
**НЕКЛАССИЧЕСКАЯ МАТЕМАТИЧЕСКАЯ МОДЕЛЬ
ГЕОИНФОРМАТИКИ ДЛЯ РЕШЕНИЯ ЗАДАЧ ДИНАМИКИ
НЕРАВНОВЕСНЫХ НЕИЗОТЕРМИЧЕСКИХ
ГЕОФИЛЬТРАЦИОННЫХ ПОЛЕЙ**

Ключевые слова: математическое моделирование, неклассические модели, неравновесная неизотермическая геофильтрация, системы дифференциальных уравнений, краевые задачи, приближенные решения.

ВВЕДЕНИЕ

В настоящее время значительно возрос интерес к разработке геоинформационных систем, включающих задачи математического моделирования особенностей динамики пространственно-временных процессов геофильтрации и массопереноса, протекающих в сложных горно-геологических условиях. Это преимущественно связано как с разработкой и обоснованием современных геотехнологий добычи углеводородов и других полезных ископаемых, так и с вопросами экологической безопасности и охраны подземных вод и водозаборов от загрязнений, в частности техногенного характера. Следует особо отметить актуальность исследований в области изучения динамики процессов переноса в геосредах сложной структуры (трещиноватость, кавернозность, микронеоднородность и т.д.) при фильтрации неньтоновских жидкостей (растворов полимеров, нефти, буровых растворов, смесей, эмульсий, полиэлектролитов и многих других) [1–3].

Изучение особенностей динамики сложных геофильтрационных процессов играет важную роль также при решении задач охраны подземных вод от загрязнений токсичным содержимым поверхностных накопителей промышленных и бытовых стоков (шламо- и хвостохранилищ), в частности при выработке инженерных решений, минимизирующих вредное воздействие содержимого накопителей на окружающую среду. В случае заполнения данных гидросооружений отходами горной или химической промышленности, являющимися солевыми растворами, особую актуальность приобретают разработки в области математического моделирования динамики геофильтрационных процессов в пористых или трещиновато-пористых массивах, насыщенных такими растворами.

В настоящее время ведутся комплексные исследования в области математического моделирования динамики геофильтрации солевых растворов [4–7] при учете релаксационных свойств жидкости [3, 8], релаксационных свойств пористого скелета [4], неизотермичности процесса и термодиффузии [6, 7], теплового расширения жидкой фазы [9], влияния геохимических факторов подземного выщелачивания [10] и др.

Проявляющаяся в сложных горно-геологических условиях неравновесность геофильтрационного процесса, обусловленная рядом причин [1, 4], приводит к необходимости разработки методов математического моделирования динамики локально-неравновесных геофильтрационных процессов. В настоящее время ощущается острый недостаток в адекватных количественных моделях процессов массо- и теплопереноса в системах со сложной пространственно-временной структурой, для которых характерны эффекты памяти, пространственной нело-

кальности и самоорганизации. В этой связи в настоящей работе построена новая математическая модель для исследования динамики неізотермического процесса фильтрации солевых растворов в геопористой среде в условиях сильной временной нелокальности. В рамках предложенной модели выполнена постановка соответствующей краевой задачи теории неізотермической геофильтрации для массива конечной мощности с проницаемыми гранями, разработана методика приближенного решения указанной краевой задачи и приведены результаты численного эксперимента.

ПОСТРОЕНИЕ МАТЕМАТИЧЕСКОЙ МОДЕЛИ ПРОЦЕССА И ПОСТАНОВКА КРАЕВОЙ ЗАДАЧИ

Используем следующее обобщение одномерного геофильтрационного закона Дарси [11, 12] на случай движения солевых растворов с учетом осмоса в условиях неізотермичности и сильной временной нелокальности:

$$u_x = D_t^{1-\beta} \left(-\frac{k}{\mu^*} \frac{\partial p}{\partial x} + \nu \frac{\partial C}{\partial x} + \mu \frac{\partial T}{\partial x} \right), \quad (1)$$

где u_x — скорость фильтрации, x — геометрическая переменная, p — давление, C — концентрация солей в жидкой фазе, T — температура, k — коэффициент фильтрации, μ^* — вязкость жидкости, ν — коэффициент осмоса, μ — коэффициент термоосмоса [7], $D_t^{1-\beta}$ — оператор дробного дифференцирования Римана–Лиувилля [13–15] порядка $1-\beta$ ($0 < \beta \leq 1$).

