

УДК 519.63:519.17

В.П. ВОЛОБОВ*, В.П. КЛИМЕНКО*

МЕТОД КОНЕЧНЫХ ЭЛЕМЕНТОВ И ТЕОРИЯ ГРАФОВ

*Институт проблем математических машин и систем НАН Украины, Киев, Украина

Анотація. Пропонується у методі кінцевих елементів представляти кінцеві елементи і граничні умови у вигляді еквівалентних схем заміщення, які складаються із двополюсних компонент, а топологію розрахункової схеми дискретної моделі об'єкта – у вигляді графа з метою застосування методу коректного формування рівнянь на сітці кінцевих елементів. Запропоновано методику побудови еквівалентних схем заміщення за описами кінцевих елементів і граничних умов. Наведено приклад побудови графа дискретної моделі об'єкта за описами кінцевих елементів і граничних умов.

Ключові слова: рівняння математичної фізики, метод кінцевих елементів, погана обумовленість, кінцевий елемент, еквівалентна схема заміщення, двополюсний компонент, граф дискретної моделі фізичного об'єкта, коректне формулювання математичної моделі.

Аннотация. Предлагается в методе конечных элементов представлять конечные элементы и граничные условия в виде эквивалентных схем замещения, состоящих из двухполюсных компонент, а топологию расчетной схемы дискретной модели объекта – в виде графа с целью применения метода корректного формирования уравнений на сетке конечных элементов. Предложена методика построения эквивалентных схем замещения по описаниям конечных элементов и граничных условий. Приведен пример построения графа дискретной модели объекта по описанию конечных элементов и граничных условий.

Ключевые слова: уравнения математической физики, метод конечных элементов, конечный элемент, эквивалентная схема замещения, двухполюсный компонент, граф дискретной модели физического объекта, корректная формулировка математической модели.

Abstract. It is offered in the finite element method to represent finite elements and boundary conditions in the form of the equivalent circuits consisting of two-terminal components and topology of the settlement scheme of discrete model of object to be represented graphically for the application of a method of correct equations formation on a finite element mesh. The technique of construction of equivalent circuits under descriptions of final elements and boundary conditions is offered. The example of construction of the graph of discrete model of object under the description of finite elements and boundary conditions is suggested.

Keywords: the equations of mathematical physics, finite element method, the finite element, an equivalent circuit, a two-terminal component, the graph of discrete model of physical object, the correct formulation mathematical models.

1. Введение

Метод конечных элементов (МКЭ) – численный метод решения дифференциальных уравнений в частных производных, известных как уравнения математической физики (УМФ). В отличие от остальных численных методов, основывающихся на математической дискретизации УМФ, МКЭ базируется на физической дискретизации объекта. В дальнейшем будут рассматриваться только линейные УМФ. Численное решение УМФ методом МКЭ сводится к процессу, состоящему из набора следующих важнейших шагов [1]: дискретизация сплошной среды, выбор интерполяционных функций и вычисление характеристик элементов, формирование уравнений для сетки конечных элементов, решение системы уравнений, расчет нужных воздействий.

На этапе дискретизации объект, рассматриваемый как сплошная среда с бесконечно многими степенями свободы, заменяется дискретной моделью связанных между собой конечных элементов с конечным числом степеней свободы. Способ дискретизации объекта, выбор вида конечных элементов и общего числа элементов зависят как от природы решаемой задачи, так и от необходимой точности требуемого решения.

Наряду с числом и видом элементов важен выбор узлов, неизвестных в них, и интерполяционных функций, так как основная задача на шаге выбора интерполяционных функций заключается в том, чтобы выбрать те модели конечных элементов, которые лучше всего аппроксимируют УМФ. Характеристики отдельных элементов определяются независимо от сетки элементов, как единого целого. В результате выполнения перечисленных этапов определяются характеристики конечных элементов и строится дискретная физическая модель объекта.

Система линейных алгебраических уравнений (СЛАУ), описывающая дискретную модель, получается в результате формирования уравнений для сетки конечных элементов. Для анализа и расчета СЛАУ действительны все принципы и способы, действующие в классической дискретной математике. Основная задача при выборе метода решения СЛАУ есть обеспечение необходимой точности решения.

Принято считать, что априорная оценка сверху, то есть наихудшая оценка возможных ошибок решения СЛАУ, характеризуется числом обусловленности [2], которое определяется как отношение максимального собственного значения матрицы СЛАУ к минимальному. Под плохо обусловленной (неустойчивой) или в более общей формулировке – некорректно поставленной задачей имеется в виду следующее [3]: если фиксированы уровень ошибок входных данных и точность вычислений, то всегда найдутся системы с настолько большими значениями чисел обусловленности, что для них нельзя гарантировать в решении никакой точности.

