УДК 519.6

А.Е. ГРИЩЕНКО, А.С. МАРЦАФЕЙ

ОБ ОДНОМ ДВУХШАГОВОМ АЛГОРИТМЕ РАСЩЕПЛЕНИЯ В ЗАДАЧАХ ТЕПЛОМАССОПЕРЕНОСА

Ключевые слова: *параллельные вычислительные алгоритмы, методы расщепления, разностные схемы, ДС-алгоритмы.*

ВВЕДЕНИЕ

Развитие новых современных технологий, исследование сложных природных и физических явлений под воздействием различных факторов, а также социальных проблем обусловливают построение математических моделей, удовлетворяющих требованиям высокой точности отображения реальных процессов и законов сохранения. Для достижения поставленной цели необходима обработка больших информационных потоков, содержащих как входную информацию, так и результаты решения соответствующих математических задач. Часто эти требования усложняют ограничения, налагаемые на время проведения компьютерного эксперимента (например, в режиме текущего времени). Решение поставленных задач на классических однопроцессорных компьютерах нереально [1]. В настоящее время исследования по данным проблемам проводят в нескольких направлениях: развитие многоядерных процессоров и многопроцессорных комплексов, позволяющих наращивать мощность вычислительных ресурсов; разработка новых эффективных вычислительных методов, ориентированных на распараллеливание вычислительных процессов; адаптация уже существующих вычислительных методов и алгоритмов для многопроцессорных комплексов.

В данной статье предлагается экономичный алгоритм распараллеливания вычислительных процессов при моделировании тепломассопереноса.

ПОСТАНОВКА НАЧАЛЬНО-КРАЕВОЙ ЗАДАЧИ

Задачи тепломассопереноса моделируются на основе параболизированных уравнений Навье–Стокса

$$Lu \equiv \frac{\partial u}{\partial t} + B(u) - f = 0 \tag{1}$$

в приближении несжимаемой жидкости [2]

$$\sum_{\alpha=1}^{N} \frac{\partial b_\alpha}{\partial x_\alpha} = 0 \tag{2}$$

в цилиндрической области $Q = \{\Omega \times (0 < t < T)\}$, где Ω — регулярная область в R^n с кусочно-гладкой границей $\partial\Omega$, а также

$$B(u) = -\sum_{\alpha,\,\beta=1}^{N} \frac{\partial}{\partial x_\alpha}\left(B_{\alpha\beta}(x) \frac{\partial u}{\partial x_\beta} \right) + \sum_{\alpha=1}^{N} b_\alpha(x) \frac{\partial u}{\partial x_\alpha}, \tag{3}$$

причем $B_{\alpha\beta}(x) = B_{\beta\alpha}(x)$ для всех $(\alpha, \beta = \overline{1, N})$ — непрерывно дифференцируемые по своим переменным,

$$\sum_{\alpha,\ \beta=1}^{N} B_{\alpha\beta} \xi_\alpha \xi_\beta \ge \alpha_B \sum_{\alpha=1}^{N} \xi_\alpha^2,\ \xi_\alpha \in R,\ \alpha = \overline{1, N}. \tag{4}$$

Решение задачи (1), (2) удовлетворяет заданным начальным и граничным условиям

$$u\big|_{t=0} = u^0(x),\ x \in \Omega; \quad u\big|_{\partial\Omega} = g(x),\ x \in \partial\Omega .$$

Не ограничивая общности рассуждений, далее положим $N=2$, $\Omega=\{(x_1,x_2): 0<x_1<1, 0<x_2<1\}$ и обозначим как оператор теплопроводности

$$\Lambda=\sum_{\alpha=1}^{2}\frac{\partial}{\partial x_\alpha}\left(B_\alpha\frac{\partial u}{\partial x_\alpha}\right), \tag{5}$$

а оператор конвективного переноса как

$$C^1(b)u=\vec{b}\,\mathrm{grad}\,u=\sum_{\alpha=1}^{2}b_\alpha(x)\frac{\partial u}{\partial x_\alpha}. \tag{6}$$

Легко убедиться [3, 4], что при выполнении (2) оператор (6) эквивалентен следующему:

$$C^2(b)u\equiv\mathrm{div}(\vec{b}u)=\sum_{\alpha=1}^{2}\frac{\partial(b_\alpha u)}{\partial x_\alpha}. \tag{7}$$

