УДК 681.32.019.3

В.М. ГРИБОВ*, В.П. СТРЕЛЬНИКОВ**

МОДЕЛИРОВАНИЕ СЛУЧАЙНЫХ ВЕЛИЧИН С ФУНКЦИЕЙ *DN*-РАСПРЕДЕЛЕНИЯ

*Национальный авиационный университет, Киев, Украина
**Институт проблем математических машин и систем НАН Украины, Киев, Украина

Анотація. *Запропоновано генератор випадкових величин у вигляді програми на основі Mathcad, що конвертує рівномірно розподілені числа комп'ютерного датчика в послідовність* DN *-розподілу випадкових чисел. Досліджено характеристики відтворюваності, стабільності, незалежності й швидкодії програмного конвертора.*
Ключові слова: *випадкові числа, конвертування, закон розподілу, вибіркове середнє, відтворюваність, стабільність, незалежність, швидкодія.*

Аннотация. *Предложен генератор случайных величин в виде программы на основе Mathcad, конвертирующей равномерно распределённые числа компьютерного датчика в последовательность* DN *-распределённых случайных чисел. Исследованы характеристики воспроизводимости, стабильности, независимости и быстродействия программного конвертора.*
Ключевые слова: *случайные числа, конвертирование, закон распределения, выборочное среднее, воспроизводимость, стабильность, независимость, быстродействие.*

Abstract. *The generator of random values in the form of programme on the basis of Mathcad, converting regular uniformly distributed numbers of the computer gauge in sequence of the* DN *-distribution random numbers is offered. Characteristics of reproducibility, stability, independence and speedwork of programme converter are investigated.*
Keywords: *random values, conversion, distribution law, the sample mean, reproducibility, stability, independence, speedwork.*

1. Введение

Моделирование можно определить как исследование реально существующих систем, процессов или явлений с целью их познания, изучения, а также для предсказания явлений, интересующих исследователя. В авиации моделирование является одним из эффективных методов управления качеством авиационной техники. Моделирование процесса функционирования проектируемых систем позволяет исследовать с минимальными затратами времени и средств зависимость показателей эффективности и отказоустойчивости авионики как системных свойств перспективных авиационных комплексов бортового оборудования от принимаемых структурных технических решений и сравнить рассматриваемые варианты. По результатам моделирования на этапе проектирования осуществляется целенаправленное достижение заданного уровня указанных показателей за счет изменения технических решений, закладываемых в структуру авионики и обеспечиваемых на этапе производства.

Моделирование процесса эксплуатации авионики и воздушных судов в целом позволяет определить оптимальные параметры и характеристики технического обслуживания, в полной мере реализовать заданные свойства бортового оборудования и обеспечить эффективную работу авиакомпании.

Способ моделирования случайных величин подробно описан в различных источниках, например, в работах [3, 4], авторы которой реализуют описанный подход на алгоритмическом языке программирования, вычисляя функцию нормированного нормального распределения Φ(arg) с помощью полиномиальной аппроксимации. Известно также представление Φ(arg) с помощью степенного ряда [2].

Описанное ниже конвертирование “rnd(1)⇒DN(X)” основано на применении современного информационного системного приложения Mathcad, которое на протяжении многих последних лет является бесспорным лидером в своем классе математического и образовательного программного обеспечения. Как показала практика преподавания в Национальном авиационном университете (г. Киев) учебных дисциплин, связанных с решением задач надёжности и диагностики бортового оборудования, Mathcad предлагает простой и эффективный инструментарий для исследований по данной тематике, в том числе и в задачах имитационного моделирования процессов и систем.

2. Программа-конвертор “rnd(1) ⇒ DN(X)”

При моделировании процессов и систем авионики с целью статистического оценивания её надёжности в качестве случайной величины выбирается время до отказа i-го элемента или время достижения процессом деградации предельного значения, подчиняющегося DN-распределению.