Разработаны различные инструменты для «улучшения» обусловленности матрицы: метод регуляризации [4], предобусловливание [5], метод псевдообратной матрицы [6], метод главных компонент [7] и др. Следует заметить, что в работе [2] приведены примеры матриц, для которых потеря точности при решении СЛАУ невелика, а величина числа обусловленности огромна. Это означает, что существующий критерий оценки точности решения СЛАУ по числу обусловленности есть необходимый, но недостаточный. Авторы предложили новый критерий количественного определения фактической потери знаков в расчетах СЛАУ, но, к сожалению, в работе не исследовались факторы, от которых в действительности зависит точность решения плохо обусловленной СЛАУ.

Как следует из литературы [3], все трудности решения неустойчивых СЛАУ связаны, по существу, лишь с трудностями решения систем неполного ранга либо очень близких к таковым в условиях возмущения входных данных и влияния ошибок округления. В работах [8–12] предложен совершенно новый подход к решению некорректно поставленной задачи. Он заключается в том, что вместо "улучшения" обусловленности матрицы на этапе решения предлагается корректно формулировать задачу, то есть формировать СЛАУ, описывающую дискретный объект таким образом, чтобы потеря точности при решении была невелика даже при большой величине числа обусловленности, то есть стремиться составить СЛАУ полного ранга. Метод корректной постановки задачи рассмотрен применительно к задачам моделирования поведения электрических цепей [8], энергосистем [9] и стержневых систем механики [12]. Суть предлагаемого метода заключается в том, что при составлении СЛАУ, описывающей дискретную модель физического объекта, учитывается требование, которому должны удовлетворять элементы невырожденной матрицы. Это требование в виде леммы сформулировано в [3].

Представляется интересным рассмотреть применимость этого метода к формированию уравнений для сетки конечных элементов.

2. Корректная формулировка СЛАУ для сетки конечных элементов

Как следует из [8–12], расчетная схема дискретной модели объекта должна быть представлена в виде связанного графа, элементы которого удовлетворяют следующим требованиям. Граф содержит только двухполюсные компоненты. Ребра графа отображают двухполюсные компоненты дискретного объекта, а узлы – соединение компонент. Функциональные зависимости компонент описывают связь воздействия, приложенного к компоненте, к потоку, протекающему через компоненту. При составлении уравнений используется понятие тип компоненты, который определяется в зависимости от вида функциональной зависимости [10]. В качестве переменных при составлении уравнений выбираются воздействия, приложенные к компонентам дерева графа. Требование, которому должны удовлетворять элементы невырожденной матрицы, учитывается на этапе построения дерева графа, путем учета типа компонент и параметров функциональных зависимостей компонент. Для записи основной системы уравнений в матричном виде применяются матрицы контуров и сечений графа. В результате выполнения перечисленных операций формируется невырожденная система уравнений, описывающих дискретный объект.

В МКЭ сплошной объект заменяется дискретной моделью связанных между собой конечных элементов [13]. Для этого в рассматриваемой области объекта фиксируется конечное число точек. Эти точки называются узловыми точками или просто узлами. Считается, что значение непрерывной переменной в каждой узловой точке, отсчитываемое от базисного узла, должно быть определено. Область определения непрерывной величины разбивается на конечное число подобластей, называемых конечными элементами. Конечные элементы соединяются между собой в конечном числе узловых точек, которые находятся на контуре конечного элемента и в совокупности аппроксимируют форму области. Для описания формы области, состоящей из конечных элементов, применяется матрица соединений. После выполнения этапов дискретизации, выбора интерполяционных функций вычисленные характеристики конечных элементов имеют следующий вид:

$$\begin{pmatrix} f_1 \\ \cdot \\ f_i \\ \cdot \\ f_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} & \cdot & a_{1i} & \cdot & a_{1n} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ a_{i1} & \cdot & a_{ii} & \cdot & a_{in} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ a_{n1} & \cdot & a_{ni} & \cdot & a_{nn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \varphi_1 \\ \cdot \\ \varphi_i \\ \cdot \\ \varphi_n \end{pmatrix}, \quad (1)$$

где φ_i – переменная, описывающая воздействие, отсчитываемое от базисного узла и приложенное к i -ому узлу, f_i – функция, описывающая поток, протекающий через i -ый узел, n – количество узлов в конечном элементе.

При формировании уравнений для сетки конечных элементов используются характеристики конечных элементов дискретной модели и матрица соединений. Полученная система уравнений является вырожденной, поскольку при формировании уравнений часть уравнений оказывается взаимно зависимой из-за граничных условий. Корректировка этой системы уравнений приводит к невырожденной СЛАУ.

Как следует из вышерассмотренного, отличие формирования уравнений для сетки конечных элементов от метода корректной подготовки задачи заключается в том, что в качестве элементов расчетной схемы выступают конечные элементы (многополюсники), а не двухполюсники, учёт граничных условий выполняется после формирования уравнений для сетки конечных элементов и не учитываются особенности конкретного физического объекта.