Если $b_n(x)=0$ или $\omega(x)=0$ при $x\in\partial\Omega$, то при выполнении условия (2) в гильбертовом пространстве $L_2(\Omega)$ имеем

$$(C^1(b)\omega,\omega)=\int_\Omega\vec{b}\,\mathrm{grad}\,\omega^2dx=\frac{1}{2}\int_\Omega\mathrm{div}(\vec{b}\omega)\,dx-\frac{1}{2}\int_{\partial\Omega}\omega^2\mathrm{div}\vec{b}\,dx=\frac{1}{2}\int_{\partial\Omega}b_n\omega^2dx=0.$$

Следовательно, оператор (6) (или (7)) является кососимметрическим. В случае, когда оператор конвективного переноса моделируется равенством

$$C^0=\frac{1}{2}\left(\sum_{\alpha=1}^{2}b_\alpha(x)\frac{\partial u}{\partial x_\alpha}+\sum_{\alpha=1}^{2}\frac{\partial(b_\alpha(x))}{\partial x_\alpha}\right), \tag{8}$$

$(C\omega,\omega)=0$, даже если условие (4) не выполняется.

РАЗНОСТНЫЕ СХЕМЫ

Для построения разностной схемы в области Ω введем равномерную сетку

$$\omega_{\tau h}=\left\{x_{1,i},x_{2,j},t_n: x_{1,i}=ih_1,\ x_{2,j}=jh_2,\ t_n=n\tau;\ i=\overline{1,m_1},\ j=\overline{1,m_2},\right.$$
$$\left.h_k=\frac{1}{m_k}\ (k=1,2),\ \tau>0\right\}$$

и разностные операторы

$$y_{\overset{0}{x}}=\frac{y_{i+1}-y_{i-1}}{2h}=\frac{du}{dx}+O(h^2);\quad y_{\bar{x}}=\frac{y_i-y_{i-1}}{h}=\frac{du}{dx}+O(h);$$
$$y_x=\frac{y_{i+1}-y_i}{h}=\frac{du}{dx}+O(h);$$
$$\Lambda_\alpha y=(a_\alpha y_{\bar{x}_\alpha})_{x_\alpha}=\frac{\partial}{\partial x_\alpha}\left(B_{\alpha\alpha}\frac{\partial u}{\partial x_\alpha}\right)+O(h^2). \tag{9}$$

Тогда начально-краевую задачу (1), (2) аппроксимируем разностной схемой

$$L_h y_{ij}^{n+1}\equiv\frac{y_{ij}^{n+1}-y_{ij}^{n}}{\tau}+\sigma_1C(b)y_{ij}^n+(1-\sigma_1)C^0(b)y_{ij}^{n+1}-$$
$$-\sigma_2\Lambda y_{ij}^n-(1-\sigma_2)\Lambda y_{ij}^{n+1}=\sigma_3f_{ij}^n+(1-\sigma_3)f_{ij}^{n+1}=0. \tag{10}$$

Здесь $\sigma_1,\sigma_2,\sigma_3$ — положительные постоянные, которые определяются из условий аппроксимации и устойчивости разностной схемы, а оператор конвективного переноса может быть выбран одной из форм записей

$$C(b)y=\frac{1}{2}\sum_{\alpha=1}^{2}((b_\alpha(x)y)_{\overset{0}{x}_\alpha}+b_\alpha(x)y_{\overset{0}{x}_\alpha}) \tag{11}$$

или

$$C(b)\,y=\frac{1}{2}\sum_{\alpha=1}^{2}((b_\alpha^-(x)\,y)_x+b^+(x)\,y_{\bar{x}}+(b_\alpha^-(x)\,y)_{\bar{x}_\alpha}+(b_\alpha^+(x)\,y)_{x_\alpha}),\qquad(12)$$

где

$$b_\alpha(x)=b_\alpha^+(x)+b^-(x);\ b_\alpha^+(x)=\frac{1}{2}(b_\alpha(x)+|\,b_\alpha(x)\,|)\ge 0;$$

$$b_\alpha^-(x)=\frac{1}{2}(b_\alpha(x)-|\,b_\alpha(x)\,|)\le 0,\ \alpha=1,2.$$

Данные операторы кососимметрические, но разностный оператор в виде (11) имеет второй порядок аппроксимации, а в виде (12) — первый. Кроме того, (12) является оператором с разностями против потока.