Генератор равномерно распределённых в интервале [0, 1] псевдослучайных чисел задаёт значения вероятности отказа $Q(X,\nu)=F(X,\nu)$. Переход от $F(X,\nu)$ к значениям приведенных наработок до отказа $X=t/\mu$ реализуется на основе уравнения [4]

$$rnd(1)=Q(X,\nu)=F(X,\nu)=\Phi\left(\frac{X-1}{\nu\cdot\sqrt{X}}\right)+\exp\left(\frac{2}{\nu^2}\right)\cdot\Phi\left(-\frac{X+1}{\nu\cdot\sqrt{X}}\right), \tag{1}$$

где $rnd(1)$ – функция обращения к генератору равномерно распределенных чисел;

$F(X,\nu)$ – функция DN-распределения случайной величины X;

μ и ν – известные параметры DN-распределения элемента, смысловое содержание которых подробно изложено в [3].

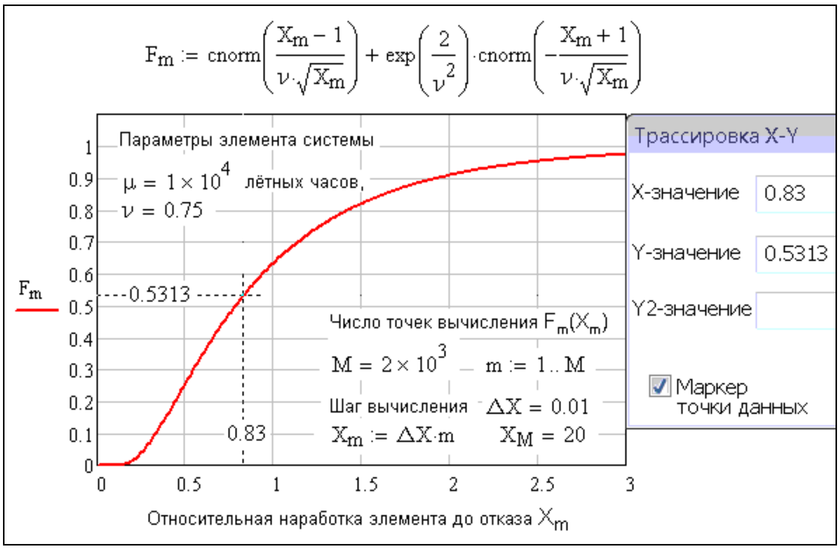


Рис. 1. Иллюстрация к конвертированию в статистическом эксперименте случайного rnd-числа 0,5313 в случайное dn-число $X_m=0{,}83$

Иллюстрация с комментариями, поясняющими конвертацию равномерно распределённого числа $rnd(1)$ в число X, имеющее диффузионное немонотонное распределение, представлена на рис. 1, где в выражении $F(X,\nu)\equiv F_m$ программа Mathcad cnorm(arg) обеспечивает вычисление функции нормированного нормального распределения Φ(arg).

Последовательность, содержащая N. dn-распределенных чисел, реализуется в компьютерной программе-конверторе и приведена на листинге 1.

Листинг 1. Программа-конвертор dn-распределенных чисел

```
dn := | for n ∈ 1..N   - число статистических экспериментов  N = 1 × 10^3
      |   | y ← rnd(1)
      |   | for m ∈ 1..M
      |   |   | F_m ← cnorm((X_m − 1)/(ν·√X_m)) + exp(2/ν^2)·cnorm(−(X_m + 1)/(ν·√X_m))
      |   |   | break if F_m > y
      |   | dn_n ← (X_{m−1} + (y − F_{m−1})/(F_m − F_{m−1} + 10^−100)·ΔX)·μ
      | return dn
```

dn =

	1
989	$1.066\cdot10^4$
990	$1.18\cdot10^4$
991	$9.2\cdot10^3$
992	$1.702\cdot10^4$
993	$8.363\cdot10^3$
994	$9.115\cdot10^3$
995	$7.154\cdot10^3$
996	$5.064\cdot10^3$
997	$6.889\cdot10^3$
998	$1.937\cdot10^4$
999	$7.087\cdot10^3$
1000	...