Отсюда с учетом уравнения неразрывности [11, 12]

$$\frac{\partial u_x}{\partial x} + \beta_1^* \frac{\partial p}{\partial t} = 0 \quad (2)$$

(β_1^* — коэффициент упругоэтомкости пласта) получаем уравнение для определения фильтрационного давления в виде

$$\frac{\partial p}{\partial t} = D_t^{1-\beta} \left(\kappa \frac{\partial^2 p}{\partial x^2} - \eta \frac{\partial^2 C}{\partial x^2} - \xi \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} \right) \quad (3)$$

или

$$D_t^{(\beta)} p(x, t) = \kappa \frac{\partial^2 p}{\partial x^2} - \eta \frac{\partial^2 C}{\partial x^2} - \xi \frac{\partial^2 T}{\partial x^2}, \quad (4)$$

где

$$\kappa = \frac{k}{\mu^* \beta_1^*}, \quad \eta = \frac{\nu}{\beta_1^*}, \quad \xi = \frac{\mu}{\beta_1^*},$$

$D_t^{(\beta)}$ — оператор регуляризованной дробной производной (по Капуто [16–18]) порядка β .

Предполагая также наличие условий сильной временной нелокальности и для диффузионного процесса, будем исходить из следующего обобщения закона Фика:

$$q = D_t^{1-\beta} \left(-d \frac{\partial C}{\partial x} + C J_t^{1-\beta} u_x \right), \quad (5)$$

где q — диффузионный поток, d — коэффициент диффузии, $J_t^{1-\beta}$ — дробный интеграл Римана–Лиувилля порядка $1-\beta$ [13–19]. Для получения уравнения конвективной диффузии растворимых веществ при геофильтрации солевых

растворов запишем одномерное уравнение баланса массы в виде [12]

$$\sigma \frac{\partial C}{\partial t} + \frac{\partial q}{\partial x} = 0, \quad (6)$$

где σ — пористость среды. Тогда из соотношения (6) с учетом (1) и (5) в предположении слабой сжимаемости среды получаем, в первом приближении, уравнение для концентрации в виде

$$\sigma \frac{\partial C}{\partial t} = D_t^{1-\beta} \left(d \frac{\partial^2 C}{\partial x^2} + \left(\frac{k}{\mu} \frac{\partial p}{\partial x} - \nu \frac{\partial C}{\partial x} - \mu \frac{\partial T}{\partial x} \right) \frac{\partial C}{\partial x} \right) \quad (7)$$

или

$$\sigma D_t^{(\beta)} C(x, t) = d \frac{\partial^2 C}{\partial x^2} + \left(\frac{k}{\mu} \frac{\partial p}{\partial x} - \nu \frac{\partial C}{\partial x} - \mu \frac{\partial T}{\partial x} \right) \frac{\partial C}{\partial x}. \quad (8)$$

Для замыкания системы уравнений модели получим уравнение динамики процесса теплопереноса в пористой среде, руководствуясь следующими соображениями.

Запишем закон сохранения энергии в виде [12]

$$\frac{\partial e}{\partial t} + \frac{\partial q_1}{\partial x} = 0, \quad (9)$$

где e — объемная плотность энергии, q_1 — удельный поток энергии. Предположим, что для q_1 имеет место следующее обобщение закона теплопроводности Фурье на случай временной нелокальности процесса:

$$q_1 = D_t^{1-\beta} \left(-\lambda \frac{\partial T}{\partial x} + \rho C_\rho T J_t^{1-\beta} u_x \right), \quad (10)$$

где ρ — плотность порового раствора, C_ρ — удельная теплоемкость порового раствора, λ — коэффициент теплопроводности. С учетом известного соотношения [12]

$$\frac{\partial e}{\partial t} = C_T \frac{\partial T}{\partial t}$$

(C_T — объемная теплоемкость среды) получаем из (9), (10) в первом приближении уравнение для определения температуры $T(x, t)$ в виде

$$D_t^{(\beta)} T(x, t) = \lambda_1 \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \left(\kappa_1 \frac{\partial p}{\partial x} - \nu_1 \frac{\partial C}{\partial x} - \mu_1 \frac{\partial T}{\partial x} \right) \frac{\partial T}{\partial x}, \quad (11)$$

где $\lambda_1 = \frac{\lambda}{C_T}$, $\kappa_1 = \frac{k}{\mu \rho C_\rho}$, $\nu_1 = \frac{\nu}{\rho C_\rho}$, $\mu_1 = \frac{\mu}{\rho C_\rho}$.

Таким образом, неклассическая математическая модель неизотермической геофильтрации солевых растворов с учетом химического осмоса и термоосмоса в условиях временной нелокальности базируется на системе уравнений дробного порядка вида

$$D_t^{(\beta)} p(x, t) = \kappa \frac{\partial^2 p}{\partial x^2} - \eta \frac{\partial^2 C}{\partial x^2} - \xi \frac{\partial^2 T}{\partial x^2}, \quad (12)$$

$$\sigma D_t^{(\beta)} C(x, t) = d \frac{\partial^2 C}{\partial x^2} + \left(\frac{k}{\mu} \frac{\partial p}{\partial x} - \nu \frac{\partial C}{\partial x} - \mu \frac{\partial T}{\partial x} \right) \frac{\partial C}{\partial x}, \quad (13)$$

$$D_t^{(\beta)} T(x, t) = \lambda_1 \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \left(\kappa_1 \frac{\partial p}{\partial x} - \nu_1 \frac{\partial C}{\partial x} - \mu_1 \frac{\partial T}{\partial x} \right) \frac{\partial T}{\partial x}. \quad (14)$$

