Доповіді Національної академії наук України

7 • 2012

МАТЕМАТИКА

УДК 517.986.4

О. А. Берштейн, Е. К. Колесник

Гармонический анализ на квантовых комплексных гиперболических пространствах

(Представлено академиком НАН Украины Е. Я. Хрусловым)

Приведены результаты гармонического анализа на квантовых комплексных гиперболических пространствах. В частности, рассмотрен квантовый аналог оператора Лапласа–Бельтрами и его радиальной части, получены собственные функции и формула Меланшереля для радиальной части.

Рассмотрим группу $SU_{n,m}$ и ее однородное пространство $\mathcal{H}_{n,m} = SU_{n,m}/S(U_{n,m-1} \times U_1)$ — комплексное гиперболическое пространство. Такие псевдоэрмитовы пространства исследовались в работе Ж. Фаро [1] по теории полупростых симметрических пространств ранга 1. В многочисленных работах В. Ф. Молчанова, Г. ван Дижка и др. (см. [2–4]) рассматривались теория представлений и гармонический анализ на таких симметрических пространствах. В частности, стоит отметить известное преобразование Пенроуза, которое позволяет сопоставить классические ограниченные симметрические области и комплексные гиперболические пространства.

В этой работе мы развиваем гармонический анализ на квантовом комплексном гиперболическом пространстве. Напомним, что такие симметрические пространства были введены в ранних работах Л. Д. Фаддеева, Н. Ю. Решетихина и Л. А. Тахтаджяна [5]. В работе Л. Ваксмана и соавт. [6] рассматривался квантовый аналог преобразования Пенроуза. Общие результаты теории функций на квантовом комплексном гиперболическом пространстве $\mathcal{H}_{n,m}$ были введены в [7].

1. Необходимые сведения из теории квантовых групп и $*$-алгебра $\mathrm{Pol}(\mathcal{H}_{n,m})_q$. Приведем необходимые сведения, следуя [8]. В дальнейшем предполагаем $q \in (0, 1)$. Все алгебры предполагаются ассоциативными и содержащими единицу.

Алгебра Хопфа $U_q\mathfrak{sl}_N$ определяется образующими K_i, K_i^{-1}, E_i, F_i, $i = 1, 2, \ldots, N-1$, и хорошо известными соотношениями Дринфельда–Джимбо [9].

Нам понадобится также алгебра Хопфа $\mathbb{C}[SL_N]_q$ матричных элементов конечномерных весовых $U_q\mathfrak{sl}_N$-модулей. Напомним, что $\mathbb{C}[SL_N]_q$ определяется образующими t_{ij}, $i, j =$

$= 1, \ldots, N$ (матричными элементами векторного представления в весовом базисе) и коммутационными соотношениями [10]. Алгебра $\mathbb{C}[SL_N]_q$ наделяется стандартной структурой $U_q^{\mathrm{op}}\mathfrak{sl}_N \otimes U_q\mathfrak{sl}_N$-модульной алгебры.

Обозначим также через $U_q\mathfrak{su}_{n,m}$, $m + n = N$ $*$-алгебру Хопфа $(U_q\mathfrak{sl}_N, *)$ (см. [5, 10]).

Напомним обозначение для алгебры регулярных функций на квантовом основном однородном пространстве X, построенной в [10]. А именно, $\mathrm{Pol}(\widetilde{X})_q \stackrel{\mathrm{def}}{=} (\mathbb{C}[SL_N]_q, *)$.

Пусть m, $n \in \mathbb{N}$, $m \geqslant 2$, и $N \stackrel{\mathrm{def}}{=} n + m$. Напомним, что классическое комплексное гиперболическое пространство $\mathcal{H}_{n,m}$ может быть получено проективизацией области

$$\widehat{\mathcal{H}}_{n,m} = \left\{ (t_1, \ldots, t_N) \in \mathbb{C}^N \,\middle|\, -\sum_{j=1}^{n} |t_j|^2 + \sum_{j=n+1}^{N} |t_j|^2 > 0 \right\}.$$