Входными параметрами программы-конвертора случайных чисел являются математическое ожидание μ и коэффициент вариации ν случайной величины t (наработки до отказа) элемента системы.

Внешний цикл программы $(for\ \ n \in 1..N)$ задаёт объём статистических экспериментов в имитационном моделировании.

Внутренний цикл программы $(for\ \ m \in 1..M)$ обеспечивает последовательное вычисление значений правой части уравнения (1) как функции аргумента X_m с заданным шагом $\Delta X = X_m - X_{m-1}$ и сравнивает полученные результаты F_m с $y \leftarrow rnd\ (1)$; выполнение условия $F_m > y$ останавливает вычисления $(break\ if\ F_m > y)$.

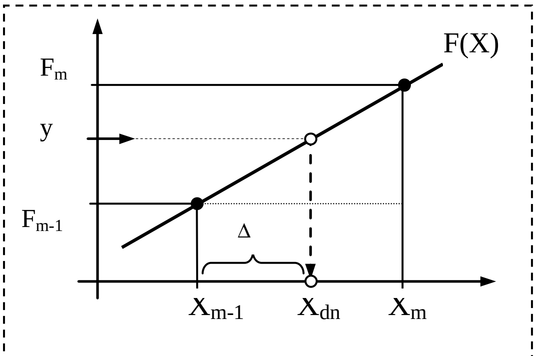


Рис. 2. Схема линейной интерполяции при вычислении X_{dn}

В этом состоянии программы выполняются соотношения

$$F_m > y > F_{m-1} \ \text{ и } \ X_m > X_{dn} > X_{m-1},$$

где X_{dn} – точный результат конвертирования равномерно распределенного числа y в случайное dn-распределённое число.

Точное значение dn-распределённого числа $X_{dn} = X_{m-1} + \Delta$ и находится с помощью линейной интерполяции согласно приведенному на рис. 2 чертежу, где Δ определяется из подобия треугольников.

Интерполяционная формула в программе

$$dn_n \leftarrow \left(X_{m-1} + \frac{y - F_{m-1}}{F_m - F_{m-1} + 10^{-100}} \Delta X \right) \cdot \mu \qquad (2)$$

