УДК 519.6

Б. М. Подлевський, В. В. Хлобистов

Градієнтний метод розв'язування нелінійних багатопараметричних спектральних задач

(Представлено академіком НАН України В. Л. Макаровим)

Нелінійній багатопараметричній спектральній задачі у дійсному евклідовому просторі ставиться у відповідність варіаційна задача на мінімум деякого функціонала. Доведено еквівалентність спектральної та варіаційної задач. На базі градієнтної процедури запропоновано чисельний алгоритм знаходження її власних значень та власних векторів. Доведено локальну збіжність та оцінки швидкості збіжності алгоритму.

Узагальнена спектральна задача $T(\lambda)x = 0$ з операторнозначною функцією $T(\lambda)\colon \mathbb{R}^m \to \to X(H)$ ($X(H)$ — множина лінійних операторів, що діють у деякому гільбертовому просторі H), яка лінійно або нелінійно залежить від декількох спектральних параметрів λ_1, λ_2, $\ldots$, λ_m, виникає у багатьох областях аналізу та математичної фізики.

Різні постановки таких задач, відповідна спектральна теорія, застосування та деякі чисельні методи їх розв'язування є предметом дослідження, наприклад, у роботах [1–10].

У даній роботі розглядається нелінійна за спектральними параметрами багатопараметрична задача на власні значення вигляду

$$T(\lambda)x = 0, \qquad x \in E^n, \qquad x \neq 0 \tag{1}$$

в дійсному евклідовому просторі E^n, усі скалярні параметри якої $\lambda = (\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_m) \in E^m$ спектральні.

Такі задачі є ще малодослідженими як з теоретичної точки зору (на відміну від лінійних слабкозв'язних багатопараметричних спектральних задач, для яких розроблена спектральна теорія [2, 8, 10], та низка чисельних методів [1, 3, 9]), так і з точки зору побудови чисельних методів їх розв'язування.

У даній роботі пропонується варіаційний підхід, який відрізняється від підходу, запропонованого в роботах [3, 5, 6], до розв'язування таких задач, при якому багатопараметрична спектральна задача заміняється еквівалентною варіаційною задачею на мінімум деякого функціонала. В основі чисельного алгоритму мінімізації функціонала пропонується використати градієнтну процедуру та метод Ньютона до розширеної задачі у просторі прямої суми евклідових просторів E^n та E^m. В результаті отримуємо алгоритм знаходження досить простого для обчислення кроку градієнтної ітерації та одночасного визначення власного вектора і набору власних значень.

Власні вектори та власні значення як точки мінімуму. Нехай E^n — дійсний евклідовий простір зі скалярним добутком $(\cdot,\cdot)_{E^n}$ та нормою $\|\cdot\|_{E^n}$, а $T(\lambda)$ — квадратна матриця розмірності $n \times n$, елементи якої нелінійно залежать від параметрів $\lambda_i \in E^1$, $i = 1, \ldots, m$. Нелінійна багатопараметрична задача на власні значення полягає у знаходженні такого набору спектральних параметрів $\lambda^* = (\lambda_1^*, \ldots, \lambda_m^*)$, що існує нетривіальний розв'язок $x^* \neq 0$ рівняння (1). Такий набір спектральних параметрів $\lambda^* = (\lambda_1^*, \ldots, \lambda_m^*)$ назвемо узагальненим власним значенням або власним набором, а відповідний розв'язокx^* — узагальненим власним вектором задачі (1).

Поряд з задачею (1) розглянемо задачу про знаходження такого набору параметрів $\lambda = \{\lambda_1, \ldots, \lambda_m\} \in E^m$ і таких векторів x, на яких функціонал

$$F(u) = \frac{1}{2}\|T(\lambda)x\|^2_{E^n}, \qquad \forall\, u = \{x, \lambda\} \in H = E^n \oplus E^m, \qquad x \neq 0, \tag{2}$$

набуває мінімального значення, тобто

$$F(u) \to \min_u, \qquad u \in U \subset H \qquad (x \neq 0), \tag{3}$$

де U — деяка опукла множина, яка містить точки $u^* = \{x^*, \lambda^*\}$, що задовольняють рівняння (1); H — евклідів простір, у якому скалярний добуток та норма визначаються таким чином:

$$(u, v)_H = (u_1, u_2)_{E^n} + (v_1, v_2)_{E^m}, \qquad \|u\|_H = \sqrt{\|u_1\|^2_{E^n} + \|v_1\|^2_{E^m}},$$
$$u = \{u_1, v_1\}, \qquad v = \{u_2, v_2\}, \qquad u_1, u_2 \in E^n, \qquad v_1, v_2 \in E^m.$$

Множину точок мінімуму $F(u)$ на U будемо позначати через

$$U_* = \{u\colon u \in U, F(u) = 0\}$$

і надалі вважатимемо, що оператор-функція $T(\lambda)$ є двічі диференційовною за Фреше, тобто для будь-якого $\lambda_k \in E^1$, $k = 1, 2, \ldots, m$, існують частинні похідні $\partial T(\lambda)/\partial\lambda_k$, $k = 1, 2, \ldots, m$, та $\partial^2 T(\lambda)/(\partial\lambda_k\partial\lambda_l)$, $k, l = 1, 2, \ldots, m$, та покажемо, що задачі (1) та (3) еквівалентні.