Перейдем от классического случая $q = 1$ к квантовому $0 < q < 1$. Рассмотрим хорошо известный [5] q-аналог псевдоэрмитовых пространств. Обозначим через $\mathrm{Pol}(\widehat{\mathcal{H}}_{n,m})_q$ $*$-алгебру с единицей, определенную образующими t_1, $t_2, \ldots, t_N$ и коммутационными соотношениями [7]. Очевидно, что элемент

$$c = -\sum_{j=1}^{n} t_j t_j^* + \sum_{j=n+1}^{N} t_j t_j^*$$

является центральным в $\mathrm{Pol}(\widehat{\mathcal{H}}_{n,m})_q$. Более того, c не является делителем нуля $\mathrm{Pol}(\widehat{\mathcal{H}}_{n,m})_q$. Это позволяет нам рассмотреть локализацию $\mathrm{Pol}(\widehat{\mathcal{H}}_{n,m})_{q,c}$ по мультипликативной системе $c^{\mathbb{N}}$.

$*$-Алгебра $\mathrm{Pol}(\widehat{\mathcal{H}}_{n,m})_{q,c}$ может быть наделена биградуировкой: $\deg t_j = (1,0)$, $\deg t_j^* = (0,1)$, $j = 1, 2, \ldots, N$. Введем обозначение $\mathrm{Pol}(\mathcal{H}_{n,m})_q = \{f \in \mathrm{Pol}(\widehat{\mathcal{H}}_{n,m})_{q,c} \mid \deg f = (0,0)\}$. $*$-Алгебра $\mathrm{Pol}(\mathcal{H}_{n,m})_q$ будет рассматриваться как алгебра регулярных функций на квантовом гиперболическом пространстве.

Снабдим $*$-алгебру $\mathrm{Pol}(\mathcal{H}_{n,m})_q$ структурой $U_q\mathfrak{su}_{n,m}$-модульной алгебры [11]. Для этой цели построим ее вложение в $U_q\mathfrak{su}_{n,m}$-модульную $*$-алгебру $\mathrm{Pol}(\widetilde{X})_q$.

С помощью q-аналога разложения Лапласа определителя $\det_q \mathbf{t}$ по первой строке [12] из равенства $\det_q \mathbf{t} = 1$ получаем, что $-\sum\limits_{j=1}^{n} t_{1j}t_{1j}^* + \sum\limits_{j=n+1}^{N} t_{1j}t_{1j}^* = 1$. Следовательно, отображение $J\colon t_j \mapsto t_{1j}$, $j = 1, 2, \ldots, N$, имеет единственное продолжение до гомоморфизма $*$-алгебр $J\colon \mathrm{Pol}(\widehat{\mathcal{H}}_{n,m})_{q,c} \to \mathrm{Pol}(\widetilde{X})_q$. Обозначим образ через $\mathrm{Pol}(\widetilde{\mathcal{H}}_{n,m})_q$. Легко проверить, что $*$-алгебра $\mathrm{Pol}(\mathcal{H}_{n,m})_q$ *вкладывается* в $\mathrm{Pol}(\widetilde{\mathcal{H}}_{n,m})_q$, и ее образ при этом вложении — это подалгебра в $\mathrm{Pol}(\widetilde{\mathcal{H}}_{n,m})_q$, порожденная $t_{1j}t_{1k}^*$, j, $k = 1, 2, \ldots, N$ (напомним, что c переходит в $\det\limits_q \mathbf{t} = 1$). Отождествим $\mathrm{Pol}(\mathcal{H}_{n,m})_q$ с ее образом при отображении J.

Рассмотрим подалгебру $U_q\mathfrak{s}(\mathfrak{gl}_1 \times \mathfrak{gl}_{N-1})$, порожденную $K_i^{\pm 1}$, $i = 1, \ldots, N-1$, E_j, F_j, $j = 2, \ldots, N-1$. По очевидным причинам, $\mathrm{Pol}(\mathcal{H}_{n,m})_q = \{f \in \mathrm{Pol}(\widetilde{X})_q \mid L(\xi)f = \varepsilon(\xi)f, \xi \in U_q\mathfrak{s}(\mathfrak{gl}_1 \times \mathfrak{gl}_{N-1})\}$, где L — левое действие $U_q^{\mathrm{op}}\mathfrak{sl}_N$ в $\mathrm{Pol}(\widetilde{X})_q$. Мы будем использовать обозначения t_j вместо t_{1j} для образующих $\mathrm{Pol}(\widetilde{\mathcal{H}}_{n,m})_q$.

