

**АЛГОРИТМ ДЕКОМПОЗИЦИИ ГЕОМЕТРИЧЕСКИХ ОБЪЕКТОВ
В 2D-ЗАДАЧАХ УПАКОВКИ И РАСКРОЯ**

Ключевые слова: *декомпозиция, раскрой, упаковка, геометрические 2D-объекты, Ф-функция, математическое моделирование.*

Задачи упаковки и раскроя (в дальнейшем задачи размещения) возникают во многих отраслях промышленности, в том числе машиностроении, кораблестроении, текстильной, бумажной, легкой промышленности, а также при проектировании схем раскроя промышленных материалов [1–4]. Эти задачи направлены на поиск рационального расположения объектов на промышленном материале с целью максимизации коэффициента использования материала или минимизации отходов. В большинстве задач размещаемые объекты имеют произвольную форму. В настоящее время наиболее распространенным и востребованным становится индивидуальное (эксклюзивное) производство. В этой связи появляется необходимость в поиске оптимального расположения объектов произвольной формы при минимальных временных затратах и максимальной экономии материала.

Задачи размещения — оптимизационные, вследствие этого возникает проблема применения известных методов локальной и глобальной оптимизации, обусловленная отсутствием конструктивных средств математического моделирования, позволяющих представить задачу размещения произвольных геометрических объектов в виде задачи математического программирования.

В работах [1–3] изложены современные средства математического моделирования и методы решения задач размещения произвольных геометрических объектов. Однако предлагаемые подходы основаны на эвристиках и модификациях метода оптимизации по группам переменных.

Разработка эффективных методов решения оптимизационных задач размещения требует построения адекватных математических моделей. Фундаментальной основой математического моделирования задач данного класса является аналитическое описание условий размещения произвольных объектов в заданной области.

Как известно [2], в классе оптимизационных 2D-задач размещения конструктивным средством математического моделирования отношений геометрических объектов является метод Ф-функций [5]. Вид Ф-функции непосредственно определяется пространственной формой геометрических объектов. В работах [6–8] построены Ф-функции для базовых объектов (primary objects). Принципы построения Ф-функций для составных объектов (composed objects), представленных в виде объединений и пересечений базовых объектов, достаточно подробно изложены в [9]. При этом к составным объектам предъявляются жесткие требования, которые в значительной мере сужают класс пространственных форм геометрических объектов, используемых в качестве моделей реальных объектов. При решении практических задач (например, при создании современных информационных технологий раскроя промышленных материалов) информация об объектах задается, как правило, в виде описания их границ, в частности последовательностью дуг окружностей и отрезков прямых.

Построение Φ -функций для объектов, граница которых формируется объединением дуг окружностей и отрезков прямых (далее произвольных объектов), можно реализовать, используя чрезвычайно простое представление произвольного объекта в виде объединения объектов (далее базовых объектов), для которых Φ -функции известны.

В пределах данного исследования в качестве базовых объектов рассматриваются выпуклый многоугольник K (рис. 1, а), заданный вершинами $\{p_1, p_2, \dots, p_k\}$; круговой сегмент $D = T \cap C$ (рис. 1, б), где C — круг радиуса r с центром O ; T — треугольник, заданный вершинами $p_1, p_2, p_3 = \omega^1 \cap \omega^2$, ω^1 и ω^2 — касательные к окружности $\text{fr} C$ в точках p_1 и p_2 соответственно, $\text{fr}(\cdot)$ — граница множества (\cdot) ; объект $H = T \cap C^*$ (рис. 1, в), где $C^* = R^2 \setminus \text{int} C$, $\text{int}(\cdot)$ — внутренность множества (\cdot) ; объект $V = H \cap C_2$ (рис. 1, г), где $H = T \cap C_1^*$, C_2 — круг радиуса $r_2 > r_1$ с центром в точке O_2 , при этом Φ^{C^*C} — Φ -функция C_2^* и C_1 , которая равна нулю.