Оператор $\Lambda\,y$ запишем в виде $\Lambda=\Lambda_1+\Lambda_2$, а Λ_α $(\alpha=1,2)$ — по формуле (9), полагая $a_\alpha=B_\alpha(x_\alpha-0{,}5h_\alpha)$.

ДВУХШАГОВЫЙ СИММЕТРИЗИРОВАННЫЙ АЛГОРИТМ (ДС-АЛГОРИТМ)

Введенную сеточную область $\omega_{\tau h}$ разделим на два вспомогательных множества: $\Omega_{\tau h}^{(1,n)}$ и $\Omega_{\tau h}^{(2,n)}$. Элементами первого множества назовем точки $(x_{1,i},x_{2,j},t_n)$ такие, что сумма индексов $s=i+j+n$ четная, а остальные точки отнесем ко второму множеству. Будем считать, что временной шаг 2τ имеет две составляющие: нечетный полушаг $(2n+1)$ и четный $(2n+2)$. На полушаге $(2n+1)$ сначала вычисляются значения y_{ij}^{2n+1} во всех точках $\Omega_{\tau h}^{(1,2n+1)}$ по явным разностным формулам [5, 6]

$$\frac{y_{ij}^{2n+1}-y_{ij}^{2n}}{\tau}=C(b)\,y_{ij}^{2n}-\Lambda\,y_{ij}^{2n}-f_{ij}^{2n+1},\qquad(13)$$

а затем в точках $\Omega_{\tau h}^{(2,2n+1)}$ — по неявным формулам

$$\frac{y_{ij}^{2n+1}-y_{ij}^{2n}}{\tau}=C(b)\,y_{ij}^{2n+1}-\Lambda\,y_{ij}^{2n+1}-f_{ij}^{2n+1}.\qquad(14)$$

На полушаге $(2n+2)$ находим решение задачи сначала в узлах $\Omega_{\tau h}^{(1,2n+2)}$

$$\frac{y_{ij}^{2n+2}-y_{ij}^{2n+1}}{\tau}=C(b)\,y_{ij}^{2n+1}-\Lambda\,y_{ij}^{2n+1}-f_{ij}^{2n+1},\qquad(15)$$

после чего в точках $\Omega_{\tau h}^{(2,2n+2)}$ получаем

$$\frac{y_{ij}^{2n+2}-y_{ij}^{2n+1}}{\tau}=C(b)\,y_{ij}^{2n+2}-\Lambda\,y_{ij}^{2n+2}-f_{ij}^{2n+1}.\qquad(16)$$

Схема (13)–(16) позволяет проводить вычисления искомой функции во всех узлах $\omega_{\tau h}$ по явным расчетным алгоритмам с погрешностью аппроксимации $O(\tau^2+h^2)$, если $C(b)$ определен по формуле (11), или с погрешностью $O(\tau^2+h)$, если для оператора $C(b)$ использована формула (12).

Важное место в построении вычислительного алгоритма имеет аппроксимация краевых условий. Будем считать, что условия первого рода во всех граничных узлах сеточной области, за исключением угловых точек прямоугольника, а в случае многомерной области — ребер сеточного параллелепипеда, удовлетворяются точно.

Рассмотрим аппроксимацию условия третьего рода, заданного, например, на границе $x=1$:

$$\frac{\partial\vec{u}}{\partial x}+c\vec{u}=\vec{d}.\qquad(17)$$

Условие (17) можно аппроксимировать односторонними разностями с первым порядком точности

$$(1+ch_1)\,y_{m_1 j}^{2n+l}-y_{m_1-1\,j}^{2n+l}=dh_1\quad(l=1,2)\qquad(18)$$

или со вторым порядком на трехточечном шаблоне

$$(1+2ch_1)\, y_{m_1 j}^{2n+l} - 4\, y_{m_1-1 j}^{2n+l} + y_{m_1-2 j}^{2n+l} = 2dh_1. \tag{19}$$

Пусть приграничная точка $(x_{m_1-1}, y_j, t_n) \in \Omega_{\tau h}^{(1,\,2n+1)}$, тогда значение $y_{m_1-1 j}^{2n+1}$ вычисляется по формуле

$$y_{m_1-1 j}^{2n+1} = y_{m_1-1 j}^{2n} + \tau (C(b)\, y_{m_1-1 j}^{2n} - \Lambda\, y_{m_1-1 j}^{2n} - f_{m_1-1 j}^{\,2n}),$$

а $y_{m_1 j}^{2n+1}$ — из условия (18) или (19).