2. Алгебры обобщенных и финитных функций на квантовом $\mathcal{H}_{n,m}$. Определим элементы $\{x_j\}_{j=1,\ldots,N}$ следующим образом:

$$x_j \stackrel{\mathrm{def}}{=} \begin{cases} \sum\limits_{k=j}^{N} t_k t_k^*, & j > n, \\ -\sum\limits_{k=j}^{n} t_k t_k^* + \sum\limits_{k=n+1}^{N} t_k t_k^*, & j \leqslant n. \end{cases} \tag{1}$$

Следующее предложение доказано в [7].

Предложение 1. *Существует точное $*$-представление T алгебры $\mathrm{Pol}(\mathcal{H}_{n,m})_q$ в предгильбертовом пространстве.*

Снабдим $\mathrm{Pol}(\widetilde{\mathcal{H}}_{n,m})_q$ слабейшей топологией, в которой матричные элементы непрерывны. Пополнение $\mathrm{Pol}(\widetilde{\mathcal{H}}_{n,m})_q$ по этой топологии будем рассматривать как пространство обобщенных функций на квантовом аналоге $\widehat{\mathcal{H}}_{n,m}$ и обозначать через $\mathcal{D}(\widetilde{\mathcal{H}}_{n,m})'_q$. Представление T естественным образом продолжается до представления $\mathcal{D}(\widetilde{\mathcal{H}}_{n,m})'_q$ по непрерывности. Отождествим $\mathcal{D}(\widetilde{\mathcal{H}}_{n,m})'_q$ с пространством формальных рядов

$$f = \sum_{(i_1,\ldots,i_N,j_1,\ldots,j_N):i_k j_k=0} t_1^{i_1}\cdots t_n^{i_n} t_{n+1}^{*i_{n+1}}\cdots t_N^{*i_N} f_{IJ}(x_2,\ldots,x_N) t_N^{j_N}\cdots t_{n+1}^{j_{n+1}} t_n^{*j_n}\cdots t_1^{*j_1},$$

где $f_{IJ}(x_2,\ldots,x_N)$ — функции на совместном спектре $T(x_1), T(x_2),\ldots,T(x_N)$, с топологией поточечной сходимости коэффициентов f_{IJ}.

Обозначим через f_0 следующую функцию:

$$f_0(x_{n+1}) = \begin{cases} 1, & x_{n+1} = 1, \\ 0, & x_{n+1} \in q^{-2\mathbb{N}}. \end{cases} \tag{2}$$

Рассмотрим $*$-алгебру $\mathrm{Fun}(\widetilde{\mathcal{H}}_{n,m}) \subset \mathcal{D}(\widetilde{\mathcal{H}}_{n,m})'_q$, порожденную $\mathrm{Pol}(\widetilde{\mathcal{H}}_{n,m})$ и f_0. Пусть $\mathcal{H}$ — пространство представления T. Легко видеть, что существует единственное продолжение $*$-представления T до $*$-представления $*$-алгебры $\mathrm{Fun}(\mathcal{H}_{n,m})$ такого, что $T(f_0)$ является ортогональным проектором в $\mathcal{H}$ на собственное подпространство $T(x_{n+1})$, соответствующее первой точке спектра.

Обозначим через $\mathcal{D}(\mathcal{H}_{n,m})_{q,\mathfrak{k}}$ двусторонний идеал в $\mathrm{Fun}(\mathcal{H}_{n,m})$, порожденный f_0. Это квантовый аналог алгебры $U\mathfrak{k} = U\mathfrak{s}(\mathfrak{gl}_n \times \mathfrak{gl}_m)$-финитных гладких функций на $\mathcal{H}_{n,m}$ с компактным носителем.

Получим явную формулу для положительно определенного инвариантного интеграла на пространстве финитных функций $\mathcal{D}(\mathcal{H}_{n,m})_{q,\mathfrak{k}}$ и, таким образом, установим его существование. Пусть $Q = T(x_2,\ldots,x_N)$. Обозначим через $\nu_q\colon \mathcal{D}(\mathcal{H}_{n,m})_{q,\mathfrak{k}} \to \mathbb{C}$ следующий линейный функционал:

$$\nu_q(f) = \mathrm{Tr}(T(f)\cdot Q) \stackrel{\mathrm{def}}{=} \int\limits_{\mathcal{H}_{n,m}} f d\nu_q.$$