Для успешной реализации метода корректной постановки задачи формирования СЛАУ, описывающей дискретную модель УМФ, необходимо расчетную схему дискретной

модели представить в виде графа, в котором конечные элементы, описываемые уравнением (1), и граничные условия представлены в виде эквивалентных схем замещения, содержащих только двухполюсные компоненты.

2.1. Эквивалентные схемы замещения элементов МКЭ

Ниже будет рассмотрено построение эквивалентных схем замещения конечных элементов и граничных условий. При построении эквивалентных схем, состоящих из двухполюсных компонент, необходимо учитывать, что корректность составленной СЛАУ достигается за счет целенаправленного выбора переменных на этапе составления дерева графа дискретной модели. Это означает, что, чтобы обеспечить целенаправленный выбор переменных, граф эквивалентной схемы должен быть полносвязный или же приближаться к этому. В общем случае не существует формализованной методики построения эквивалентных схем замещения конечных элементов, состоящих из двухполюсных компонент, удовлетворяющих этому требованию. Но практически всегда можно построить просто эквивалентную схему замещения конечного элемента и преобразовать её к требуемому виду. Механизм преобразования схем достаточно полно описан в литературе [14]. Далее будет рассмотрено построение эквивалентной схемы трехполюсного элемента и граничных условий. Для конечного элемента с другим количеством полюсов эквивалентная схема строится аналогичным образом.

2.1.1. Эквивалентная схема замещения конечного элемента, содержащего три узла

Для конечного элемента, содержащего три узла, система уравнений (1) приобретает следующий вид:

$$\begin{pmatrix} f_i \\ f_j \\ f_k \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{ii} & a_{ij} & a_{ik} \\ a_{ji} & a_{jj} & a_{jk} \\ a_{ki} & a_{kj} & a_{kk} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \varphi_i \\ \varphi_j \\ \varphi_k \end{pmatrix}, \quad (2)$$

где i, j, k – узлы конечного элемента. На рис. 1а приведено условное обозначение типичного треугольного элемента, узлы i, j, k которого пронумерованы в направлении против часовой стрелки. Уравнение (2) не трудно представить в виде эквивалентной схемы замещения конечного элемента

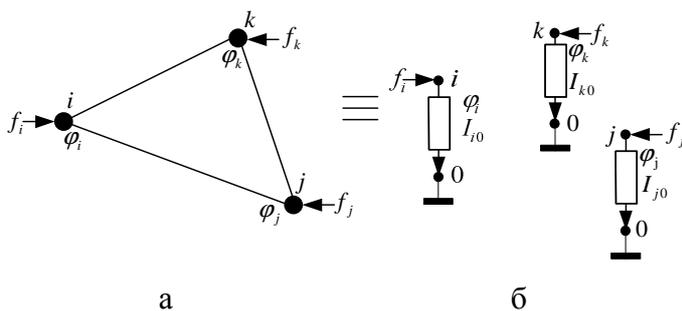


Рис. 1. Конечный элемент, содержащий три узла и его граф: а) трехполюсный конечный элемент, б) граф конечного элемента

конечного элемента (рис. 1б). На рис. 1б используются следующие обозначения: I_{i0}, I_{j0}, I_{k0} – потоки, протекающие через компоненты, $\varphi_i, \varphi_j, \varphi_k$ – воздействия, приложенные к компонентам, f_i, f_j, f_k – внешние потоки, втекающие в i, j, k узлы, 0 – базисный узел. Функциональные зависимости компонент имеют следующий вид:

$$\begin{aligned} I_{i0} &= a_{ii}\varphi_i + a_{ij}\varphi_j + a_{ik}\varphi_k, \\ I_{j0} &= a_{ji}\varphi_i + a_{jj}\varphi_j + a_{jk}\varphi_k, \\ I_{k0} &= a_{ki}\varphi_i + a_{kj}\varphi_j + a_{kk}\varphi_k. \end{aligned} \quad (3)$$

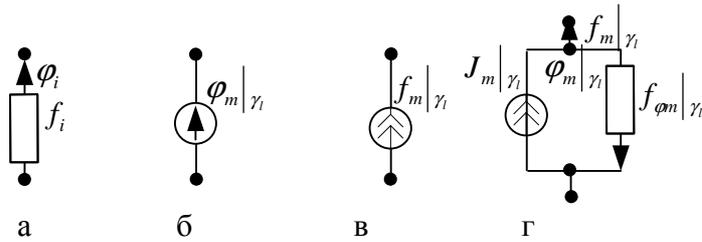


Рис. 2. Условные обозначения типов компонент: а) функциональная компонента, б) источник воздействия $\varphi_m|_{\gamma_l}$, в) источник потока $f_m|_{\gamma_l}$, г) эквивалентная схема граничного условия Родена (уравнение (12))

творяет требованиям метода. Её не трудно преобразовать к следующему виду (рис. 3). Функциональные зависимости компонент (рис. 3) приведены в (4). Как следует из (4), компоненты – функциональные.