Математическая модель, базирующаяся на уравнениях (12)–(14), обобщает на случай наличия локально-неравновесных во времени условий протекания процесса массотеплопереноса известную [7] общепринятую математическую модель неизотермической фильтрации солевых растворов в деформируемых пористых средах в условиях осмотических явлений. Действительно, из (12)–(14) при $\beta \rightarrow 1$ получаем систему уравнений общепринятой математической модели в виде [6, 7, 9]

$$\frac{\partial p}{\partial t} = \kappa \frac{\partial^2 p}{\partial x^2} - \eta \frac{\partial^2 C}{\partial x^2} - \xi \frac{\partial^2 T}{\partial x^2}, \quad (15)$$

$$\sigma \frac{\partial C}{\partial t} = d \frac{\partial^2 C}{\partial x^2} + \left(\frac{k}{\mu} \frac{\partial p}{\partial x} - \nu \frac{\partial C}{\partial x} - \mu \frac{\partial T}{\partial x} \right) \frac{\partial C}{\partial x}, \quad (16)$$

$$\frac{\partial T}{\partial t} = \lambda_1 \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \left(\kappa_1 \frac{\partial p}{\partial x} - \nu_1 \frac{\partial C}{\partial x} - \mu_1 \frac{\partial T}{\partial x} \right) \frac{\partial T}{\partial x}. \quad (17)$$

При этом очевидно, что формальная замена производных по времени в уравнениях модели (15)–(17) их дробными аналогами непосредственно приводит к уравнениям неклассической модели (12)–(14).

В рамках предложенной математической модели моделирование динамики полей давлений, концентраций и температур при геофильтрации в условиях временной нелокальности составляющих процесса сводится, например в случае массива конечной мощности l с проницаемыми границами, к решению в области $(0, l) \times (0, +\infty)$ системы уравнений (12)–(14) с краевыми условиями

$$p(0, t) = 0, \quad p(l, t) = 0, \quad p(x, 0) = p_0, \quad (18)$$

$$C(0, t) = C_0, \quad \frac{\partial C(l, t)}{\partial x} = 0, \quad C(x, 0) = 0, \quad (19)$$

$$T(0, t) = T_0, \quad T(l, t) = 0, \quad T(x, 0) = 0, \quad (20)$$

где p_0 — начальное фильтрационное давление, C_0, T_0 — заданные значения соответственно концентрации солей и температуры на входе фильтрационного потока.

Введем в рассмотрение безразмерные переменные и параметры соотношениями

$$\begin{aligned} x' &= \frac{x}{l}, \quad t' = \left(\frac{\kappa}{l^2} \right)^{\frac{1}{\beta}} t, \quad C' = \frac{C}{C_0}, \quad p' = \frac{p}{p_0}, \quad T' = \frac{T}{T_0}, \\ \eta' &= \frac{\eta C_0}{\kappa p_0}, \quad \xi' = \frac{\xi T_0}{\kappa p_0}, \quad \lambda_1' = \frac{\lambda_1}{\kappa}, \quad k' = \frac{k p_0}{\mu \kappa}, \quad \kappa_1' = \frac{\kappa_1 p_0}{\kappa}, \\ \nu_1' &= \frac{\nu_1 C_0}{\kappa}, \quad \mu_1' = \frac{\mu_1 T_0}{\kappa}, \quad d' = \frac{d}{\kappa}, \quad \nu' = \frac{\nu C_0}{\kappa}, \quad \mu' = \frac{\mu T_0}{\kappa}. \end{aligned} \quad (21)$$

Переходя в соотношениях (12)–(14), (18)–(20) к безразмерным переменным согласно соотношениям (21) и опуская в дальнейшем знак штрих над безразмерными величинами, получаем следующую нелинейную краевую задачу:

$$D_t^{(\beta)} p(x, t) = \frac{\partial^2 p}{\partial x^2} - \eta \frac{\partial^2 C}{\partial x^2} - \xi \frac{\partial^2 T}{\partial x^2}, \quad (22)$$

$$\sigma D_t^{(\beta)} C(x, t) = d \frac{\partial^2 C}{\partial x^2} + \left(k \frac{\partial p}{\partial x} - \nu \frac{\partial C}{\partial x} - \mu \frac{\partial T}{\partial x} \right) \frac{\partial C}{\partial x}, \quad (23)$$

$$D_t^{(\beta)} T(x, t) = \lambda_1 \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \left(\kappa_1 \frac{\partial p}{\partial x} - \nu_1 \frac{\partial C}{\partial x} - \mu_1 \frac{\partial T}{\partial x} \right) \frac{\partial T}{\partial x}, \quad (24)$$