Если точка с индексами $(m_1-1,\, j,\, 2n+1)$ принадлежит $\Omega_{\tau h}^{(2,2n+1)}$, то $y_{m_1-1 j}^{2n+1}$ и $y_{m_1 j}^{2n+1}$ определяются из системы

$$\begin{cases} a_{11}\, y_{m_1-1 j}^{2n+1} + a_{12}\, y_{m_1 j}^{2n+1} = b_1, \\ a_{21}\, y_{m_1-1 j}^{2n+1} + a_{22}\, y_{m_1 j}^{2n+1} = b_2, \end{cases}$$

где a_{ij} $(i, j = 1, 2)$ однозначно определяются коэффициентами разностных операторов $C(b)$ и Λ.

СХЕМЫ РАСЩЕПЛЕНИЯ РАЗНОСТНЫХ ЗАДАЧ

Построение схем расщепления задач тепломассопереноса основано на двух принципах: расщепление по физическим процессам и расщепление по пространственным координатам.

В первом случае выделяются два разностных оператора: $C(b)$ и Λ, которые описывают процесс конвективного переноса и теплопроводности.

Обозначив $A_1 = C(b)$, $A_2 = \Lambda$ и учитывая, что $A_1 = -A_1^*$; $A_2 = A_2^* > 0$, для задачи тепломассопереноса можно наряду со схемами суммарной аппроксимации [3] использовать схему переменных направлений

$$\begin{gathered} \frac{y^{n+1/2} - y^n}{0{,}5\tau} + A_1 y^{n+1/2} + A_2 y^n = \varphi^n, \\ \frac{y^{n+1} - y^{n+1/2}}{0{,}5\tau} + A_1 y^{n+1/2} + A_2 y^{n+1} = \varphi^n. \end{gathered} \tag{20}$$

Такие схемы детально исследованы в [7, 8].

Среди схем суммарной аппроксимации расщепления по физическим процессам часто применяется аддитивная схема с весами

$$\begin{gathered} \frac{y^{n+1/2} - y^n}{\tau} + A_1 (\sigma_1 y^{n+1/2} + (1-\sigma_1)\, y^n) = \varphi_1^n, \\ \frac{y^{n+1} - y^{n+1/2}}{\tau} + A_2 (\sigma_2 y^{n+1/2} + (1-\sigma_2)\, y^{n+1}) = \varphi_2^n, \\ \varphi_1^n + \varphi_2^n = \varphi^n. \end{gathered} \tag{21}$$

Устойчивость и сходимость в гильбертовом пространстве (с учетом суммарной аппроксимации) обеспечивается при $\sigma_1, \sigma_2 \ge 0{,}5$.

При решении многомерных задач алгоритм расщепления строится на основе аддитивного представления операторов физических процессов $B(u)$ (см. (3)) в виде суммы одномерных операторов конвекции A_α и теплопроводности Λ_α в направлении x_α:

$$B(u) = \sum_{\alpha=1}^{2} B_\alpha (u),\ B_\alpha (u) = A_\alpha u + \Lambda_\alpha u \quad (\alpha = 1, 2). \tag{22}$$

Иногда локально-одномерные разностные схемы суммарной аппроксимации строятся на основе комбинированного расщепления по направлениям и физическим процессам [4]

$$\frac{y^{n+\alpha/4}-y^{n+(\alpha-1)/4}}{\tau}+\widetilde{A}_\alpha(\sigma_\alpha y^{n+\alpha/4}+(1-\sigma_\alpha)y^{n+(\alpha-1)/4})]=\varphi_\alpha^n \quad (\alpha=1,4), \qquad (23)$$

причем $\widetilde{A}_\alpha=A_\alpha$ $(\alpha=1,2)$ и $\widetilde{A}_\alpha=\Lambda_{\alpha-2}$ $(\alpha=3,4)$; $\varphi^n=\varphi_1^n+\varphi_2^n+\varphi_3^n+\varphi_4^n$.

Данная схема устойчива при $\sigma_\alpha \geq 0{,}5$ $(\alpha=\overline{1,4})$.