$$\begin{aligned}
 I_i &= (a_{ii} + a_{ji} + a_{ki})\varphi_i, & I_{ij} &= (a_{ij} - a_{ji})\varphi_i - a_{ij}\varphi_j, & \text{где } \varphi_{ij} &= \varphi_i - \varphi_j, \\
 I_j &= (a_{ij} + a_{jj} + a_{kj})\varphi_j, & I_{ik} &= (a_{ik} - a_{ki})\varphi_i - a_{ik}\varphi_k, & \text{где } \varphi_{ik} &= \varphi_i - \varphi_k, \\
 I_k &= (a_{ik} + a_{jk} + a_{kk})\varphi_k, & I_{jk} &= (a_{jk} - a_{kj})\varphi_j - a_{jk}\varphi_k, & \text{где } \varphi_{jk} &= \varphi_j - \varphi_k.
 \end{aligned}
 \tag{4}$$

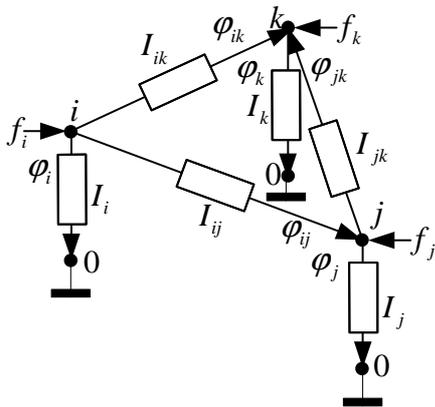


Рис. 3. Эквивалентная схема конечного элемента в виде связанного графа

УМФ ограничимся рассмотрением граничных условий для стационарного УМФ 2-го порядка типа

$$F(\varphi_{xx}, \varphi_{yy}, \varphi_{zz}) = 0. \tag{5}$$

Для уравнения (5) известны три основных типа граничных условий [15].

1) Краевая задача с граничными условиями первого рода (задача Дирихле). Требуется найти решение уравнения (5) в некоторой области пространства, которое принимает на участке границы γ_l значение воздействия, описываемого функцией $g_l(\gamma_l)$, то есть

$$\varphi|_{\gamma_l} = g(\gamma_l), \quad 1 \leq l \leq n_l, \tag{6}$$

Как следует из уравнений (3), компоненты относятся к типу функциональных. Условное обозначение компоненты приведено на рис. 2а. Граф конечного элемента – несвязный.

Если построить граф дискретной модели, используя данную эквивалентную схему, то окажется, что выбор дерева в графе будет однозначный, то есть эквивалентная схема не удовле-

творяет требованиям метода. Как видно из рис. 3, все узлы графа связаны ребрами, то есть граф есть полносвязный и в нём можно различным способом выбрать дерево графа. Таким образом, эквивалентная схема замещения (рис. 3) удовлетворяет требованиям метода корректной формулировки задачи, приведенного в статьях [8, 10, 11].

2.1.2. Эквивалентные схемы замещения граничных условий

Обычно граничные условия в УМФ представлены в виде математических выражений. При построении дискретной модели УМФ в виде графа, содержащего только двухполюсные компоненты, граничные условия также необходимо представить в виде эквивалентных схем замещения. Из всего многообразия

где n_l – количество участков границы, $g(\gamma_l)$ – функция, описывающая воздействие, приложенное к участку границы. После дискретизации области функциональная зависимость будет иметь следующий вид:

$$\varphi_m|_{\gamma_l} = g(\gamma_{lm}), \quad 1 \leq m \leq m_l, \quad (7)$$

где m_l – количество точек, расположенных на l -ом участке границы. Функциональная зависимость (7) описывает поведение компоненты типа источник воздействия (рис.2б), присоединённой одним концом к точке m участка границы l , а другим – к базисной точке. Отличительной особенностью источника воздействия есть то, что величина потока, протекающего через компоненту, определяется внешними условиями.

2) Краевая задача с граничными условиями второго рода (задача Неймана). Требуется найти решение уравнения (5) в некоторой области пространства, когда внешняя нормальная производная $\frac{\partial \varphi}{\partial n}|_{\gamma_l}$ на участке границы γ_l пропорциональна втекающему потоку f_l , то есть

$$f_l = \frac{\partial \varphi}{\partial n}|_{\gamma_l} = g_l(\gamma_l), \quad 1 \leq l \leq n_l, \quad (8)$$

где $g_l(\gamma_l)$ – функция, описывающая величину потока f_l , протекающего через l -ый участок границы. Задача Неймана (для уравнения Лапласа) имеет смысл только в том случае, когда полный поток, протекающий через все участки границы, равен 0. Математически это значит, что для потока, проходящего через все участки границы Σ , должно выполняться соотношение

$$\int_{\Sigma} \frac{\partial \varphi}{\partial n} = 0. \quad (9)$$

В противном случае задача не будет иметь решения. Физически это означает, что поток, проходящий через границу, должен протекать через реальный объект.