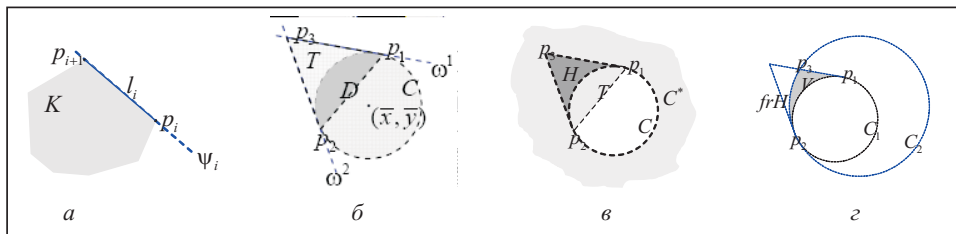


Рис. 1. Базовые объекты K, D, H, V

Обоснованием выбора в качестве базовых объектов K, D, H, V является следующее утверждение.

Теорема. Ограниченный φ -объект [7], граница которого формируется объединением отрезков прямых и дуг окружностей, всегда можно представить в виде

$$A = \bigcup_{k=1}^m A_k, \quad (1)$$

где $\text{int} A_i \cap \text{int} A_j = \emptyset$, $i, j \in I_m = \{1, 2, \dots, m\}$, $i \neq j$, $A_k \in \{K, D, H, V\}$.

Доказательство. В основе доказательства лежит утверждение о том, что вокруг круга (в круг) всегда можно описать (вписать) выпуклый многоугольник с наперед заданной точностью.

Пусть A — выпуклый φ -объект, граница которого формируется отрезками прямых и выпуклыми дугами. Дуга $\text{arc}(p_1, p_2)$ на рис. 1, б — выпуклая, а на рис. 1, в — вогнутая. В этом случае объект A всегда можно представить в виде объединения круговых сегментов D и выпуклых многоугольников K . Далее полагаем, что A — невыпуклый объект, граница которого формируется отрезками прямых и вогнутыми дугами. В этом случае объект A всегда можно представить в виде объединения объектов H и выпуклых многоугольников K . Пусть теперь A — невыпуклый объект, граница которого формируется отрезками прямых, а также выпуклыми и вогнутыми дугами. В этом случае объект A всегда можно представить в виде объединения объектов V, D, H и K .

Следовательно, любой ограниченный φ -объект A , граница которого формируется объединением отрезков прямых и дуг окружностей, можно представить в виде (1).

В дальнейшем представление объекта A в виде (1) будем называть декомпозицией.

Естественным образом возникает следующая задача.

Задача. Представить в виде (1) произвольный ограниченный φ -объект $A \subset R^2$, граница которого состоит из отрезков прямых и дуг окружностей.

Пусть A — односвязный ограниченный объект, граница которого задана последовательностью элементов l_i , $i \in I_n$.

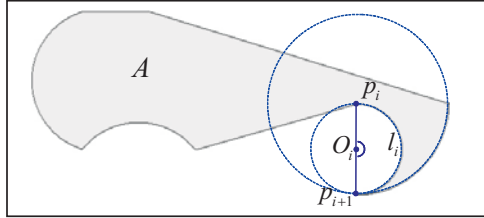


Рис. 2. Этап формирования базового объекта V

Каждый элемент l_i задается кортежем информации $g_i = (p_i, \lambda_i, \bar{p}_i, p_{i+1})$ об отрезке \bar{s} , выпуклой дуге \hat{a} либо вогнутой дуге \check{a} . Здесь $p_i = (x_i, y_i)$, x_i, y_i — координаты начала элемента $l_i \in \{\bar{s}, \hat{a}, \check{a}\}$ в собственной системе координат множества A ; λ_i — признак элемента l_i , причем $\lambda_i = 0$, если $l_i \in \{\bar{s}\}$, $\lambda_i = 1$, если