$$p(0, t) = 0, \quad p(1, t) = 0, \quad p(x, 0) = 1, \quad (25)$$

$$C(0, t) = 1, \quad \frac{\partial C(1, t)}{\partial x} = 0, \quad C(x, 0) = 0, \quad (26)$$

$$T(0, t) = 1, \quad T(1, t) = 0, \quad T(x, 0) = 0. \quad (27)$$

МЕТОДИКА ПОЛУЧЕНИЯ ПРИБЛИЖЕННОГО РЕШЕНИЯ КРАЕВОЙ ЗАДАЧИ И ВЫЧИСЛИТЕЛЬНЫЙ АЛГОРИТМ

Кратко изложим методику построения приближенного решения рассматриваемой задачи, базирующуюся на совместном применении дифференциально-разностного (в совокупности с методом суммарных представлений Г.Н. Положего [20]) и собственно разностного методов.

Рассмотрим сеточную область $\omega_h = \{x_i : x_i = ih \ (i = \overline{0, m+1})\}$, где h — шаг сетки по геометрической переменной, и поставим в соответствие задаче для вычисления поля давлений (22), (25) дифференциально-разностную задачу вида

$$D_t^{(\beta)} \bar{u}(t) = \frac{1}{h^2} (T^{(m)} - 2E) \bar{u}(t) + \bar{w}(t), \quad (28)$$

$$\bar{u}(0) = \bar{e}, \quad (29)$$

где

$$\bar{u}(t) = [p_1(t), p_2(t), \dots, p_m(t)]^T, \quad \bar{w}(t) = [w_1(t), w_2(t), \dots, w_m(t)]^T =$$

$$= -\frac{1}{h^2} [\eta(T_3^{(m)} - 2E)\bar{V}(t) + \zeta(T^{(m)} - 2E)\bar{R}(t) + (\eta + \zeta)\bar{\omega}_1],$$

$$\bar{V}(t) = [C_1(t), C_2(t), \dots, C_m(t)]^T, \quad \bar{R}(t) = [T_1(t), T_2(t), \dots, T_m(t)]^T,$$

$\bar{e} = (1, 1, \dots, 1)^T$, $\bar{\omega}_1 = (1, 0, \dots, 0)^T$, $T^{(m)}$, $T_3^{(m)}$ — квадратные матрицы порядка m , определенные в [20], E — единичная матрица порядка m .

Введем также в рассмотрение P — трансформации векторов \bar{u} и \bar{w} соотношениями

$$\tilde{u}(t) = P^{(m)} \bar{u}(t), \quad \tilde{w}(t) = P^{(m)} \bar{w}(t),$$

где $P^{(m)}$ — фундаментальная матрица порядка m , определенная согласно [20]

$$P^{(m)} = [p_{kj}]_{k,j=1}^m = \sqrt{\frac{2}{m+1}} \left[\sin \left(\frac{\pi kj}{m+1} \right) \right]_{k,j=1}^m.$$

Умножая (28), (29) слева на матрицу $P^{(m)}$, с учетом равенства [12, 20]

$$T^{(m)} = P^{(m)} \Lambda^{(m)} P^{(m)},$$

где $\Lambda^{(m)} = [\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_m]$ — диагональная матрица собственных чисел матрицы $T^{(m)}$, $\lambda_k = 2 \cos \left(\frac{\pi k}{m+1} \right)$ ($k = \overline{1, m}$), получаем задачу в изображениях, записываемую в скалярной форме в виде

$$D_i^{(\beta)} \hat{u}_i(t) - \kappa_i \hat{u}_i(t) = \hat{w}_i(t) \quad (i = \overline{1, m}), \quad (30)$$

$$\hat{u}_i(0) = \hat{e}_i \quad (i = \overline{1, m}), \quad (31)$$

где

$$\begin{aligned} \kappa_i &= \frac{1}{h^2} (\lambda_i - 2), \quad \hat{e}_i = \sum_{k=1}^m p_{ik}, \\ \hat{w}_i(t) &= -\frac{1}{h^2} \sum_{k=1}^m p_{ik} (\eta(C_{k-1}(t) - 2C_k(t) + C_{k+1}(t)) + \\ &\quad + \zeta(T_{k-1}(t) - 2T_k(t) + T_{k+1}(t))). \end{aligned}$$

Согласно [15, 17] решение задачи (30), (31) находим в виде

$$\hat{u}_i(t) = \hat{e}_i E_\beta(\kappa_i t^\beta) + \int_0^t (t-\tau)^{\beta-1} E_{\beta,\beta}(\kappa_i (t-\tau)^\beta) \hat{w}_i(\tau) d\tau \quad (i = \overline{1, m}), \quad (32)$$

где $E_\beta(z)$, $E_{\alpha,\beta}(z)$ — функция Миттаг–Леффлера и обобщенная функция Миттаг–Леффлера соответственно [13–19].