После дискретизации области граничные условия (8) приобретают следующий вид:

$$f_m|_{\gamma_l} = g_l(\gamma_{lm}), \quad 1 \leq m \leq m_l. \quad (10)$$

Функциональная зависимость (10) описывает поведение компоненты типа источник потока (рис. 2в), присоединённой одним концом к точке γ_{lm} , а другим – к базисной точке. Отличительной особенностью источника потока есть то, что величина воздействия, приложенного к компоненте, определяется внешними условиями.

3) Краевая задача с граничным условием третьего рода (задача Робена). Требуется найти такое решение уравнения в некоторой области пространства, которое удовлетворяет на границе γ_l условию вида

$$f|_{\gamma_l} = \frac{\partial \varphi}{\partial n}|_{\gamma_l} = -h(\varphi_l(\gamma_l) - g_l(\gamma_l)), \quad 1 \leq l \leq n_l, \quad (11)$$

где h – заданная константа, а g_l – заданная функция, которая меняется вдоль границы. Уравнение (11) можно интерпретировать следующим образом. Поток, втекающий в область через границу γ_l , пропорционален разности между воздействием φ_l , приложенным к границе, и некоторой заданной величиной g_l .

После дискретизации области граничное условие (11) приобретает следующий вид:

$$f_m \Big|_{\gamma_i} = \frac{\partial \varphi_m}{\partial n} \Big|_{\gamma_i} = -h(\varphi_l(\gamma_{lm}) - g_l(\gamma_{lm})) \quad 1 \leq m \leq m_l. \quad (12)$$

Уравнению (12) соответствует эквивалентная схема замещения, приведенная на рис. 2г. Направления потоков, протекающих через компоненты, учитывают знаки элементов уравнения (12). Функциональные зависимости компонент имеют следующий вид:

$$J_m \Big|_{\gamma_i} = h g_l(\gamma_{lm}), \quad (13)$$

$$y_{\varphi m} \Big|_{\gamma_i} = h \varphi_l(\gamma_{lm}), \quad (14)$$

Функциональной зависимости (13) соответствует компонента типа источник потока, а (14) – типа функциональная.

Ниже будет рассмотрен пример построения дискретной модели для МКЭ, удовлетворяющей требованиям метода корректного формирования СЛАУ для сетки конечных элементов.

3. Пример построения графа дискретной модели объекта

Метод довольно подробно описан в работах [8, 10, 11]. В данной работе будет рассмотрено построение графа дискретной модели реального объекта на конкретном примере. Суть метода построения графа дискретной модели заключается в том, что по известным уравнениям характеристик конечных элементов и граничных условий строятся их эквивалентные схемы замещения. На следующем шаге составляется граф модели реального объекта путем замены конечных элементов и граничных условий их эквивалентными схемами. Для формирования уравнений на сетке конечных элементов, представленной в виде графа, применяется метод корректного составления уравнений, предложенный в [8].

В качестве примера выбрана задача Адамара [16]. На примере этой задачи Адамар первым поднял вопрос о корректной постановке задачи расчета УМФ. Следует заметить, что если Адамар решал эту задачу аналитически, то в данной работе будет рассмотрено построение дискретной физической модели задачи в виде графа и проведена оценка её физической реализуемости. Задача Адамара представляет собой классическое двумерное уравнение потенциала

$$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2} = 0, \quad (15)$$

в полуполосе

$$y > 0; -\frac{\pi}{2} \leq x \leq \frac{\pi}{2}, \quad (16)$$

удовлетворяющее условиям

$$\varphi \Big|_{x=-\frac{\pi}{2}} = \varphi \Big|_{x=\frac{\pi}{2}} = 0, \quad (17)$$

$$\varphi \Big|_{y=0} = 0, \quad \frac{\partial \varphi}{\partial y} \Big|_{y=0} = e^{-\sqrt{n}} \cos(nx), \quad (18)$$

где n – нечетное число. Решение при любом y , отличном от нуля, имеет вид косинусоиды со сколь угодно большой амплитудой, то есть задача физически нереализуема.