$l_i \in \{\hat{a}\}$, $\lambda_i = -1$, если $l_i \in \{\check{a}\}$; $\bar{p}_i = (\bar{x}_i, \bar{y}_i)$ — координаты центра отрезка \bar{s} или центра окружности, формирующей дугу \hat{a} (\check{a}); $p_{i+1} = (x_{i+1}, y_{i+1})$, x_{i+1}, y_{i+1} — координаты конца l_i и начала l_{i+1} . Таким образом, информация о границе базового объекта $A \in \{K, D, H, V\}$ задается кортежем $g^A = (g_1, g_2, \dots, g_n)$, в том числе $g^K = (g^{\bar{s}_1}, g^{\bar{s}_2}, \dots, g^{\bar{s}_k})$, $g^D = (g^{\hat{a}}, g^{\check{a}})$, $g^H = (g^{\check{a}}, g^{\bar{s}_1}, g^{\bar{s}_2})$, $g^V = (g^{\check{a}}, g^{\hat{a}}, g^{\bar{s}})$ или $g^V = (g^{\hat{a}}, g^{\check{a}}, g^{\bar{s}})$.

Алгоритм 1. Декомпозиции множества A

Этап 1. Формирование объектов V . Пусть $l^V = (\hat{a}, \check{a}, \bar{s})$ задает границу объекта V . В этом случае $g^{\hat{a}} = (p', 1, \bar{p}_i, p_{i+1})$, $g^{\check{a}} = (p_{i+1}, -1, \bar{p}_i, p')$, $\bar{s} = [p'', p']$, где \bar{s} — отрезок прямой, касательной к окружности $C \supset \hat{a}$ в точке $p'' \in l_{i+1}$; $p' \in l_i$. Если $l^V = (\hat{a}, \check{a}, \bar{s})$, тогда $g^{\hat{a}} = (p'', -1, \bar{p}_i, p_{i+1})$, $g^{\check{a}} = (p_{i+1}, 1, \bar{p}_i, p')$, $\bar{s} = [p'', p']$, $p'' \in l_i$ и $p' \in l_{i+1}$.

Наличие объектов определяется условием

$$\lambda_i \cdot \lambda_{i+1} = -1, (r_i - r_{i+1})^2 - (\bar{x}_i - \bar{x}_{i+1})^2 - (\bar{y}_i - \bar{y}_{i+1})^2 = 0. \quad (2)$$

Пусть выполняется условие (2) и $\lambda_i = -1$ (рис. 2).

1. Находим $p_{1i}, p_{2i} \in (\omega_i^{ci+1} \cap \text{fr } C_i)$. Заметим, что $\omega_i^{ci+1} \parallel \omega_i^{i+1}$ и $O_i \in \omega_i^{ci+1}$, где O_i — центр круга C_i (рис. 3, а).

2. Находим $\tilde{p}_1 : \tilde{p}_1 = p_{1i}$, если $p_{1i} \in l_i$ и $p_{2i} \notin l_i$ или $\gamma_{i,1i} < \gamma_{i,2i}$ (рис. 3, б); $\tilde{p}_1 = p_{2i}$, если $p_{2i} \in l_i$ и $p_{1i} \notin l_i$ или $\gamma_{i,1i} > \gamma_{i,2i}$; $\tilde{p}_1 = p_i$, если $p_{1i} \notin l_i$ и $p_{2i} \notin l_i$. Здесь γ_{ik} — величина центрального угла $\angle p_i O_i p_{i+1}$, который опирается на дугу $l_i \subset \text{fr } C$ (см. рис. 2).

3. Определяем $\tilde{p}_2 : \tilde{p}_2 = p_{i+1}$.

4. Находим $p_{3i}, p_{4i} \in (\omega_i^{\tilde{p}_1} \cap \text{fr } C_{i+1})$ (рис. 3, в).

5. Находим $\tilde{p}_3 : \tilde{p}_3 = p_{3i}$, если $\rho(\tilde{p}_1, p_{3i}) < \rho(\tilde{p}_1, p_{4i})$ (рис. 3, в, г); $\tilde{p}_3 = p_{4i}$, если $\rho(\tilde{p}_1, p_{3i}) \geq \rho(\tilde{p}_1, p_{4i})$, где ρ — евклидово расстояние.