Теорема 1. *Функционал ν_q является корректно определенным, положительным и $U_q\mathfrak{su}_{n,m}$-инвариантным.*

Перейдем к изучению $U_q\mathfrak{k}$-инвариантов. Хорошо известно, что $\mathcal{H}_{n,m}$ является псевдоэрмитовым пространством ранга 1 (см. [3]). Следующее предложение является естественным квантовым аналогом этого факта (см. [7])

Предложение 2. $\mathcal{D}(\mathcal{H}_{n,m})_{q,\mathfrak{k}}^{U_q\mathfrak{k}} = \{f(x_{n+1}) \in \mathcal{D}(\mathcal{H}_{n,m})_{q,\mathfrak{k}}\}$, *$f$ — финитная функция на спектре x_{n+1}.*

Напомним стандартное обозначение $(a;q)_k = (1-a)\cdots(1-aq^{k-1})$, $(a;q)_0 = 1$,

$$\int_1^\infty f(x)\, d_{q^{-2}}x = (q^{-2}-1)\sum_{k=0}^\infty f(q^{-2k})q^{-2k}.$$

Предложение 3. *Для любой функции $f(x_{n+1}) \in \mathcal{D}(\mathcal{H}_{n,m})_{q,\mathfrak{k}}$ выполнено*

$$\int\limits_{\mathcal{H}_{n,m}} f(x_{n+1})d\nu_q = \int\limits_1^\infty f(x)\rho(x)\, d_{q^{-2}}x,$$

где

$$\rho(x) = \frac{1}{q^{-2}-1}\prod_{j=1}^{n-1}\frac{1}{q^{-2j}-1}x^{m-1}(q^{-2}x-1)(q^{-4}x-1)\cdots(q^{-2(n-1)}x-1).$$

Пополним $\mathcal{D}(\mathcal{H}_{n,m})_{q,\mathfrak{k}}^{U_q\mathfrak{k}}$ по норме $\|f\|^2 = \int\limits_1^\infty f^* f\rho(x)\, d_{q^{-2}}x$. Полученное гильбертово пространство обозначим через $L^2(d\nu_q^{(0)})$.

3. Оператор Лапласа–Бельтрами и его радиальная часть. Здесь мы введем в рассмотрение $U_q\mathfrak{sl}_N$-инвариантный оператор $\Box$ в пространстве финитных функций $\mathcal{D}(\mathcal{H}_{n,m})_{q,\mathfrak{k}}$. Этот оператор будет рассматриваться как квантовый аналог оператора Лапласа–Бельтрами на комплексном гиперболическом пространстве $\mathcal{H}_{n,m}$. Также мы получим явные формулы для сужения $\Box^{(0)}$ оператора $\Box$ на подпространство инвариантов $\mathcal{D}(\mathcal{H}_{n,m})_{q,\mathfrak{k}}^{U_q\mathfrak{k}}$, так называемой радиальной части $\Box$. Сужение является q-разностным оператором переменной $x = x_{n+1}$.

На квантовом гиперболическом пространстве естественным образом можно ввести ковариантное антиголоморфное дифференциальное исчисление первого порядка $\Omega^{(0,1)}(\mathcal{H}_{n,m})_q$, $\overline{\partial}$, а также инвариантное эрмитово скалярное произведение $\Omega^{(0,1)}(\mathcal{H}_{n,m})_q \times \Omega^{(0,1)}(\mathcal{H}_{n,m})_q \to$ $\to \mathrm{Pol}(\mathcal{H}_{n,m})_q$.

Определим оператор $\Box$ следующей формулой:

$$\int\limits_{\mathcal{H}_{n,m}} f_2^*(\Box f_1)\, d\nu_q = \int\limits_{\mathcal{H}_{n,m}} (\overline{\partial} f_1, \overline{\partial} f_2)\, d\nu_q, \qquad f_1, f_2 \in \mathcal{D}(\mathcal{H}_{n,m})_{q,\mathfrak{k}}.$$

Предложение 4. *Оператор $\Box$ является самосопряженным и $U_q\mathfrak{sl}_N$-инвариантным.*

Зафиксируем обозначение для q-разностных операторов $B_\pm\colon f(x) \mapsto \dfrac{f(q^{\pm 2}x)-f(x)}{q^{\pm 2}x - x}$.