ПОСТРОЕНИЕ АДДИТИВНЫХ СХЕМ РАСЩЕПЛЕНИЯ ПО ПРОСТРАНСТВЕННЫМ НАПРАВЛЕНИЯМ НА ОСНОВЕ ДС-АЛГОРИТМОВ

При использовании разностных уравнений (21) или (23) на каждом дробном и целом шагах необходимо решать систему уравнений. Использование ДС-алгоритма позволяет избавиться от этой процедуры. С учетом приведенной выше общей схемы ДС-алгоритма (13)–(16) запишем аддитивную схему расщепления по пространственным направлениям.

Предположим, что $\sum_{\alpha=1}^{2}\frac{\partial b_\alpha}{\partial x_\alpha}=0$. Следовательно, оператор конвективного переноса $C(b)$ — кососимметрический. Обозначим

$$C(b)=\sum_{\alpha=1}^{2}C_\alpha(b)=A_1^1+A_1^2;\ \Lambda=\Lambda_1+\Lambda_2.$$

Индексы 1 и 2 указывают направление действия операторов A_α и Λ_α вдоль пространственных координат x_1 и x_2.

Аддитивную схему расщепления (с суммарной аппроксимацией) запишем как последовательное решение совокупности одномерных разностных задач:

$$\frac{1}{2}\frac{y_{ij}^{4n+1+2(\alpha-1)}-y_{ij}^{4n+2(\alpha-1)}}{\tau}+A_\alpha^1 y_{ij}^{4n+2(\alpha-1)}+\Lambda_\alpha y_{ij}^{4n+2(\alpha-1)}=\widetilde{\varphi}_{ij}^{4n+2(\alpha-1)}, \qquad (24)$$

$$(x_{1,i},x_{2,j},t_n)\in\Omega_{\tau h}^{(1,4n+1+2(\alpha-1))},$$

$$\frac{1}{2}\frac{y_{ij}^{4n+1+2(\alpha-1)}-y_{ij}^{4n+2(\alpha-1)}}{\tau}+A_\alpha^1 y_{ij}^{4n+1+2(\alpha-1)}+\Lambda_\alpha y_{ij}^{4n+1+2(\alpha-1)}=\widetilde{\varphi}_{ij}^{4n+2(\alpha-1)},$$

$$(x_{1,i},x_{2,j},t_n)\in\Omega_{\tau h}^{(2,4n+1+2(\alpha-1))}, \qquad (25)$$

$$\frac{1}{2}\frac{y_{ij}^{4n+2+2(\alpha-1)}-y_{ij}^{4n+1+2(\alpha-1)}}{\tau}+A_\alpha^1 y_{ij}^{4n+1+2(\alpha-1)}+$$

$$+\Lambda_\alpha y_{ij}^{4n+1+2(\alpha-1)}=\widetilde{\varphi}_{ij}^{4n+2+2(\alpha-1)},\ (x_{1,i},x_{2,j},t_n)\in\Omega_{\tau h}^{(1,4n+2+2(\alpha-1))}, \qquad (26)$$

$$\frac{1}{2}\frac{y_{ij}^{4n+2+2(\alpha-1)}-y_{ij}^{4n+1+2(\alpha-1)}}{\tau}+A_\alpha^1 y_{ij}^{4n+2+2(\alpha-1)}+$$

$$+\Lambda_\alpha y_{ij}^{4n+2+2(\alpha-1)}=\widetilde{\varphi}_{ij}^{4n+2+2(\alpha-1)},\ (x_{1,i},x_{2,j},t_n)\in\Omega_{\tau h}^{(2,4n+2+2(\alpha-1))}, \qquad (27)$$

$$\alpha=1,2;\ \widetilde{\varphi}_{ij}^{n+1}=\frac{1}{2}\varphi_{ij}^n.$$

Полагая в формулах (24)–(27) $\alpha=1$, явно вычисляем значения функции, которая приближает решение задачи расщепления вдоль направления x_1. Полагая далее $\alpha=2$ и проводя последовательные вычисления по тем же формулам, находим приближенное решение задачи вдоль x_2 и в целом.