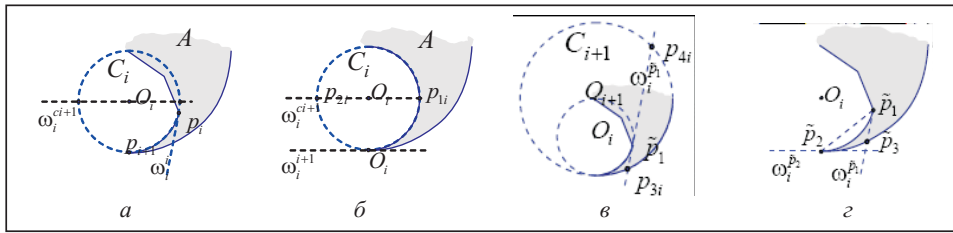


Рис. 3. Построение точек p_{1i} , p_{2i} , \tilde{p}_1 , \tilde{p}_2 , \tilde{p}_3

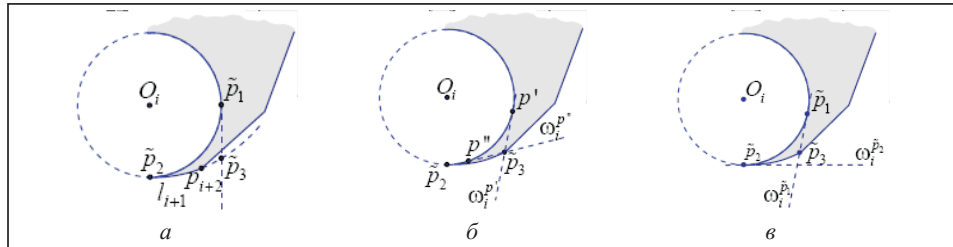


Рис. 4. Построение точек p' , p''

6. Осуществляем проверку условия $\tilde{p}_3 \in l_{i+1}$. Если $\tilde{p}_3 \in l_{i+1}$, то объект, заданный кортежем $(g^{\tilde{a}}, g^{\hat{a}}, g^{\tilde{s}})$, где $g^{\tilde{a}} = (\tilde{p}_1, -1, \tilde{p}_i, \tilde{p}_2)$, $g^{\hat{a}} = (\tilde{p}_2, 1, \tilde{p}_{i+1}, \tilde{p}_3)$, $\tilde{s} = [\tilde{p}_3, \tilde{p}_1]$ является базовым объектом $V \subset A$. Если $\tilde{p}_3 \notin l_{i+1}$ (рис. 4, а), то $\tilde{p}_3 = p_{i+2}$. Из точки \tilde{p}_3 строим касательные к $\text{fr } C_i$, решая систему

$$\begin{cases} \alpha^2 + \beta^2 = 1, \\ -\alpha\tilde{x}_3 - \beta\tilde{y}_3 + r_i = 0. \end{cases}$$

Определяем $\omega_i^{p'}$ и $\omega_i^{p''}$. Далее находим $p' = \text{fr } C_i \cap \omega_i^{p'}$ и $p'' = \text{fr } C_i \cap \omega_i^{p''}$; здесь $p' = (\bar{x}_i + \alpha_1 r_i, \bar{y}_i + \beta_1 r_i)$, $p'' = (\bar{x}_i + \alpha_2 r_i, \bar{y}_i + \beta_2 r_i)$ (рис. 4, б). Выбираем $\tilde{p}_1 = p'$, если $\rho(\tilde{p}_2, p') > \rho(\tilde{p}_2, p'')$, или $\tilde{p}_1 = p''$, если $\rho(\tilde{p}_2, p') \leq \rho(\tilde{p}_2, p'')$ (рис. 4, в). Если $(\tilde{s} \cap \text{fr } A) \setminus (\tilde{p}_1 \cup \tilde{p}_3) \neq \emptyset$, $\tilde{s} = [\tilde{p}_3, \tilde{p}_1]$, то осуществляем перебор отсеченных вершин и определяем \tilde{p}_1 , а \tilde{p}_3 находим в соответствии с п. 4, 5. Перебор заканчивается, когда выполняется одно из условий: а) $(\tilde{s} \cap \text{fr } A) \setminus (\tilde{p}_1 \cup \tilde{p}_3) = \emptyset$ (найдено решение); б) $(\tilde{s} \cap \text{fr } A) \setminus (\tilde{p}_1 \cup \tilde{p}_3) = M'$, $M' \subset (\bar{a}_j \setminus (p_j \cup p_{j+1}))$, $j \neq i, i+1$. При условии б) определяем $x' = \bar{x}_i + x_p c_p + y_p s_p$, $y' = \bar{y}_i - x_p s_p + y_p c_p$, $x'' = \bar{x}_i + x_p c_p - y_p s_p$, $y'' = \bar{y}_i + x_p s_p - y_p c_p$, где $s_p = \sqrt{1 - c_p^2}$, $c_p = r_i / \rho(x_p, x_i)$, $x_p = \bar{x}_i + d_p(\bar{x}_j - \bar{x}_i)$, $y_p = \bar{y}_i + d_p(\bar{y}_j - \bar{y}_i)$, $d_p = r_i / (r_i + r_j)$; $\tilde{p}_1 = p'$, если $\rho(\tilde{p}_2, p') > \rho(\tilde{p}_2, p'')$, и $\tilde{p}_1 = p''$, если $\rho(\tilde{p}_2, p') \leq \rho(\tilde{p}_2, p'')$; \tilde{p}_3 находим в соответствии с п. 4, 5.