Опишем сужение $\Box^{(0)}$ оператора $\Box$ на подпространство $\mathcal{D}(\mathcal{H}_{n,m})_{q,\mathfrak{k}}^{U_q\mathfrak{k}}$.

А именно, $\Box^{(0)}\colon f(x) \mapsto q^{2n}\dfrac{1-q^2}{1-q^{2(N-1)}}\rho(x)^{-1}B_+x(q^{-2n}x-1)\rho(x)B_-f(x)$.

Предложение 5. *Оператор* $\Box^{(0)}$ *ограничен.*

Предложение 5 позволяет расширить $\Box^{(0)}$ с $\mathcal{D}(\mathcal{H}_{n,m})_{q,\mathfrak{k}}^{U_q\mathfrak{k}}$ до ограниченного самосопряженного оператора в $L^2(d\nu_q^{(0)})$. Обозначим это расширение через $\Box^{(0)}$.

Лемма 1. *Функции*

$$\Phi_l(x) = {}_3\Phi_2\left(\begin{matrix} x, q^{-2l}, q^{2(l+N-1)} \\ q^{2n}, 0 \end{matrix}; q^2, q^2\right)$$

в $\mathcal{D}(\mathcal{H}_{n,m})'_q$ *являются обобщенными собственными функциями для* $\Box^{(0)} : \Box^{(0)}\Phi_l = \lambda(l)\Phi_l$ *с собственными значениями* $\lambda(l) = -q^{2-2n}\dfrac{(1-q^{-2l})(1-q^{2l+2(N-1)})}{(1-q^2)^2}$ *соответственно.*

Напомним определение полиномов Аль-Салама–Чихары, следуя [13]:

$$Q_k(z; a, b|q) = \frac{(ab; q)_k}{a^k} {}_3\Phi_2\left(\begin{matrix} q^{-k}, ae^{i\theta}, ae^{-i\theta} \\ ab, 0 \end{matrix}; q, q\right), \qquad z = \cos\theta.$$

Полиномы Аль-Салама–Чихары удовлетворяют следующим хорошо известным соотношениям ортогональности:

$$\frac{1}{2\pi}\int\limits_{-1}^{1} Q_i(z; a, b|q) Q_j(z; a, b|q) \frac{w(z)}{\sqrt{1-z^2}} dz + \sum_{1<aq^k<a} w_k Q_i(z_k; a, b|q) Q_j(z_k; a, b|q) =$$

$$= \frac{\delta_{ij}}{(q^{i+1}, abq^i; q)_\infty},$$

где

$$w(z) = \frac{h(z,1)h(z,-1)h(z,q^{1/2})h(z,-q^{1/2})}{h(z,a)h(z,b)}, \qquad h(z,a) = (ae^{i\theta}, ae^{-i\theta}; q)_\infty, \qquad z = \cos\theta,$$

$$z_k = \frac{aq^k + aq^{-k}}{2}, \qquad w_k = \frac{(a^{-2}; q)_\infty}{(q, ab, b/a; q)_\infty} \frac{(1-a^2q^{2k})(a^2, ab; q)_k}{(1-a^2)(q, qa/b; q)_k} q^{-k^2}\left(\frac{1}{a^3 b}\right)^k.$$

Легко видеть, что собственные функции $\Phi_l(x)$ выражаются через полиномы Аль-Салама–Чихары:

$$\Phi_l(q^{-2k}) = \frac{q^{k(N-1)}}{(q^{2n}; q^2)_k} Q_k(z; q^{2n-N+1}, q^{N-1}|q^2), \qquad e^{i\theta} = q^{2l+N-1}, \qquad z = \cos\theta.$$

Обозначим меру, относительно которой ортогональны полиномы Аль-Салама–Чихары, через $d\sigma$. Заметим, что при $2n - N + 1 > 0$ в соотношениях ортогональности сумма исчезает и остается только непрерывная мера.

4. Спектральная теорема для радиальной части $\Box$. Сформулируем спектральную теорему для $\Box^{(0)}$. Как и в классическом случае (см. [1, с. 429–432]), носитель меры Планшереля состоит из непрерывной и дискретной частей. Непрерывная часть соответствует основной унитарной серии $U_q\mathfrak{su}_{n,m}$-модулей, связанной с квантовым аналогом конуса $\Xi_{n,m} = \{x \in \mathbb{C}^N | -x_1\overline{x}_1 - \dots - x_n\overline{x}_n + x_{n+1}\overline{x}_{n+1} + \dots + x_N\overline{x}_N = 0\}$ (эта серия описана в [7]).