Якщо розглянути приріст функціонала $F(u + \Delta u) - F(u) = F(x + h, \lambda + q) - F(x, \lambda)$ для будь-яких u, $u + \Delta u \in U$, де $\Delta u = \{h, q\} \in U$, то після нескладних викладок отримуємо, що

$$\begin{aligned}
&F(u + \Delta u) - F(u) = F(x + h, \lambda + q) - F(x, \lambda) = \\
&\quad = (T(\lambda)x, T(\lambda)h)_{E^n} + \left(T(\lambda)x, \sum_{i=1}^m \frac{\partial T(\lambda)}{\partial\lambda_i} x q_i\right)_{E^n} + \frac{1}{2}\Bigg\{(T(\lambda)h, T(\lambda)h)_{E^n} + \\
&\qquad + 2\left(T(\lambda)h, \sum_{i=1}^m \frac{\partial T(\lambda)}{\partial\lambda_i} x q_i\right)_{E^n} + \left(\sum_{i=1}^m \frac{\partial T(\lambda)}{\partial\lambda_i} x q_i, \sum_{i=1}^m \frac{\partial T(\lambda)}{\partial\lambda_i} x q_i\right)_{E^n} + \\
&\qquad + 2\left(T(\lambda)x, \sum_{i=1}^m \frac{\partial T(\lambda)}{\partial\lambda_i} h q_i\right)_{E^n} + (T(\lambda)x, d^2T(\lambda, q)x)_{E^n}\Bigg\} + o(\|\Delta u\|^2_H).
\end{aligned} \tag{4}$$

Отже, перший диференціал функціонала (2) набуде вигляду

$$\begin{aligned}
&d\{F(x, \lambda); (h, q)\} = (T(\lambda)x, T(\lambda)h)_{E^n} + \sum_{i=1}^m (T(\lambda)x, B_i(\lambda)x)_{E^n} q_i = \\
&\quad = (T * (\lambda)T(\lambda)x, h)_{E^n} + (f(\lambda, x), q)_{E^m} = (u_g, \Delta u)_H,
\end{aligned} \tag{5}$$

де

$$f(\lambda, x) = (f_1(\lambda, x), f_2(\lambda, x), \ldots, f_m(\lambda, x)),$$

$$f_i(\lambda, x) = (T(\lambda)x, B_i(\lambda)x)_{E^n}, \qquad B_i = \frac{\partial T(\lambda)}{\partial \lambda_i}, \qquad i = 1, 2, \ldots, m.$$

Звідси для градієнта функціонала (2) отримуємо зображення

$$\operatorname{grad} F(u) = \nabla F(u) = u_g =$$
$$= \{(T^*(\lambda)T(\lambda)x, e_1), \ldots, (T^*(\lambda)T(\lambda)x, e_n), f_1(\lambda, x), f_2(\lambda, x), \ldots, f_m(\lambda, x)\},$$

де $e_i \in E^n$ — вектор, i-та координата якого дорівнює 1, а решта — нулі.

Нехай $T(\lambda)x = 0$, $x \neq 0$. Тоді з (5) випливає, що $\nabla F(u) = 0$. Нехай тепер $\nabla F(u) = 0$. Тоді також з (5) маємо

$$T*(\lambda)T(\lambda)x = 0 \Rightarrow (T*(\lambda)T(\lambda)x, x)_{E^n} = 0 \Rightarrow (T(\lambda)x, T(\lambda)x)_{E^n} = 0 \Rightarrow T(\lambda)x = 0,$$

отже справджується таке твердження.

Теорема 1. *Кожний власний вектор x^*, що відповідає власному набору $\lambda^* = (\lambda_1^*, \ldots, \lambda_m^*)$ задачі* (1) *є стаціонарною точкою $u^* = \{x^*, \lambda^*\}$ функціонала* (2) *і, навпаки, кожна стаціонарна точка функціонала* (2) *$u^* = \{x^*, \lambda^*\}$ відповідає власному вектору x^* та власному набору $\lambda^* = (\lambda_1^*, \ldots, \lambda_m^*)$ задачі* (1).

Зауваження. Оскільки $F(u) \geqslant 0$, $F(u*) = 0$, u, $u* \in U$, то кожна стаціонарна точка $u*$ функціонала $F(u)$ є точкою його локального (а також глобального) мінімуму.

