1 O_2 O_3 f(x,y,z),$$

має властивість $|f(x,y,z) - \widetilde{O} f(x,y,z)| = O(1/\ell^{3r})$.

Лема 3 [1]. *Оператор сплайн-інтерполяції, побудований на основі інтерфлетації*

$$\overline{O} f(x,y,z) = O_1 \widetilde{O}_2 \overline{O}_3 f(x,y,z) + O_1 \widetilde{O}_3 \overline{O}_2 f(x,y,z) - O_1 \widetilde{O}_2 \widetilde{O}_3 f(x,y,z) +$$
$$+ O_2 \widetilde{O}_1 \overline{O}_3 f(x,y,z) + O_2 \widetilde{O}_3 \overline{O}_1 f(x,y,z) - O_2 \widetilde{O}_1 \widetilde{O}_3 f(x,y,z) + O_3 \widetilde{O}_1 \overline{O}_2 f(x,y,z) +$$
$$+ O_3 \widetilde{O}_2 \overline{O}_1 f(x,y,z) - O_3 \widetilde{O}_1 \widetilde{O}_2 f(x,y,z) - O_1 O_2 \overline{O}_3 f(x,y,z) - O_1 O_3 \overline{O}_2 f(x,y,z) -$$
$$- O_2 O_3 \overline{O}_1 f(x,y,z) + O_1 O_2 O_3 f(x,y,z),$$

має властивість $|f(x,y,z) - \overline{O} f(x,y,z)| = O(1/\ell^{3r})$.

Нехай

$$G_{1k}(x,\xi,r) = \begin{cases} \dfrac{x_{k+1} - x}{x_{k+1} - x_k} \dfrac{(x_k - \xi)^{r-1}}{(r-1)!}, & x_k < \xi < x, \\[2ex] \dfrac{x_k - x}{x_{k+1} - x_k} \dfrac{(x_{k+1} - \xi)^{r-1}}{(r-1)!}, & x < \xi < x_{k+1}, \end{cases}$$

$$\widetilde{G}_{1\widetilde{k}}(x,\xi,r)=\begin{cases}\dfrac{\widetilde{x}_{\widetilde{k}+1}-x}{\widetilde{x}_{\widetilde{k}+1}-\widetilde{x}_{\widetilde{k}}}\dfrac{(\widetilde{x}_{\widetilde{k}}-\xi)^{r-1}}{(r-1)!}, & \widetilde{x}_{\widetilde{k}}<\xi<x,\\ \dfrac{\widetilde{x}_{\widetilde{k}}-x}{\widetilde{x}_{\widetilde{k}+1}-\widetilde{x}_{\widetilde{k}}}\dfrac{(x_{k+1}-\xi)^{r-1}}{(r-1)!}, & x<\xi<\widetilde{x}_{\widetilde{k}+1},\end{cases}$$

$$\overline{G}_{1\overline{k}}(x,\xi,r)=\begin{cases}\dfrac{\overline{x}_{\overline{k}+1}-x}{\overline{x}_{\overline{k}+1}-\overline{x}_{\overline{k}}}\dfrac{(\overline{x}_{\overline{k}}-\xi)^{r-1}}{(r-1)!}, & \overline{x}_{\overline{k}}<\xi<x,\\ \dfrac{\overline{x}_{\overline{k}}-x}{\overline{x}_{\overline{k}+1}-\overline{x}_{\overline{k}}}\dfrac{(\overline{x}_{\overline{k}+1}-\xi)^{r-1}}{(r-1)!}, & x<\xi<\overline{x}_{\overline{k}+1},\end{cases}$$

а функції $G_{2j}(y,\eta,r)$, $\widetilde{G}_{2\widetilde{j}}(y,\eta,r)$, $\overline{G}_{2\overline{j}}(y,\eta,r)$, $G_{3s}(z,\varsigma,r)$, $\widetilde{G}_{3\widetilde{s}}(z,\varsigma,r)$, $\overline{G}_{3\overline{s}}(z,\varsigma,r)$, $r=1,2$, визначаються аналогічно.