Возвращаясь в соотношениях (32) к оригиналам по геометрической переменной, получаем точное решение исходной дифференциально-разностной задачи (28), (29) в виде следующей явной зависимости функции давления p от концентрации C и температуры T :

$$\begin{aligned} p_i(t) &= G_i(t) - \sum_{k=1}^m \int_0^t (\eta(C_{k-1}(\tau) - 2C_k(\tau) + C_{k+1}(\tau)) + \\ &\quad + \zeta(T_{k-1}(\tau) - 2T_k(\tau) + T_{k+1}(\tau))) \Phi_{ik}(t-\tau) d\tau \quad (i = \overline{1, m}), \end{aligned} \quad (33)$$

где

$$\begin{aligned} G_i(t) &= \sum_{s=1}^m \sum_{k=1}^m p_{is} p_{sk} E_\beta(\kappa_s t^\beta), \\ \Phi_{ik}(t) &= \frac{t^{\beta-1}}{h^2} \sum_{s=1}^m p_{is} p_{sk} E_{\beta,\beta}(\kappa_s t^\beta) \quad (i = \overline{1, m}; k = \overline{1, m}). \end{aligned}$$

Задачи (23), (26) и (24), (27) для вычисления полей концентраций C и полей температур T решаются численно. Для этого введем в рассмотрение сеточную область $\omega_{h\tau} = \{(x_i, t_j) : x_i = ih \ (i = \overline{0, m+1}), t_j = j\tau \ (j = \overline{0, n})\}$ (h, τ — шаги сетки по геометрической переменной и времени соответственно) и используем, например, монотонную разностную схему А.А. Самарского, которую в обозначениях работы [21] запишем в виде

$$\sigma \Delta_t^{(\beta)} C = \chi \hat{C}_{\bar{x}\bar{x}} + u^+ \hat{C}_x + u^- \hat{C}_{\bar{x}}, \quad (34)$$

$$\Delta_t^{(\beta)} T = \chi_1 \hat{T}_{\bar{x}\bar{x}} + v^+ \hat{T}_x + v^- \hat{T}_{\bar{x}}, \quad (35)$$

где

$$\chi = \frac{d}{1+R}, \quad \chi_1 = \frac{\lambda_1}{1+R_1}, \quad R = \frac{h|u|}{2d}, \quad R_1 = \frac{h|v|}{2\lambda_1}, \quad u^\pm = \frac{1}{2}(u \pm |u|),$$

$$v^\pm = \frac{1}{2}(v \pm |v|), \quad u = kp_x - \nu C_x - \hat{\mu}T_x, \quad v = \kappa_1 p_x - \nu_1 C_x - \mu_1 T_x.$$

При этом в соотношениях (34), (35) оператор $\Delta_t^{(\beta)}$ обозначает дискретный аналог производной дробного порядка $D_t^{(\beta)}$. Согласно, например, [22] имеем

$$\Delta_t^{(\beta)} y(x, t_{j+1}) = \frac{1}{\Gamma(2-\beta)} \sum_{s=0}^j b_s^{(j)} y_{t,s}, \quad (36)$$

где

$$b_s^{(j)} = \tau^{1-\beta} [(j-s+1)^{1-\beta} - (j-s)^{1-\beta}], \quad y_{t,s} = \frac{y^{s+1} - y^s}{\tau}$$

$\Gamma(\alpha)$ — гамма-функция [23]. В классе достаточно гладких функций имеем $D_t^{(\beta)} y = \Delta_t^{(\beta)} y + O(\tau)$ [22].

Расписывая в соотношениях (34), (35) соответствующие разностные операторы и приводя подобные члены, получаем следующие системы линейных алгебраических уравнений:

$$A_i^j C_{i-1}^{j+1} - S_i^j C_i^{j+1} + B_i^j C_{i+1}^{j+1} = -F_i^j \quad (i = \overline{1, m}; j = \overline{0, n}), \quad (37)$$

$$\tilde{A}_i^j T_{i-1}^{j+1} - \tilde{S}_i^j T_i^{j+1} + \tilde{B}_i^j T_{i+1}^{j+1} = -\tilde{F}_i^j \quad (i = \overline{1, m}; j = \overline{0, n}), \quad (38)$$