Суммируя формулы (24) и (27), а также (25) и (26), полученные при $\alpha=1$, с точностью до $O(\tau^2)$, получаем

$$\frac{1}{2}\frac{y_{ij}^{4n+2}-y_{ij}^{4n}}{2\tau}+A_1^1 y_{ij}^{4n+1}+\Lambda_1 y_{ij}^{4n+1}=\frac{1}{2}\varphi_{ij}^{4n+1}, \tag{28}$$

а при $\alpha=2$ имеем

$$\frac{1}{2}\frac{y_{ij}^{4n+4}-y_{ij}^{4n+2}}{2\tau}+A_1^2 y_{ij}^{4n+3}+\Lambda_2 y_{ij}^{4n+3}=\frac{1}{2}\varphi_{ij}^{4n+3}. \tag{29}$$

Прибавив к (28) формулу (29), окончательно получим

$$\frac{y_{ij}^{4n+4}-y_{ij}^{4n}}{4\tau}+A_1^1 y_{ij}^{4n+1}+A_1^2 y_{ij}^{4n+3}+\Lambda_1 y_{ij}^{4n+1}+\Lambda_2 y_{ij}^{4n+3}=\varphi_{ij}^{4n+2}. \tag{30}$$

Нетрудно показать, что разностное уравнение (30) аппроксимирует дифференциальное уравнение (1) с первым порядком по τ. Порядок аппроксимации по пространственным переменным определяется порядком аппроксимации конвективного оператора.

УСТОЙЧИВОСТЬ АЛГОРИТМА (24)–(27)

Исследование устойчивости разностного алгоритма проведем за два шага: сначала положим $\varphi_{ij}=0$ и исследуем устойчивость по начальным данным, а затем рассмотрим систему с ненулевой правой частью.

Запишем алгоритм расщепления (24)–(27) в операторном виде. Обозначим $L_1=A_1^1+\Lambda_1$, $L_2=A_1^2+\Lambda_2$, а через y^n будем обозначать векторы с координатами y_{ij}^n $(i=\overline{1,m_1},\ j=\overline{1,m_2})$. Рассмотрим случай когда $\alpha=1$:

$$\vec{y}^{\,4n+1}=(E-2\tau L_1)\vec{y}^{\,4n} \ \text{ в узлах } \Omega_{\tau h}^{(1,4n+1)}, \tag{31}$$

$$(E+2\tau L_1)\vec{y}^{\,4n+1}=\vec{y}^{\,4n} \ \text{ в узлах } \Omega_{\tau h}^{(2,4n+1)}, \tag{32}$$

$$\vec{y}^{\,4n+2}=(E-2\tau L_1)\vec{y}^{\,4n+1} \ \text{ в узлах } \Omega_{\tau h}^{(1,4n+1)}, \tag{33}$$

$$(E+2\tau L_1)\vec{y}^{\,4n+2}=\vec{y}^{\,4n+1} \ \text{ в узлах } \Omega_{\tau h}^{(2,4n+1)}. \tag{34}$$

Подставляя (31) в (34), а (32) в (33), соответственно получаем

$$y^{4n+2}=(E+2\tau L_1)^{-1}(E-2\tau L)y^{4n}, \tag{35}$$

$$y^{4n+2}=(E+2\tau L_1)(E-2\tau L)^{-1}y^{4n}. \tag{36}$$

Обозначим

$$A=(E-2\tau L_1),\ B=(E+2\tau L_1). \tag{37}$$

Лемма 1. Операторы A и B^{-1}, определенные формулами (37), перестановочные.

Доказательство леммы 1 следует из того, что если C и D — перестановочные операторы, то C и D^{-1} также перестановочные.

Действительно,

$$CD^{-1}=D^{-1}(DC)D^{-1}=D^{-1}(CD)D^{-1}=D^{-1}C.$$

Далее, из непосредственного умножения $A\cdot B$ и $B\cdot A$ (формулы (37)) и сравнения результата приходим к утверждению леммы 1.

Из леммы 1 следует, что формулы (35) и (36) эквивалентны.

Полностью аналогичные результаты получаем и для случая $\alpha=2$. Следовательно,

$$\vec{y}^{\,4n+4}=(E-2\tau L_2)(E+2\tau L_2)^{-1}\vec{y}^{\,4n+2}. \tag{38}$$

Из (36) и (38) запишем

$$\vec{y}^{\,4n+4}=(E-2\tau L_2)(E+2\tau L_2)^{-1}(E-2\tau L_1)(E+2\tau L_1)^{-1}\vec{y}^{\,4n}$$

или, обозначив $G_\alpha = (E - 2\tau L_\alpha)(E + 2\tau L_\alpha)$ $(\alpha = 1, 2)$ и $G = G_1 \cdot G_2$, получим

$$\vec{y}^{4n+4} = G\vec{y}^{4n}$$

или

$$\vec{y}^{4n+4} = G^n \vec{y}^0. \tag{39}$$

Здесь G — оператор перехода из слоя $4n$ на слой $4n+4$.