При построении дискретной модели МКЭ в виде графа в качестве прототипа использовалось решение задачи, рассмотренной в [13]. Её отличие от задачи Адамара заклю-

чается в том, что уравнение (15) рассматривается в ограниченной области, а сама область разбита на треугольные конечные элементы. Так же, как в [13], исходная задача будет рассматриваться в ограниченной двумерной области:

$$-1 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq 2, \quad (19)$$

с граничным условием (17), принимающим следующий вид:

$$\varphi|_{x=-1} = \varphi|_{x=1} = 0. \quad (20)$$

Далее таким же образом, как в [13], разбивается двумерная область на треугольные конечные элементы и нумеруются узлы конечных элементов (рис. 4). На рис. 4 стрелками указаны направления нумерации узлов конечных элементов. Как следует из [13], характеристика треугольного конечного элемента после выполнения этапов дискретизации сплошной среды, выбора интерполяционных функций и вычисления характеристик конечных элементов имеет следующий вид:

$$\begin{vmatrix} f_i \\ f_j \\ f_k \end{vmatrix} = \frac{1}{2} \begin{vmatrix} 1 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} \varphi_i \\ \varphi_j \\ \varphi_k \end{vmatrix}. \quad (21)$$

Для треугольного конечного элемента, описываемого уравнением (21), эквивалентная схема, приведенная на рис. 3, приобретает вид, показанный на рис. 5. Функциональные зависимости компонент, связывающие потоки, протекающие через компоненты, с воздействием, приложенным к компонентам, имеют следующий вид:

$$\begin{aligned} I_{ij} &= \frac{1}{2} \phi_{ij}, \\ I_{jk} &= \frac{1}{2} \phi_{jk}. \end{aligned} \quad (22)$$

На следующем шаге строится граф двумерной области. Для этого в двумерной области (рис. 4) конечные элементы заменяются их эквивалентными схемами. При этом учитывается направление нумерации узлов конечных элементов. Граф двумерной области приведен на рис. 6. На рис. 6 двойной линией показано параллельное соединение компонент.

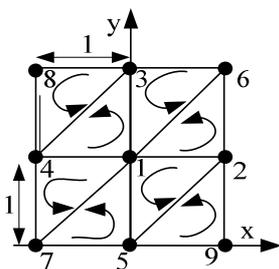


Рис. 4. Двумерная область, разбитая на треугольные конечные элементы

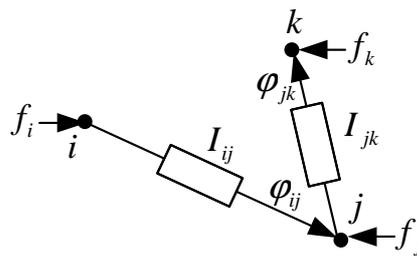


Рис. 5. Эквивалентная схема конечного элемента, описываемого уравнением (21)

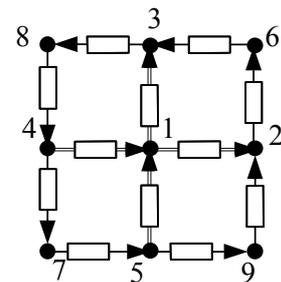


Рис. 6. Граф двумерной области, приведенной на рис. 4

Не трудно убедиться, применив метод формирования уравнений [13] к графу (рис. 6), что полученная матрица коэффициентов системы уравнений (23) совпадает с приведенной в [13].

$$\frac{1}{2} \begin{vmatrix} 8 & -2 & -2 & -2 & -2 & 0 & 0 \\ -2 & 3 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ -2 & 0 & 3 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ -2 & 0 & 0 & 3 & 0 & 0 & -1 \\ -2 & 0 & 0 & 0 & 3 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & -1 & 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & -1 & 0 & 2 \end{vmatrix} \begin{matrix} \varphi_1 \\ \varphi_2 \\ \varphi_3 \\ \varphi_4 \\ \varphi_5 \\ \varphi_6 \\ \varphi_7 \end{matrix}. \quad (23)$$

На следующем шаге определяются типы компонент, входящих в эквивалентные схемы замещения граничных условий. Граничному условию, описываемому функцией (20), соответствуют компоненты типа источника воздействия (рис. 2б), присоединенные одним концом к узлам, расположенным по границам области, где $x = -1$ и $x = 1$, то есть к узлам 7, 4, 8 и 9, 2, 6, а другим – к общему узлу 0. Граничное условие, описываемое функциями (18), можно представить компонентами, присоединенными к узлам, расположенным по границе области $y = 0$, то есть к узлам 7, 5, 9. Компоненту, описываемую функциональной зависимостью (18), можно рассматривать как источник воздействия $\varphi|_{y=0} = 0$, через который протекает поток $\frac{\partial \varphi}{\partial y}|_{y=0} = e^{-\sqrt{n}} \cos(nx)$. Следует заметить, что данное гранич-

ное условие не соответствует ни одному из основных типов граничных условий, так как в данном случае в граничном условии задается в качестве известных параметров как внешнее воздействие, так и поток, протекающий через компоненту. Одновременно могут быть известны величина воздействия, приложенного к компоненте, и поток, протекающий через компоненту, только в результате численного расчета СЛАУ. Или же решение сформированных уравнений при таком граничном условии возможно только при одном определенном значении параметров дискретной модели объекта.

Таким образом, можно сделать следующий вывод: Адамар рассматривал задачу, у которой некорректно задано граничное условие (18), то есть физически нереализуемую. Следует отметить, что в отличие от общепринятого метода формирования уравнений для сетки конечных элементов, когда только после составления СЛАУ начинают приводить систему к корректному виду, при предложенном подходе контроль корректности постановки задачи выполняется как на этапе построения графа модели, так и при составлении СЛАУ.