где

$$A_i^j = \frac{1}{h} \left(\frac{\chi_i^j}{h} - (u^-)_i^j \right), \quad B_i^j = \frac{1}{h} \left(\frac{\chi_i^j}{h} + (u^+)_i^j \right), \quad S_i^j = \frac{\sigma}{\tau^\beta \Gamma(2-\beta)} + A_i^j + B_i^j,$$

$$F_i^j = \frac{\sigma}{\Gamma(2-\beta)} \left(\frac{1}{\tau^\beta} C_i^j - \sum_{s=0}^{j-1} b_s^{(j)} \frac{C_i^{s+1} - C_i^s}{\tau} \right),$$

$$\tilde{A}_i^j = \frac{1}{h} \left(\frac{(\chi_1)_i^j}{h} - (v^-)_i^j \right), \quad \tilde{B}_i^j = \frac{1}{h} \left(\frac{(\chi_1)_i^j}{h} + (v^+)_i^j \right),$$

$$\tilde{S}_i^j = \frac{1}{\tau^\beta \Gamma(2-\beta)} + \tilde{A}_i^j + \tilde{B}_i^j, \quad \tilde{F}_i^j = \frac{1}{\Gamma(2-\beta)} \left(\frac{1}{\tau^\beta} T_i^j - \sum_{s=0}^{j-1} b_s^{(j)} \frac{T_i^{s+1} - T_i^s}{\tau} \right).$$

Разностные уравнения систем (37), (38) являются трехточечными и эффективно решаются методом прогонки [21, 24, 25]. При этом прогоночные соотношения имеют вид

$$C_i^{j+1} = \alpha_{i+1}^j C_{i+1}^{j+1} + \beta_{i+1}^j, \quad T_i^{j+1} = \tilde{\alpha}_{i+1}^j T_{i+1}^{j+1} + \tilde{\beta}_{i+1}^j \quad (i = \overline{1, m}; j = \overline{0, n}),$$

а прогоночные коэффициенты вычисляются по формулам

$$\alpha_{i+1}^j = \frac{B_i^j}{S_i^j - A_i^j \alpha_i^j}, \quad \beta_{i+1}^j = \frac{\alpha_{i+1}^j}{B_i^j} (F_i^j + A_i^j \beta_i^j) \quad (i = \overline{1, m}; j = \overline{0, n}),$$

$$\tilde{\alpha}_{i+1}^j = \frac{\tilde{B}_i^j}{\tilde{S}_i^j - \tilde{A}_i^j \tilde{\alpha}_i^j}, \quad \tilde{\beta}_{i+1}^j = \frac{\tilde{\alpha}_{i+1}^j}{\tilde{B}_i^j} (\tilde{F}_i^j + \tilde{A}_i^j \tilde{\beta}_i^j) \quad (i = \overline{1, m}; j = \overline{0, n}).$$

Для определения стартовых значений прогоночных коэффициентов используем конечноразностные аналоги граничных условий $C(0, t) = 1$, $T(0, t) = 1$. Тогда получаем

$$\alpha_1^j, \tilde{\alpha}_1^j = 0, \quad \beta_1^j, \tilde{\beta}_1^j = 1 \quad (j = \overline{0, n}).$$

Отметим, что устойчивость метода прогонки для систем (37), (38) вытекает из факта диагонального преобладания в матрицах коэффициентов этих систем алгебраических уравнений.

Учитывая изложенное, вычислительный алгоритм для приближенного решения приведенной задачи сформулируем следующим образом.

1. На рассматриваемом временном слое в соответствии с разностной схемой (35) вычисляем значение температуры T , используя значения фильтрационного давления p и концентрации C из предыдущего временного слоя.

2. С учетом найденных на данном временном слое значений T вычисляем значение концентрации C в соответствии с разностной схемой (34), используя значения фильтрационного давления p из предыдущего временного слоя.

3. Имея найденные на данном временном слое значения C и T , вычисляем значения p на этом слое согласно явной зависимости (33). Этим решение задачи на рассматриваемом временном слое завершается.

4. Переходим на следующий временной слой и повторяем вычисления, начиная с шага 1.

При численной реализации изложенного алгоритма интеграл в соотношениях (33) аппроксимируется с помощью соответствующей квадратурной формулы [26].

РЕЗУЛЬТАТЫ ЧИСЛЕННЫХ ЭКСПЕРИМЕНТОВ И ВЫВОДЫ

Численное моделирование динамики полей фильтрационных давлений, температурных полей и полей концентраций в рамках рассматриваемой математической модели, учитывающей временную нелокальность геофильтрационного процесса, выполнено относительно безразмерных переменных, определяемых соотношениями (21). Изобразим графически некоторые из полученных результатов расчетов. На рис. 1 показана динамика полей фильтрационных давлений $p(x, t)$ при фиксированном t для рассматриваемой модели с учетом временной нелокальности в изотермическом (кривые 1–5, $\beta = 0,85$) и неизотермиче-