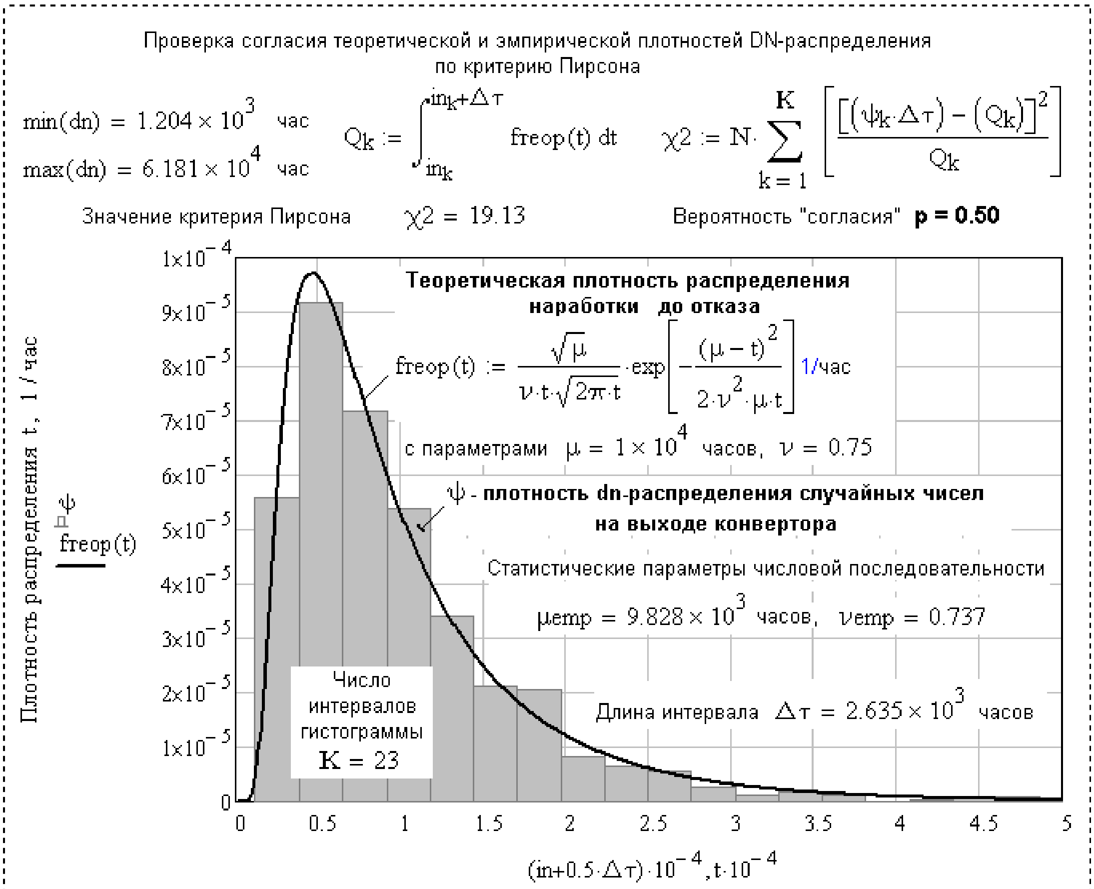
обеспечивает также переход от X_{dn} к абсолютному значению случайной величины $dn \sim t$ путём умножения результата интерполяции (в скобках) на заданное значение μ DN-распределения. Слагаемое 10^{-100} в формуле (2) исключает возможное обнуление знаменателя при малых значениях X в начале вычисления функции распределения $F(X)$. Введение интерполяции позволило увеличить шаг ΔX вычисления функции распределения $F(X)$ без потери точности воспроизведения dn-последовательностей, что в конечном счёте повысило быстродействие конвертора. Рекомендованное значение $\Delta X = 0{,}01$ получено в результате исследования влияния ΔX на точность воспроизведения параметров μ и ν – DN -распределения.

Качество конвертирования оценивалось по критериям воспроизводимости, стабильности, независимости и быстродействия [4].

3. Воспроизводимость конвертора “rnd(1)⇒DN(X)”

Критерий воспроизводимости означает, что статистические моменты формируемой конвертором случайной числовой DN -последовательности должны соответствовать характеристикам распределения отказов исследуемой системы. Иными словами, случайные числа на выходе конвертора (наработки до отказа) должны адекватно воспроизводить во времени “картину” появления отказов в реальной системе. Для проверки воспроизводимости конвертора обычно используют известные статистические критерии согласия (Пирсона, Колмогорова, ω^2 [3]). Процедура количественной оценки воспроизводимости конвертора dn -последовательностей случайных чисел представлена на листинге 2.

Листинг 2. Количественная оценка воспроизводимости конвертора



Значение вероятности $P = 0{,}50$ означает, что расхождения теоретической кривой плотности $f_{теор}(t)$ и гистограммы распределения dn -чисел на выходе конвертора носят исключительно случайный характер, что свидетельствует о высокой воспроизводимости конвертором заданной модели $f(t, \mu, \nu)$ распределения случайных значений величины t – наработки до отказа.

4. Стабильность конвертора “rnd(1)⇒DN(X)”

Критерий стабильности означает, что статистические характеристики dn-последовательностей на выходе конвертора имеют малый разброс при последовательных выборках случайных чисел. Стабильность конвертора оценивалась точностью воспроизведения заданных характеристик распределения при моделировании наработок до отказа в $J = 50$ выборках объёмом $N = 1000$ каждая.

Для получения средних значений и коэффициентов вариации случайных чисел в формируемой на выходе конвертора dn-последовательности, как по одной выборке, так и по J выборкам, используются стандартные процедуры Mathcad:

- *mean* $(\cdot)$ – для оценки средних значений;
- *stdev* $(\cdot)$ – для оценки средних квадратичных отклонений от среднего значения.