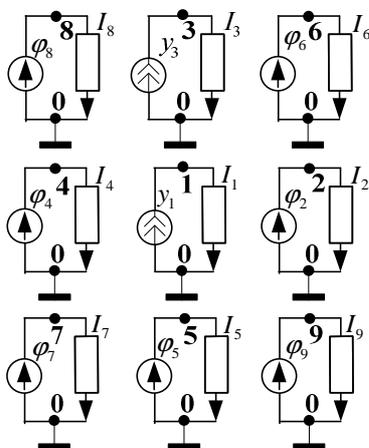


Рис. 7. Дискретная модель модифицированной задачи Адамара

4. Обсуждение полученных результатов

Рассмотрим более подробно граф дискретной модели реального объекта анализируемого примера при условии, что второе выражение в уравнениях (18) не учитывается, то есть будет рассматриваться физически реализуемый объект. Граф строится заменой граничных условий и конечных элементов объекта (рис. 4) эквивалентными схемами (рис. 1, 2). После соответствующих преобразований граф дискретной модели приобретает вид, показанный на рис. 7.

Прежде всего, следует отметить то, что граф состоит из отдельных элементов, связанных между собой одним общим узлом. Отдельные элементы графа представляют собой замкнутые контуры (циклы), состоящие

из двухполюсных компонент, в которых циркулируют потоки. Как известно [17], любая циркуляция потока рассматривается как вихревое образование. Это означает, что дискретную модель физического объекта можно рассматривать как набор взаимодействующих между собой энергетических вихрей, расположенных между узлами конечных элементов объекта и базовым узлом. Представляет интерес сравнить с аналогами подобного объяснения функционирование объектов, описываемых УМФ.

Так, по распространенным в XVIII — начале XIX века воззрениям причиной тепловых явлений был теплород — невесомый флюид, присутствующий в каждом теле [19]. В 1783 году введен в Лавуазье. Гипотеза теплорода была отвергнута в результате испытаний, что послужило опорой для принятия молекулярно-кинетической теории в середине XIX века.

Джеймс Клерк Максвелл предложил модель физической среды, в которой в качестве основного элемента рассматривался «молекулярный вихрь» и на ее основе получил уравнения электромагнитного поля [19]. Следует заметить, что граф дискретной модели физического объекта (рис. 7) подобен модели физической среды, предложенной Максвеллом.

В начале XX века Вальтер Ритц — швейцарский физик-теоретик и математик — выдвинул гипотезу о том, что любой источник, например, электрически заряженная частица или электрон, постоянно испускает во всех направлениях мельчайшие частицы, обладающие одной и той же равномерной скоростью относительно заряда [19]. Основываясь на взаимосвязи между электроном и частицами света, Ритц сформулировал “закон элементарных воздействий”, объясняющий появление силы между электрическими зарядами. Следует заметить, что в конце XX века к применению данного метода при решении физических задач вернулись некоторые исследователи [20], несмотря на нерешенные вопросы, связанные с излучением мельчайших частиц объектом.

Отличие предлагаемой в данной работе интерпретации передачи тепла или электростатического взаимодействия в объектах, описываемых УМФ, заключается в том, что перенос тепла или электростатическое взаимодействие осуществляется при помощи обмена энергией между энергетическими вихрями. Эти вихри возникают в объекте только в момент передачи тепла или электростатического взаимодействия. На первый взгляд, создается впечатление, что предложенный подход снимает недостатки, присущие методу Ритца, заменой взаимодействия при помощи флюидов или мельчайших частиц между заряженными частицами на взаимодействие через энергетические вихри. Этот вопрос требует отдельного детального исследования.

Хмельник С.И. в работе [21] предложил свою гипотезу объяснения эффекта Брауна-Бифельда, заключающегося в том, что электрически заряженный конденсатор теряет вес. Исследуя задачу распределения электростатического потенциала заряженного конденсатора, он получил аналитическое решение распределения электростатического поля в объеме заряженного конденсатора, из которого следует, что в объеме конденсатора создается так называемое гармоническое статическое электрическое поле, то есть волновое изменение напряженности этого поля. Более подробной информации автор не приводит. Из приведенных материалов следует, что вопрос, связанный с применением вихрей для объяснения функционирования дискретной модели, требует отдельного исследования.

5. Заключение

Предложен новый подход к решению плохо обусловленных систем алгебраических уравнений, возникающих при решении УМФ методом конечных элементов. В отличие от общепринятого подхода к решению данной задачи, заключающегося в том, что привлекаются все принципы и способы, действующие в классической дискретной математике, предлагается на этапе формирования уравнений на сетке конечных элементов их корректно со-

ставлять. Для этого топология расчетной схемы УМФ представляется в виде графа, состоящего из двухполюсных компонент. Разработана методика представления многополюсных конечных элементов и граничных условий в виде эквивалентных схем замещения, состоящих из двухполюсных компонент, функциональные зависимости которых описывают связь между воздействием, приложенным к компоненте, и потоком, протекающим через компоненту. Полученная в виде графа дискретная модель полностью удовлетворяет требованиям метода корректного составления уравнений, предложенного в [8, 10, 11].