Оскільки на множині стаціонарних точок $T(\lambda)x = 0$, то з формули (4) випливає, що

$$d^2\{F(x, \lambda); (h, q)\} = \left\| T(\lambda)h + \sum_{i=1}^{m} B_i x q_i \right\|_{E^n}^2 \geqslant 0,$$

тобто справджується таке твердження.

Лема 1. *Нехай $T(\lambda)$ є двічі диференційовною за Фреше. Тоді функціонал* (2) *є опуклим на множині стаціонарних точок.*

Таким чином, розв'язування задачі (1) еквівалентне знаходженню стаціонарних точок опуклого функціонала (2), які є його точками мінімуму.

Чисельний алгоритм. Цей результат дозволяє побудувати градієнтну процедуру для чисельного розв'язування задачі (3), а отже, і задачі (1) у вигляді

$$u_{k+1} = u_k - \gamma_k \nabla F(u_k), \qquad \gamma_k = \gamma(u_k), \qquad k = 0, 1, 2 \ldots.$$

Величину γ_k на кожному кроці будемо обчислювати за допомогою одного кроку модифікованого методу Ньютона як для скалярного рівняння

$$F(u_k - \gamma_k \nabla F(u_k)) = 0,$$

тобто

$$\gamma_k = \frac{F(u_k)}{(\nabla F(u_0), \nabla F(u_0))_H} = \frac{F(u_k)}{\|\nabla F(u_0)\|_H^2}. \tag{6}$$

Надалі, для спрощення запису, індекс H у позначенні скалярного добутку та норми будемо опускати.

Отже, ітераційний процес запишеться у вигляді

$$u_{k+1} = u_k - \frac{F(u_k)}{\|\nabla F(u_0)\|^2}\nabla F(u_k), \qquad k = 0, 1, 2, \ldots. \tag{7}$$

При виборі початкового наближення, в певному сенсі близького до власного вектора та набору власних значень, ітераційний процес (7) збігається до стаціо-нарної точки функціонала (2) $u^* = \{x^*, \lambda^*\}$, у якій досягається його мінімум, тобто до власного вектора x^* та набору власних значень $\lambda^* = (\lambda_1^*, \ldots, \lambda_m^*)$ задачі (1).

Для цього ітераційного процесу в роботі наведено такі теореми збіжності та оцінки їх швидкості.

Теорема 2. *Нехай виконуються умови леми 1 і градієнт функціонала* (2) *задовольняє умову Ліпшіца*

$$\|\nabla F(u) - \nabla F(z)\| \leqslant L\|u - z\|, \qquad \forall\, u, z \in U, \qquad L > 0.$$

Якщо для деякого початкового наближення $u_0 = (x_0, \lambda^{(0)}) \in U$ *виконується умова*

$$0 < \gamma_0 \equiv \gamma(u_0) \leqslant \frac{1}{L},$$

то ітераційний процес (7) *збігається до точки мінімуму функціонала* (2) $u^* = \{x^*, \lambda^*\}$, *а отже, до власного вектора* x^* *та набору власних значень* $\lambda^* = (\lambda_1^*, \ldots, \lambda_m^*)$ *задачі* (1), *тобто*

$$\lim_{k\to\infty} \rho(u_k, U_*) = \lim_{k\to\infty} \rho(u_k, u^*) = 0, \qquad \lim_{k\to\infty} F(u_k) = F(u^*) = 0, \tag{8}$$

і справджується оцінка

$$F(u_k) \leqslant 2dF(u_0)[2d + \gamma_0 k]^{-1}, \tag{9}$$

де константа $d > 0$ *така, що* $\|u_k - u^*\| \leqslant d$, $k = 0, 1, \ldots$.

Відзначимо, що якщо функціонал буде сильно опуклим, то існує така константа $\delta > 0$, що

$$F(u) - F(v) \geqslant (\nabla F(v), u - v) + \delta\|u - v\|^2, \qquad u, v \in U. \tag{10}$$

Теорема 3. *Нехай виконуються умови теореми 2, а матриця* $T(\lambda)$ *задачі* (1) *така, що функціонал* (2) *є сильно опуклим на множині* U. *Тоді ітераційний процес* (7) *збігається до точки мінімуму функціонала* (2) $u^* = \{x^*, \lambda^*\}$, *а, отже, до власного вектора* x^* *та набору власних значень* $\lambda^* = (\lambda_1^*, \ldots, \lambda_m^*)$ *задачі* (1), *тобто справджуються співвідношення* (8), *а також оцінки*

$$F(u_k) \leqslant F(u_0)[1 + 2\delta\gamma_0 k]^{-1}, \tag{11}$$

$$\|u_k - u^*\|^2 \leqslant F(u_0)[(1 + 2\delta\gamma_0 k)\delta]^{-1}, \qquad k = 0, 1, \ldots, \tag{12}$$

де δ *— константа з нерівності* (10).