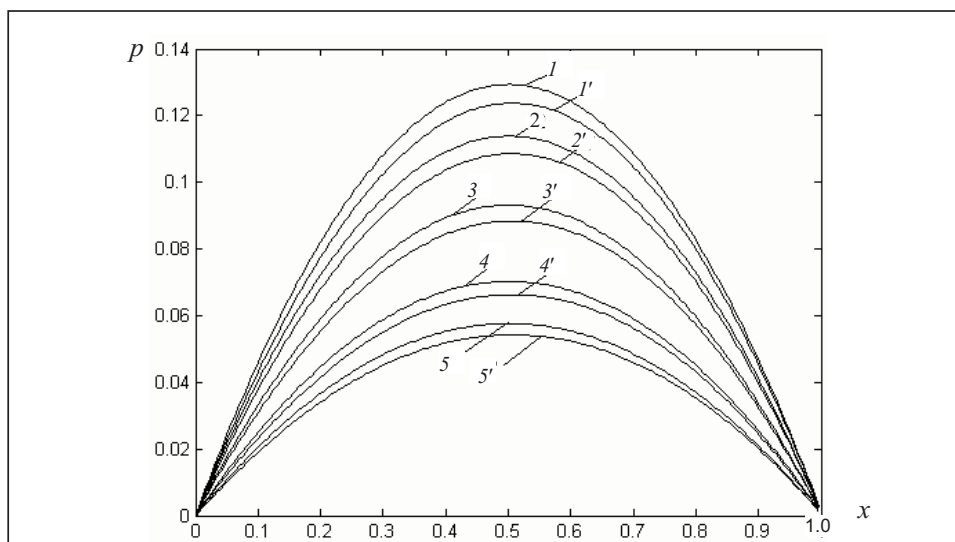


Рис. 1

ском (кривые 1'–5') случаях. Динамика соответствующих полей концентраций $C(x, t)$ (t фиксированное) в неизотермическом (кривые 1'–5') и изотермическом (кривые 1–5) случаях показана на рис. 2. Графики на приведенных рисунках соответствуют следующим значениям безразмерного параметра t : $t = 0,25$ (кривые 1, 1'), $t = 0,3$ (кривые 2, 2'), $t = 0,4$ (кривые 3, 3'), $t = 0,6$ (кривые 4, 4'), $t = 0,8$ (кривые 5, 5').

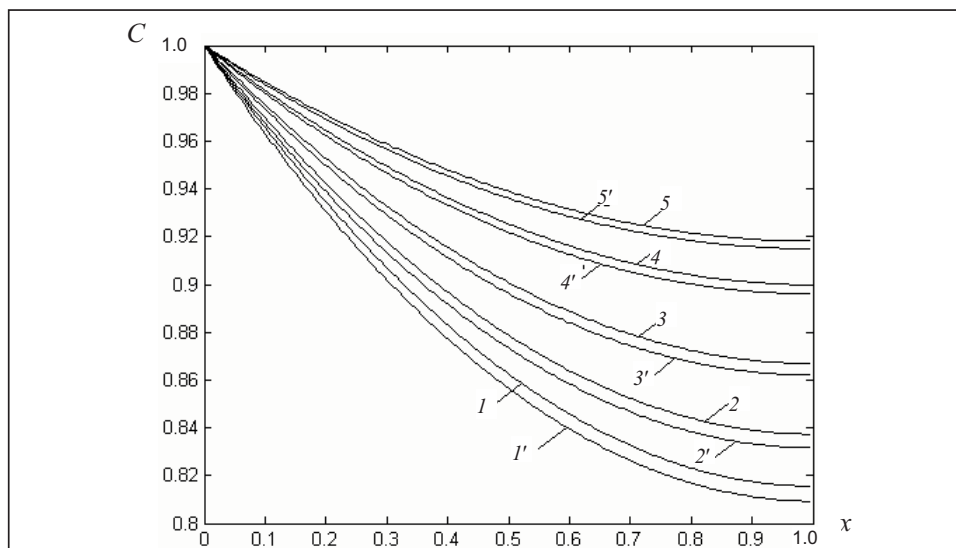


Рис. 2

Анализ результатов численных экспериментов позволяет, в частности, сделать следующие выводы об особенностях динамики полей фильтрационных давлений и концентраций при фильтрации солевых растворов в геопористой среде в условиях неизотермичности и заметного влияния временной нелокальности.

1. Имеет место явление ускоренного рассеивания полей фильтрационных давлений при фильтрации в геопористой среде в условиях неизотермичности по сравнению со случаем моделирования процесса в предположении его изотермичности (см. рис. 1).

2. При моделировании геофильтрации солевых растворов в рамках локально-неравновесной математической модели наблюдается запаздывание процесса формирования поля концентраций растворимых веществ в неизотермическом случае по сравнению с изотермическим (см. рис. 2).

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Рассмотренная в работе математическая модель позволяет численно моделировать динамику неизотермических процессов переноса при геофильтрации солевых растворов в локально-неравновесных по времени условиях. Полученные результаты дают возможность учета важных дополнительных факторов, не учитываемых в классических математических моделях (например, временную нелокальность составляющих процесса переноса) при разработке конструктивных решений в инженерной практике, в частности при проектировании таких экологически небезопасных инженерных объектов, как поверхностные накопители промышленных и бытовых стоков, функционирующих в сложных горно-геологических условиях.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Хасанов М.М., Булгакова Г.Т. Нелинейные и неравновесные эффекты в геологически сложных средах. — Москва; Ижевск: Ин-т компьютер. исслед., 2003. — 288 с.