Лема 4 [1]. *Справедливі такі рівності:*

1) $f(x,y,z)-Of(x,y,z)=$

$$=\int\limits_{x_k}^{x_{k+1}}\int\limits_{y_j}^{y_{j+1}}\int\limits_{z_s}^{z_{s+1}}f^{(r,r,r)}(\xi,\eta,\varsigma)G_{1k}(x,\xi,r)G_{2j}(y,\eta,r)G_{3s}(x,\varsigma,r)d\xi d\eta d\zeta;$$

2) $(O_1-O_1\widetilde{O}_2-O_1\widetilde{O}_3+O_1\widetilde{O}_2\widetilde{O}_3)f(x,y,z)=$

$$=\int\limits_{\widetilde{y}_{\widetilde{j}}}^{\widetilde{y}_{\widetilde{j}+1}}\int\limits_{\widetilde{z}_{\widetilde{s}}}^{\widetilde{z}_{\widetilde{s}+1}}f^{(0,r,r)}(x_k,\eta,\zeta)\widetilde{G}_{2_{\widetilde{j}}}(y,\eta,r)\widetilde{G}_{3\widetilde{s}}(z,\zeta,r)d\eta d\zeta;$$

3) $$(O_1O_2-O_1O_2\overline{O}_3)f(x,y,z)=\int\limits_{\overline{x}_{\overline{k}}}^{\overline{x}_{\overline{k}+1}}f^{(r,0,0)}(\xi,y_j,\widetilde{z}_{\widetilde{s}})\overline{G}_{1\overline{k}}(x,\xi,r)d\xi.$$

Лема 5 [5]. *Справедливі такі нерівності:*

$$\int\limits_{x_k}^{x_{k+1}}\int\limits_{x_k}^{x_{k+1}}|G_1(x,\xi,r)|d\xi dx\leqslant\frac{2\Delta^{r+1}}{(r+2)!},\qquad \int\limits_{y_j}^{y_{j+1}}\int\limits_{y_j}^{y_{j+1}}|G_{2j}(y,\eta,r)|d\eta dy\leqslant\frac{2\Delta^{r+1}}{(r+2)!},$$

$$\int\limits_{z_s}^{z_{s+1}}\int\limits_{z_s}^{z_{s+1}}|G_{3s}(z,\varsigma,r)|d\varsigma dz\leqslant\frac{2\Delta^{r+1}}{(r+2)!}.$$

Для обчислення інтегралу $I_1^3(m,n,p)$ у випадку, коли відомі сліди функції на системі перпендикулярних площин, пропонується формула

$$\Phi_1^3(m,n,p)=\int\limits_0^1\int\limits_0^1\int\limits_0^1 Of(x,y,z)\sin 2\pi mx\sin 2\pi ny\sin 2\pi pzdxdydz.$$

Теорема 1. *Для кубатурної формули* $\Phi_1^3(m,n,p)$ *обчислення* $I_1^3(m,n,p)$ *справедлива оцінка*

$$|I_1^3(m,n,p)-\Phi_1^3(m,n,p)|\leqslant\frac{8\widetilde{M}}{[(r+2)!]^3\ell^{3r}}.$$

Якщо ж відомі сліди функції на системі взаємно перпендикулярних ліній, то для обчислення інтегралу $I_1^3(m,n,p)$ *слід використовувати формулу*

$$\widetilde{\Phi}_1^3(m,n,p)=\int_0^1\int_0^1\int_0^1\widetilde{O}f(x,y,z)\sin 2\pi mx\sin 2\pi ny\sin 2\pi pz dxdydz.$$

Теорема 2. *Для кубатурної формули* $\widetilde{\Phi}_1^3(m,n,p)$ *обчислення* $I_1^3(m,n,p)$ *справедлива така оцінка:*

$$|I_1^3(m,n,p)-\widetilde{\Phi}_1^3(m,n,p)|\leqslant\left(\frac{8\widetilde{M}}{[(r+2)!]^3}+\frac{12\overline{M}}{[(r+2)!]^2}\right)\frac{1}{\ell^{3r}}.$$