Теорема 2. *Ограниченный самосопряженный линейный оператор* $\Box^{(0)}$ *унитарно эквивалентен оператору умножения на независимую переменную в гильбертовом пространстве* $L^2(d\sigma)$*. Унитарная эквивалентность осуществляется оператором*

$$U\colon L^2(d\nu_q^{(0)}) \to L^2(d\sigma), \qquad U\colon f(x) \mapsto \widehat{f}(\lambda) \stackrel{\mathrm{def}}{=} \int\limits_1^\infty f(x)\Phi_l(x)\rho(x)d_{q^{-2}}x,$$

где последний интеграл фактически зависит от $\lambda = -q^{2-2n}\dfrac{(1-q^{-2l})(1-q^{2l+2N-2})}{(1-q^2)^2}$.

1. *Faraut J.* Distributions sphériques sur les espaces hyperboliques // J. Math. pures et appl. – 1979. – **58**. – P. 369–444.
2. *Молчанов В. Ф.* Сферические функции на гиперболоидах // Мат. сб. – 1976. – **99**, № 2. – С. 139–161.
3. *Молчанов В. Ф.* Гармонический анализ на однородных пространствах // Итоги науки и техники. Соврем. проблемы математики. Фундам. направления. Т. 59. – Москва: ВИНИТИ, 1990. – С. 5–144.
4. *van Dijk G., Sharshov Yu.* The Plancherel formula for line bundles on complex hyperbolic spaces // J. Math. Pures Appl. – 2000. – **79**, No 5. – P. 451–473.
5. *Faddeev L. D., Reshetikhin N. Yu., Takhtadjan L. A.* Quantization of Lie groups and Lie algebras // Algebra and Analysis. – 1989. – **1**, No 1. – P. 178–206.
6. *Shklyarov D., Sinel'shchikov S., Stolin A., Vaksman L.* On a q-analogue of the Penrose transform // Ukr. Phys. J. – 2003. – **47**, No 3. – P. 288–292.
7. *Bershtein O., Sinelshchikov S.* Function theory on a q-analog of complex hyperbolic space. – math. QA/1009.6063.
8. *Vaksman L. L.* Quantum bounded symmetric domains / Transl. by O. Bershtein, S. Sinel'shchikov // Transl. Math. Monogr. Vol. 238. – Providence: Amer. Math. Soc., 2010. – 256 p.
9. *Jantzen J. C.* Lectures on Quantum Groups. – Providence, R. I.: Amer. Math. Soc., 1996. – 266 p.
10. *Shklyarov D., Sinel'shchikov S., Vaksman L.* Fock representations and quantum matrices // Int. J. Math. – 2004. – **15**. – P. 855–894.
11. *Chary V., Pressley A.* A guide to quantum groups. – Cambridge: Cambridge Univ. Press, 1994. – 667 p.
12. *Klimyk A., Schmüdgen K.* Quantum groups and their representations. – Berlin: Springer, 1997. – 582 p.
13. *Koekoek R., Swarttouw R. F.* The Askey-scheme of hypergeometric orthogonal polynomials and its q-analogue. Report 98–17. Delft University of Technology, 1998. – http://aw.twi.tudelft.nl/koekoek/askey.html.

Физико-технический институт низких температур им. Б. И. Веркина НАН Украины, Харьков

Поступило в редакцию 31.10.2011

О. О. Берштейн, Є. К. Колісник

Гармонічний аналіз на квантових комплексних гіперболічних просторах

Наведено результати гармонічного аналізу на квантових комплексних гіперболічних просторах. Зокрема, розглянуто квантовий аналог оператора Лапласа–Бельтрамі та його радіальної частини, отримано власні функції та формулу Планшереля для радіальної частини.

O. A. Bershtein, Ye. K. Kolisnyk

Harmonic analysis on quantum complex hyperbolic spaces

We present some results of harmonic analysis on quantum complex hyperbolic spaces. We introduce a quantum analog for the Laplace-Beltrami operator and its radial part, describe its eigenfunctions, and obtain a Plancherel formula for it.