Теорема. ДС-алгоритм (24)–(27), безусловно, устойчив по начальным данным.

Для доказательства теоремы необходимо показать, что множество операторов G^n равномерно ограничено сверху.

Введем банахово пространство сеточных функций B_h. Очевидно, что $\|G\| \le \|G_1\| \cdot \|G_2\|$. Оценим $\|G_\alpha\|$ $(\alpha = 1, 2)$:

$$\|G_\alpha\|^2 = \sup_{\vec{\varphi} \ne 0} \frac{((E - 2\tau L_\alpha)(E + 2\tau L_\alpha)^{-1}\vec{\varphi},\, (E - 2\tau L_\alpha)(E + 2\tau L_\alpha)^{-1}\vec{\varphi})}{(\vec{\varphi}, \vec{\varphi})} =$$

$$= \sup_{\overline{\Phi} \ne 0} \frac{((E - 2\tau L_\alpha)\overline{\Phi},\, (E - 2\tau L_\alpha)\overline{\Phi})}{((E + 2\tau L_\alpha)\overline{\Phi},\, (E + 2\tau L_\alpha)\overline{\Phi})} =$$

$$= \sup_{\Phi \ne 0} \frac{(\overline{\Phi}, \overline{\Phi}) + 4\tau^2 (L_\alpha \overline{\Phi}, L_\alpha \overline{\Phi}) - 4\tau (L_\alpha \overline{\Phi}, \overline{\Phi})}{(\overline{\Phi}, \overline{\Phi}) + 4\tau^2 (L_\alpha \overline{\Phi}, L_\alpha \overline{\Phi}) + 4\tau (L_\alpha \overline{\Phi}, \overline{\Phi})} \le 1$$

при $(L_\alpha \overline{\Phi}, \overline{\Phi}) \ge 0$. Здесь $\overline{\Phi} = (E + 2\tau L_\alpha)^{-1} \vec{\varphi}$.

Лемма 2. Оператор L_α $(\alpha = 1, 2)$ положительно-определенный.

Поскольку $L_\alpha = A_1^\alpha + \Lambda_\alpha$, где A_1^α — кососимметрический , а Λ_α — положительно-определенный операторы, имеем

$$(L_\alpha y, y) = (A_1^\alpha y, y) + (\Lambda_\alpha y, y) = (\Lambda_\alpha y, y) > 0.$$

Следовательно, $\|G\| \le 1$ и устойчивость по начальным данным доказана.

Доказательство устойчивости по правой части системы с точностью до преобразований аналогично доказательству, приведенному в работе [5].

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Для решения задач тепломассопереноса на многопроцессорных компьютерах предложен экономичный разностный двухшаговый алгоритм распараллеливания вычислительного процесса, исключающий необходимость решения систем разностных уравнений на каждом временнóм шаге. Установлена суммарная аппроксимация алгоритма и доказана его безусловная устойчивость.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Використання багатопроцесорних комп'ютерів для розв'язування задач розрахунку міцності конструкцій / О.М. Хіміч, В.В. Полянко, О.В. Попов, О.В. Рудич // Праці міжнар. симп. «Питання оптимізації обчислень» (ПОО-XXXV). — Київ, 2009. — **2**. — С. 382–387.
2. Ладыженская О.А. Математические вопросы динамики несжимаемой жидкости. — М.: Наука, 1970. — 288 с.
3. Самарский А.А., Вабищевич П.Н. Вычислительная теплопередача. — М.: УРСС, 2003. — 784с.
4. Ковеня В.М., Яненко Н.Н. Методы расщепления в задачах газовой динамики. — Новосибирск: Наука, 1981. — 304 с.
5. Грищенко О.Ю. ДС-різницеві алгоритми розв'язування крайових задач для параболічних рівнянь другого порядку // Вісн. Київ. ун-ту. Серія: фіз.-мат. науки. — 2000. — Вип. 1. — С. 227–231.
6. Ляшко Н.И., Грищенко А.Е., Оноцкий В.В. Об одном алгоритме регуляризации управления параболическими системами // Кибернетика и системный анализ. — 2006. — № 1. — С. 86–94.
7. Марчук Г.И. Методы вычислительной математики. — М.: Наука, 1989. — 608 с.
8. Марчук Г.И. Методы расщепления. — М.: Наука, 1988. — 264 с.

Поступила 23.04.2010