Приведенный пример составления графа задачи Адамара показал, что дискретная модель объекта проверяется на физическую реализуемость уже на этапе составления модели в виде графа, чего не обеспечивает существующий метод формирования уравнений для сетки конечных элементов.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Секулович М. Метод конечных элементов / Секулович М.; пер. с серб. Ю.Н. Зуева; под ред. В.Ш. Барбакадзе. – М.: Стройиздат, 1993. – 664 с.
2. Калиткин Н. Н. Количественный критерий обусловленности систем линейных алгебраических уравнений / Н.Н. Калиткин, Л.Ф. Юхно, Л.В. Кузьмина // Математическое моделирование. – 2011. Т. 23, № 2. – С. 3 – 26
3. Воеводин В.В. Вычислительные основы линейной алгебры / Воеводин В.В. – М.: Наука, 1977. – 304 с.
4. Тихонов А.Н. Методы решения некорректных задач / А.Н. Тихонов, В.Я. Арсенин. – М.: НАУКА, 1970 – 285 с.
5. Сайт Википедия [Электронный ресурс]. – Режим доступа: [http://ru.wikipedia.org/wiki/ Предобу-славливание](http://ru.wikipedia.org/wiki/Предобу-славливание).
6. Сайт Википедия [Электронный ресурс]. – Режим доступа: [http://ru.wikipedia.org/wiki/Метод главных компонент](http://ru.wikipedia.org/wiki/Метод_главных_компонент).
7. Сайт Википедия [Электронный ресурс]. – Режим доступа: [http://ru.wikipedia.org/wiki/ Псевдооб-ратная матрица](http://ru.wikipedia.org/wiki/Псевдооб-ратная_матрица).
8. Волобоев В.П. Об одном подходе к моделированию сложных систем / В.П. Волобоев, В.П. Клименко // Математичні машини і системи. – 2008. – № 4. – С. 111 – 122.
9. Волобоев В.П. Об одном подходе к моделированию энергосистем / В.П. Волобоев, В.П. Клименко // Математичні машини і системи. – 2009. – № 4. – С. 106 – 119.
10. Волобоев В.П. Об одном подходе к моделированию нелинейных электрических цепей по частям / В.П. Волобоев, В.П. Клименко // Математичні машини і системи. – 2010. – № 3. – С. 53 – 68.
11. Волобоев В.П. Один способ корректной формулировки математической модели технической (физической) задачи / В.П. Волобоев, В.П. Клименко // Математичні машини і системи. – 2011. – № 4. – С. 95 – 106.
12. Волобоев В.П. Механика стержневых систем и теория графов / В.П. Волобоев, В.П. Клименко // Математичні машини і системи. – 2012. – № 2. – С. 81 – 96.
13. Зенкевич О. Конечные элементы и аппроксимация / О. Зенкевич, К. Морган. – М.: МИР, 1986 – 318 с.
14. Бессонов Л.А. Теоретические основы электротехники. Электрические цепи / Л.А. Бессонов. – [изд. 9-е, пер., доп.]. – М.: Высшая школа, 1996. – 638 с.
15. Кузнецова О.Б. Уравнения математической физики. / О.Б. Кузнецова, С.В. Булычева [Электронный ресурс]. – Режим доступа: <http://umf.kmf.usu.ru/index.php?id=37&id1=0>.
16. Соболев С.Л. Уравнения математической физики / Соболев С.Л. – М.: Наука, 1966. – 444 с.
17. Никитин А.В. Вихрь и вихревые движители / А.В. Никитин [Электронный ресурс]. – Режим доступа: <http://www.trinitas.ru/rus/doc/0231/008a/02311070>.
18. Сайт Википедия [Электронный ресурс]. – Режим доступа: <http://ru.wikipedia.org/wiki/теплопод>.
19. Максвелл Д.К. Избранные сочинения по теории электромагнитного поля / Максвелл Д.К.; пер. с англ. З.А. Цейтлина; под ред. П.С. Кудрявцева. – М.: Гос. изд-во технико-теоретической литературы, 1952. – 687 с.

20. Сайт Баллистическая теория Ритца [Электронный ресурс]. – Режим доступа: <http://ritz-btr.narod.ru>.
21. Хмельник С.И. Конструирование летательных аппаратов на основе эффекта Бифельда-Брауна / С.И. Хмельник [Электронный ресурс]. – Режим доступа: <http://la.mic34.com/doclad.htm>.

Стаття надійшла до редакції 25.10.2013