7. Определяем $l^V = (\bar{a}, \bar{a}, \bar{s})$, где $g^{\tilde{a}} = \{\tilde{p}_1, -1, \bar{x}_i, \bar{y}_i, \tilde{p}_2\}$, $g^{\hat{a}} = \{\tilde{p}_2, 1, \bar{x}_{i+1}, \bar{y}_{i+1}, \tilde{p}_3\}$, $\bar{s} = [\tilde{p}_3, \tilde{p}_1]$, и получаем $A' = \text{cl}(A \setminus V)$. Элемент границы $l_i \cup l_{i+1} \subset \text{fr } A$ заменяем на $(p_i, \lambda_i, \tilde{p}_i, \tilde{p}_1) \cup (\tilde{p}_1, \tilde{p}_3) \cup (\tilde{p}_3, \lambda_{i+1}, \tilde{p}_{i+1}, p_{i+2}) \subset \text{fr } A'$. В случае, если $\tilde{p}_1 = p_i$ или $\tilde{p}_3 = p_{i+2}$, вырожденная дуга не участвует в формировании границы множества A' .

После выполнения первого этапа получаем объект $A_1 = \text{cl}(A / \cup V)$ (рис. 5), здесь $\text{cl}(\cdot)$ — замыкание множества (\cdot) .

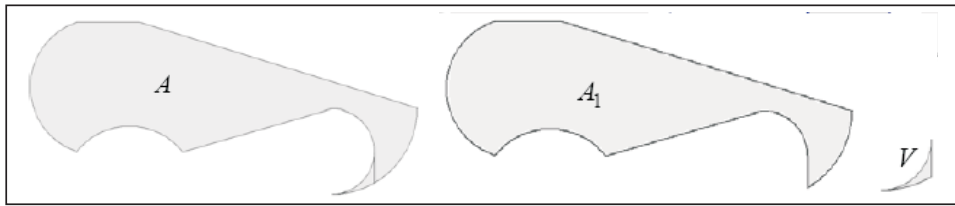


Рис. 5. Формирование объекта V

Этап 2. Формирование сегментов D . Пусть $l^D = (\bar{a}, \bar{s})$ задает границу объекта D , при этом $l_i = \bar{a}$ и выполняются условия $\text{int } D \cap \text{fr } A = \emptyset$ и $(\bar{x}_i, \bar{y}_i) \notin D$. Тогда дугу \bar{a} объекта A_1 заменяем соответствующей хордой $l_i = \bar{s}$ (рис. 6, а).