Обработка полученной статистики показывает, что относительные выборочные погрешности воспроизведения параметров DN-распределения составляют mean(δμ)=0,314 % и mean(δν)=0,085 % (листинг 3), что говорит о высокой стабильности характеристик, формируемых конвертором *dn*-последовательностей случайных чисел.

Листинг 3. Оценки стабильности воспроизведения параметров μ и ν

```
δμν := | for j ∈ 1..J                    - количество вибірок J = 50
       |   for n ∈ 1..N                  - количество испытаний в выборке N = 1 × 10^3
       |     y_n ← rnd(1)
       |     for m ∈ 2..M
       |       F_m ← cnorm((X_m − 1)/(ν·√X_m)) + exp(2/ν^2)·cnorm(−(X_m + 1)/(ν·√X_m))
       |       break if F_m > y_n
       |     DN_n ← [ΔX·(m − 1) + (y_n − F_(m−1))/(F_m − F_(m−1) + 10^(−100))·ΔX]·μ
       |   δμν_(1,j) ← (μ − mean(DN))/μ  - относительная ошибка
       |                                   воспроизведения параметра μ в j-ой выборке;
       |   δμν_(2,j) ← (ν − stdev(DN)/mean(DN))/ν  - относительная ошибка
       |                                   воспроизведения параметра ν в j-ой выборке.
       | return δμν
```

Результаты оценивания стабильности воспроизведения параметров μ и ν *DN*-распределения

δμν =

	1	2	3	4	5	6	7	8
1	-0.024	$-8.038\cdot10^{-3}$	$-1.748\cdot10^{-3}$	$4.015\cdot10^{-3}$	$9.909\cdot10^{-3}$	$3.693\cdot10^{-3}$	-0.019	0.023
2	0.013	0.032	-0.016	-0.042	0.02	0.018	-0.102	...

Преобразование строк матрицы δμν в векторы δμ и δν для вычисления выборочных средних

```
δμ := | for j ∈ 1..50              δν := | for j ∈ 1..50
      |   δμ_j ← δμν_(1,j)               |   δν_j ← δμν_(2,j)
      | return δμ                        | return δν
```

δμ =

	1
1	-0.024
2	$-8.038\cdot10^{-3}$
3	$-1.748\cdot10^{-3}$
4	...

δν =

	1
47	-0.02
48	$-6.099\cdot10^{-3}$
49	$4.735\cdot10^{-3}$
50	...

Средние выборочные погрешности воспроизведения параметров распределения отказов системы: mean(δμ) = 0.314% mean(δν) = 0.085%

5. Независимость конвертирования числовых последовательностей

Критерий независимости характеризует случайность формируемых dn-последовательностей или неповторяемость случайных чисел в соседних выборках [1] и оценивается коэффициентом парной корреляции K_{corr} для двух выборок, который вычисляется по зависимости вида:

$$K_{\text{corr}} = \frac{\frac{1}{N} \cdot \sum_{i=1}^{N} (x_i - \bar{x}) \times (y_i - \bar{y})}{\left[\frac{1}{N} \cdot \sum_{i=1}^{N} (x_i - \bar{x})^2 \times \frac{1}{N} \cdot \sum_{i=1}^{N} (y_i - \bar{y})^2 \right]^{0.5}}, \qquad (3)$$

где x_i, y_i – элементы 1-ой и 2-ой исследуемых dn-последовательностей (выборок X и Y), интерпретируемые как приведенные значения наработок до отказа t/μ;

$\frac{1}{N} \cdot \sum_{i=1}^{N} (x_i - \bar{x}) \times (y_i - \bar{y}) = K_{\text{cvar}}$ – корреляционный момент (ковариация) выборок X и Y;

$\bar{x} = \frac{1}{N} \cdot \sum_{i=1}^{N} x_i$, $\bar{y} = \frac{1}{N} \cdot \sum_{i=1}^{N} y_i$ – математические ожидания параметра масштаба в выборках X и Y;

$\frac{1}{N} \cdot \sum_{i=1}^{N} (x_i - \bar{x})^2 = \sigma_x^2$, $\frac{1}{N} \cdot \sum_{i=1}^{N} (x_i - \bar{x})^2 = \sigma_y^2$ – дисперсии выборок X и Y.