У випадку, коли відомі значеннях функції у вузлах, для обчислення інтегралу $I_1^3(m,n,p)$ побудовано формулу

$$\overline{\Phi}_1^3(m,n,p)=\int_0^1\int_0^1\int_0^1\overline{O}f(x,y,z)\sin 2\pi mx\sin 2\pi ny\sin 2\pi pz dxdydz.$$

Теорема 3. *Для кубатурної формули* $\overline{\Phi}_1^3(m,n,p)$ *обчислення* $I_1^3(m,n,p)$ *справедлива оцінка*

$$|I_1^3(m,n,p)-\overline{\Phi}_1^3(m,n,p)|\leqslant\left(\frac{8\widetilde{M}}{[(r+2)!]^3}+\frac{12\overline{M}}{[(r+2)!]^2}+\frac{18M}{(r+2)!}\right)\frac{1}{\ell^{3r}}.$$

Таким чином, в роботі пропонуються та досліджуються кубатурні формули обчислення 3D коефіцієнтів Фур'є з використанням операторів сплайн-інтерфлетації на деякому класі диференційовних функцій. Інформацію про функцію задано слідами на системі взаємно перпендикулярних площин, слідами на системі взаємно перпендикулярних ліній та значеннями функції у вузлових точках. У всіх випадках одержано оцінку похибки наближення 3D коефіцієнтів Фур'є кубатурними формулами. Питання якості кубатурних формул, тобто чи побудовані кубатурні формули є оптимальними або близькими до них, буде наступним етапом досліджень.

1. *Литвин О. М.* Інтерлінація функцій та деякі її застосування. – Харків: Основа, 2002. – 544 с.
2. *Литвин О. М., Удовиченко В. М.* Тривимірні фінітні перетворення Фур'є та Хартлі з використанням інтерфлетації функцій // Вестн. НТУ "ХПИ". Сб. науч. тр. Темат. вып. "Автоматика и приборостроение, 38' 2005". – Харьков, 2005. – С. 90–130.
3. *Литвин О. М., Гулік Л. І.* Інтерфлетація функцій при розв'язуванні тривимірної задачі теплопровідності. – Київ: Наук. думка, 2011. – 210 с.
4. *Нечуйвітер О. П.* Про похибку наближеного обчислення 3 D коефіцієнтів Фур'є кубатурними формулами з використанням інтерполянта, побудованого на основі сплайн-інтерфлетанта // Пр. міжнар. молод. мат. шк. "Питання оптимізації обчислень (ПОО-XXXVII)". – Київ: Ін-т кібернетики ім. В. М. Глушкова НАН України, 2011. – С. 133.

5. *Литвин О. М., Нечуйвітер О. П.* Кубатурна формула для обчислення 2D коефіцієнтів Фур'є з використанням інтерлінації функцій // Вісн. Харк. нац. ун-ту ім. В. Н. Каразіна. Зб. наук. пр. Сер. Мат. моделювання. Інформ. технології. Автоматиз. системи управління. – 2010. – № 926. – С. 153–160.

Українська інженерно-педагогічна академія, Харків *Надійшло до редакції 24.11.2011*

О. Н. Литвин, О. П. Нечуйвитер

Приближенное вычисление коэффициентов Фурье функций трех переменных с использованием сплайн-интерфлетации на классе дифференцированных функций

Исследуются кубатурные формулы вычисления коэффициентов Фурье функций трех переменных с использованием сплайн-интерфлетации на классе дифференцируемых функций. Информация о функции задана ее следами на системе взаимно перпендикулярных плоскостей и линий и значениями функции в узловых точках. Получены оценки погрешности кубатурных формул.

O. N. Lytvyn, O. P. Nechuiviter

The approximate calculation of 3D Fourier coefficients of the functions of three variables by using the spline-interflatation on a class of differentiable functions

With the use of the spline-interflatation on a class of differentiable functions, the cubature formulas for Fourier coefficients of the functions of three variables are studied. The information about a function is set by its traces on a system of mutually perpendicular planes and lines, as well as by the values of the function at knots. The estimates of errors of the cubature formulas are obtained.