2. Булавацкий В.М., Скопецкий В.В. Системный подход к проблеме математического моделирования процесса фильтрационной консолидации // Кибернетика и системный анализ. — 2006. — № 6. — С. 71–79.
3. Булавацкий В.М., Скопецкий В.В. Математическое моделирование динамики консолидационных процессов с учетом релаксационных эффектов // Там же. — 2008. — № 6. — С. 59–66.
4. Булавацький В.М., Кривонос Ю.Г., Скопецький В.В. Некласичні математичні моделі процесів тепло- та масопереносу. — К.: Наук. думка, 2005. — 283 с.
5. Власюк А.П., Мартинюк П.М. Математичне моделювання консолідації ґрунтів в процесі фільтрації сольових розчинів. — Рівне: Вид-во УДУВГП, 2004. — 211 с.
6. Бомба А.Я., Булавацький В.М., Скопецький В.В. Нелінійні математичні моделі процесів геогідродинаміки. — Київ: Наук. думка, 2007. — 292 с.
7. Власюк А.П., Мартинюк П.М. Математичне моделювання консолідації ґрунтів при фільтрації сольових розчинів в неізотермічних умовах. — Рівне: Вид-во НУВГП, 2008. — 416 с.
8. Скопецький В.В., Булавацький В.М. Математичне моделювання процесу фільтраційної консолідації масивів, насичених сольовими розчинами за умов релаксаційної фільтрації // Доп. НАН України. — 2006. — № 2. — С. 55–61.
9. Булавацкий В.М., Скопецкий В.В. Об одной неізотермической консолидационной математической модели геoinформатики // Проблемы управления и информатики. — 2010. — № 6. — С. 35–45.
10. Булавацкий В.М., Скопецкий В.В. Приближенное решение одной динамической задачи геoinформатики // Там же. — 2010. — № 3. — С. 68–77.
11. Баренблатт Г.И., Ентов В.Н., Рыжик В.М. Движение жидкостей и газов в природных пластах. — М.: Недра, 1984. — 303 с.
12. Ляшко И.И., Демченко Л.И., Мистецкий Г.Е. Численное решение задач тепло- и массопереноса в пористых средах. — Киев: Наук. думка, 1991. — 264 с.
13. Вірченко Н.О., Рибак В.Я. Основи дробового інтегро-диференціювання. — Київ: Задруга, 2007. — 361с.
14. Нахушев А.М. Дробное исчисление и его применение. — М.: Физматлит, 2003. — 272 с.
15. Самко С.Г., Килбас А.А., Маричев О.И. Интегралы и производные дробного порядка и некоторые их приложения. — Минск: Наука и техника, 1987. — 688 с.
16. Чикрий А.А., Матичин И.И. Об аналоге формулы Коши для линейных систем произвольного дробного порядка // Доп. НАН України. — 2007. — № 1. — С. 50–55.
17. Kilbas A.A., Srivastava H.M., Trujillo J.J. Theory and applications of fractional differential equations. — Amsterdam: Elsevier, 2006. — 523 p.
18. Gorenflo R., Mainardi F. Fractional calculus: integral and differential equations of fractional order // Fractals and Fractional Calculus in Continuum Mechanics / Eds. A. Carpinteri, F. Mainardi. — Wien: Springer-Verlag, 1997. — P. 223–276.
19. Podlubny I. Fractional differential equations. — New York: Acad. Press, 1999. — 341 p.
20. Положий Г.Н. Численное решение двумерных и трехмерных краевых задач математической физики и функции дискретного аргумента. — Киев: Вища шк., 1962. — 161 с.
21. Самарский А.А. Теория разностных схем. — М.: Наука, 1977. — 656 с.
22. Таукенова Ф.И., Шхануков-Лафисhev М.Х. Разностные методы решения краевых задач для дифференциальных уравнений дробного порядка // Журн. вычисл. математики и мат. физики. — 2006. — 46, № 10. — С. 1871–1881.
23. Арсенин В.Я. Математическая физика. Основные уравнения и специальные функции. — М.: Наука, 1966. — 386 с.
24. Samarskii A.A., Vabishchevich P.N. Computational heat transfer. — New York: Wiley, 1995. — Vol. 2. — 422 p.
25. Бахвалов Н.С., Жидков Н.П., Кобельков Г.М. Численные методы. — М.: Наука, 1987. — 600 с.
26. Крылов В.И., Шульгина А.Т. Справочная книга по численному интегрированию. — М.: Наука, 1966. — 372 с.

Поступила 27.12.2010