В результате расчётов ковариация двух выборок не превышает 0,012 % $(K_{cvar} = -0{,}00012)$, а коэффициент парной корреляции составил не более 0,02 % $(K_{corr} = -0{,}0002)$ (листинг 4).

Листинг 4. Результат оценивания независимости формируемых dn-последовательностей X и Y случайных чисел

Параметры элемента

$\mu = 1 \times 10^4$ час

$\nu = 0.75$

Объёмы выборок X и Y

$N = 1 \times 10^3$

Средние значения X и Y

$\text{mean}(X) = 1.026$

$\text{mean}(Y) = 0.98$

X =

	1
996	1.86
997	0.773
998	0.391
999	0.589
1000	...

Y =

	1
996	0.535
997	1.925
998	0.642
999	0.965
1000	...

Средние квадратические отклонения

$\sigma 1 := \text{stdev}(X) = 0.838 \qquad \sigma 2 := \text{stdev}(Y) = 0.705$

Коэффициенты вариации

$\nu 1 := \frac{\text{stdev}(X)}{\text{mean}(X)} = 0.816 \qquad \nu 2 := \frac{\text{stdev}(Y)}{\text{mean}(Y)} = 0.72$

Корреляционный момент двух выборок $\text{cvar}(X, Y) = -1.203 \times 10^{-4}$

Коэффициент парной корреляции $\text{corr}(X, Y) = -2.037 \times 10^{-4}$

Столь малые значения ковариации и коэффициента парной корреляции свидетельствуют о более чем достаточной для практических исследований независимости формируемых *DN*-конвертором случайных числовых последовательностей.

6. Быстродействие конвертора “rnd(1) $\Rightarrow$ DN(X)”

Предварительно приближённая оценка быстродействия конвертора может быть получена по продолжительности работы программы анализа стабильности статистических характеристик формируемых последовательностей случайных чисел (листинг 3). При общем числе статистических экспериментов, равном $J \times N = 5 \cdot 10^4$, и ожидаемом числе итераций вычисления функции F_m, равном ~ 80 после каждого обращения к датчику rnd(1), затраты времени на получение оценок стабильности δμ и δν составили 60 sec при рабочей частоте процессора PC 0,95 GHz.

7. Выводы

1. *DN*-конвертор случайных числовых последовательностей имеет достаточно высокие значения характеристик воспроизводимости, стабильности, независимости, быстродействия и может использоваться в научных исследованиях для имитационного моделирования процессов и систем, в которых последовательность событий (появление отказов) описывается диффузионным немонотонным распределением.
2. При имитационном моделировании процессов и систем предлагаемое конвертирование "rnd(1) ⇒ DN(X)" в информационном пакете Mathcad исключает необходимость программирования решений задач надёжности в алгоритмических языках [2, 4], а конвертор логически встраивается в моделирующую программу.
3. Все этапы реализации модели и обработка результатов моделирования оформляются на страницах рабочего поля в виде единого Mathcad-документа с комментариями на основе текстового редактора, с выводом результатов на основе символьного и графического редакторов и вставками необходимых иллюстраций.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Вентцель Е.С. Теория вероятностей / Вентцель Е.С. – [изд. 5-е]. – М.: Наука, 1998. – 576 с.
2. Дьяконов В.П. Справочник по алгоритмам и программам на языке Basic для персональных ЭВМ / Дьяконов В.П. – М.: Наука, 1987. – 240 с.
3. Стрельников В.П. Оценка и прогнозирование надёжности электронных элементов и систем / В.П. Стрельников, А.В. Федухин. – К.: Логос, 2002. – 486 с.
4. Федухин А.В. К вопросу о статистическом моделировании надёжности / А.В. Федухин, Н.В. Сеспедес Гарсия // Математичні машини і системи. – 2006. – № 1. – С. 156 – 163.

Стаття надійшла до редакції 23.01.2014