Висновки та зауваження. Основне завдання при виборі величини γ_k у процесах мінімізації — це забезпечити виконання нерівності $F(u_{k+1}) < F(u_k)$. Як правило, γ_k, де це можливо, обчислюють одним з методів одновимірної мінімізації функції $F(u_k - \gamma_k \nabla F(u_k))$.

У роботі [11] пропонується вибирати γ_k як найбільше з чисел, що задовольняють нерівність

$$F(u_k) - F(u_k - \gamma_k \nabla F(u_k)) \geqslant q_k \gamma_k \|\nabla F(u_k)\|^2 \tag{13}$$

при деяких $0 < q_k < 1$. У даній роботі задачу одновимірної мінімізації у класичній постановці для визначення кроку γ_k замінено обчисленням γ_k за методом Ньютона для відповідного скалярного рівняння. Це не вимагає великих затрат, оскільки потрібно обчислювати лише значення функціонала у даній точці на кожному кроці, причому вибір γ_k у вигляді (6) задовольняє нерівність (13) для кожного k при $q_k = q = 1/2$. Незважаючи на те, що оцінки точності в [11] для сильно опуклого функціонала є дещо сильнішими від (11), (12), вибір γ_k у вигляді (6) є кращим з огляду на простоту та обчислювальні затрати.

Робота виконана при частковій підтримці ДФФД України № 41.1/022.

1. *Абрамов А. А., Ульянова В. И., Юхно Л. Ф.* Метод решения многопараметрической спектральной задачи для некоторых систем дифференциальных уравнений // Журн. вычислит. матем. и мат. физики. – 2000. – **40**, № 1. – С. 21–29.
2. *Atkinson F. V.* Multiparameter eigenvalue problems. matrices and compact operators. Vol. 1. – New York, London: Academic Press, 1972. – 220 p.
3. *Browne P. J., Sleeman B. D.* A numerical technique for multiparameter eigenvalue problems // IMA J. Numer Anal. – 1982. – **2**(**4**). – P. 451–457.
4. *Khlobystov V. V., Podlevskyi B. M.* Variational approach to solving a class of nonlinear multiparameter spectral problems // Журн. обчисл. та прикл. матем. – 2011. – No 2(105). – С. 44–50.
5. *Khlobystov V. V., Podlevskyi B. M.* Variation-gradient method of the solution of one class of nonlinear multiparameter eigenvalue problems // Там само. – 2009. – No 1(97). – С. 70–78.
6. *Подлевський Б. М.* Варіаційний підхід до розв'язування лінійних багатопараметричних задач на власні значення // Укр. мат. журн. – 2009. – **61**, № 9. – С. 1247–1256.
7. *Подлевский Б. М.* О некоторых нелинейных двухпараметрических спектральных задачах математической физики // Математ. моделирование. – 2010. – **22**, № 5. – С. 131–145.
8. *Sleeman B. D.* Multiparameter spectral theory in Hilbert space. – London, San Francisco, Melbourne: Pitnam Press, 1978. – 128 p.
9. *Slivnik T., Tomšiu G.* A numerical method for the solution of two-parameter eigenvalue problem // J. Comp. Appl. Math. – 1986. – **15**, No 1. – P. 109–115.
10. *Volkmer H.* Multiparameter eigenvalue problems and expansion theorems. – Berlin: Springer, 1988. – 157 p.
11. *Карманов В. Г.* Математическое программирование: Уч. пос. – 5-е изд. – Москва: Физматлит, 2004. – 264 с.

Інститут прикладних проблем механіки і математики ім. Я. С. Підстригача НАН України, Львів

Надійшло до редакції 26.12.2011

Б. М. Подлевский, В. В. Хлобыстов

Градиентный метод решения нелинейных многопараметрических спектральных задач

Нелинейной многопараметрической спектральной задаче в действительном евклидовом пространстве ставится в соответствие вариационная задача на минимум некоторого функционала. Доказана эквивалентность спектральной и вариационной задач. На базе градиентной процедуры предлагается численный алгоритм нахождения ее собственных значений и собственных векторов. Доказана локальная сходимость и оценки скорости сходимости алгоритма.

B. M. Podlevskyi, V. V. Khlobystov

A gradient method for solving the nonlinear multiparameter spectral problems

In a real abstract Hilbert space, the nonlinear multiparameter spectral problem is put in accordance to a variation problem on minimum of some functional. The equivalence of the spectral and variation problems is proved. On the base of a gradient procedure, the numerical algorithm of finding its eigenvalues and the eigenvectors is proposed. The local convergence of the algorithm and the estimation of the rate of its convergence are proved.