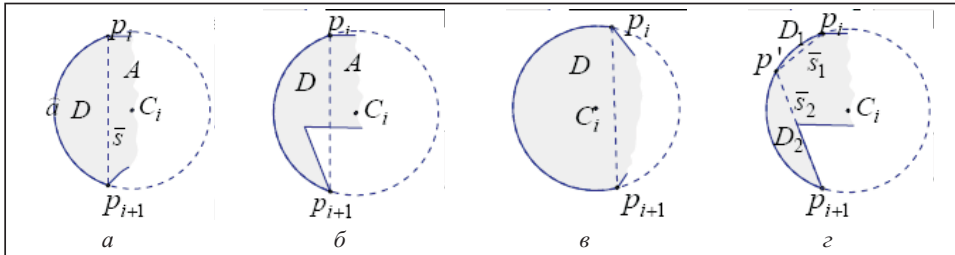


Рис. 6. Формирование сегмента D

Если $\text{int } D \cap \text{fr } A \neq \emptyset$ или $(\bar{x}_i, \bar{y}_i) \in D$ (рис. 6, б, в), то находим точку $p' \in l_i = \bar{a}$, порождающую сегменты D^1 и D^2 , $l^{D^1} = (\bar{a}^1, \bar{s}^1)$, $l^{D^2} = (\bar{a}^2, \bar{s}^2)$, где $\bar{s}^1 = [p_i, p']$, $\bar{s}^2 = [p', p_{i+1}]$, такую, что $\text{int } D^1 \cap \text{fr } A = \emptyset$ и $\text{int } D^2 \cap \text{fr } A = \emptyset$. В этом случае выделяем объекты D^1 и D^2 , а дугу l_i заменяем хордами \bar{s}^1 и \bar{s}^2 (рис. 6, г).

Если такой точки не существует, то находим две (и более) точки и выделяем сегменты, заменяя их в последующем соответствующими хордами.

После выполнения первого и второго этапов получаем объект $A_2 = \text{cl}(A_1 \cup D)$ (рис. 7), граница которого состоит из элементов $l_i \in \{\bar{s}, \bar{a}\}$.

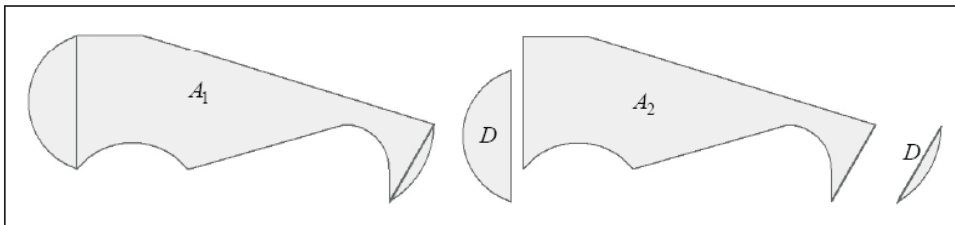


Рис. 7. Выделение сегментов D

Этап 3. Формирование объектов H . Пусть $l^H = (\bar{a}, \bar{s}^1, \bar{s}^2)$ задает границу объекта H , где $\bar{a} = l_i$. Строим касательные ω^i и ω^{i+1} к окружности $C \supset \bar{a}$ в точках p_i и p_{i+1} . Находим $p' = \omega^i \cap \omega^{i+1}$. Тогда $g^{\bar{a}} = (p_i, -1, \bar{p}_i, p_{i+1})$, $\bar{s}^1 = [p_{i+1}, p']$, $\bar{s}^2 = [p', p_i]$. Если градусная мера дуги $\bar{a} = l_i$ меньше 180° и выполняется условие $\text{int } H \cap \text{fr } A_2 = \emptyset$, то \bar{a} заменяем на $\bar{s}_i = [p_i, p'] \cup \bar{s}_{i+1} = [p', p_{i+1}]$ и формируем объект $A'_2 = \text{cl}(A_2 \setminus H)$ (рис. 8, а). Иначе находим точку p' — середину дуги \bar{a} , тогда $\bar{a} = \bar{a}^1 \cup \bar{a}^2$, $g^{\bar{a}^1} = (p_i, -1, \bar{p}_i, p')$ и $g^{\bar{a}^2} = (p', -1, \bar{p}_i, p_{i+1})$ (рис. 8, б, в).

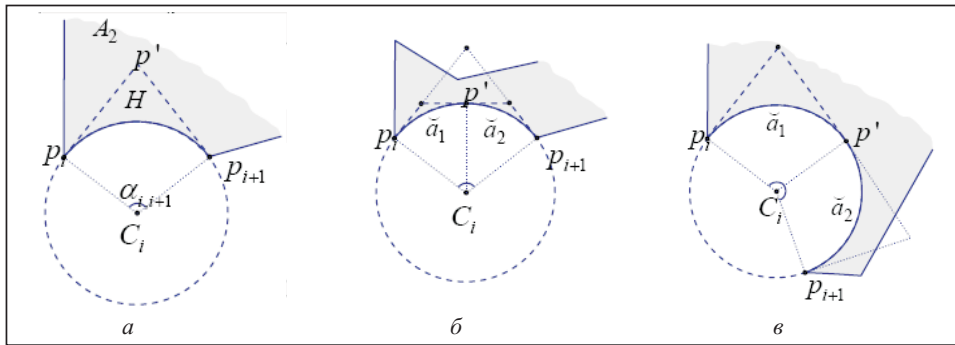


Рис. 8. Формирование объекта H

Для каждой дуги \tilde{a}^1, \tilde{a}^2 выполняется аналогичная процедура. Получаем множество $A_3 = \text{cl}(A_2 \setminus \cup H)$, граница которого состоит из элементов $l_i \in \{\bar{s}\}$ (рис. 9).

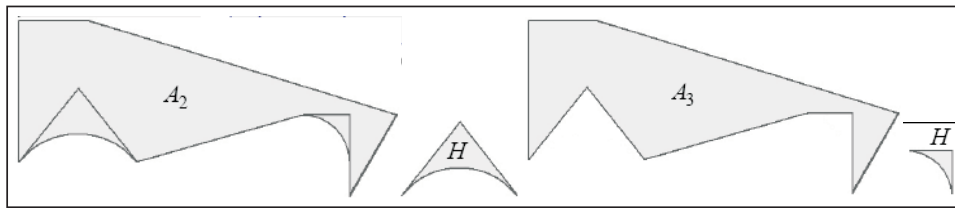


Рис. 9. Выделение объекта H

Этап 4. Декомпозиция невыпуклого многоугольника A_3 на выпуклые многоугольники K . С этой целью можно использовать различные алгоритмы многоугольной декомпозиции, например приведенный в [10]. Получаем множество $A_3 = \cup K$ (рис. 10).

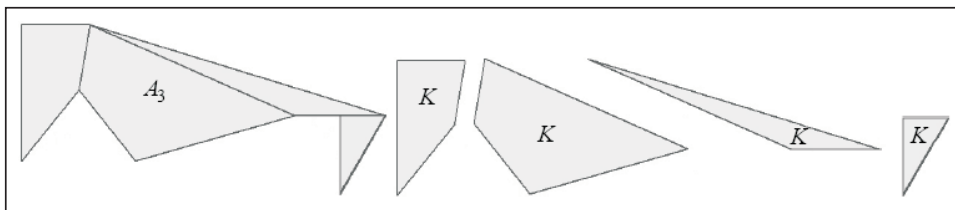


Рис. 10. Разбиение невыпуклого многоугольника на выпуклые многоугольники

Таким образом, имеем $A = (\cup D) \cup (\cup V) \cup (\cup H) \cup (\cup K)$ (рис. 11).

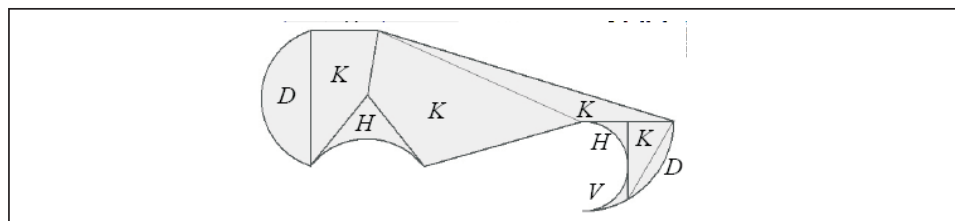


Рис. 11. Разбиение φ -объекта A на базовые объекты вида K, D, H, V

На рис. 12 приведены примеры декомпозиции произвольных φ -объектов на базовые объекты вида K, D, H .

Пусть A — многосвязный ограниченный объект, т.е. граница A — несвязное множество, состоящее из конечного числа компонентов связности; $\text{fr } A$ задается подобно границе односвязного множества. В этом случае используем алгоритм декомпозиции, приведенный выше.

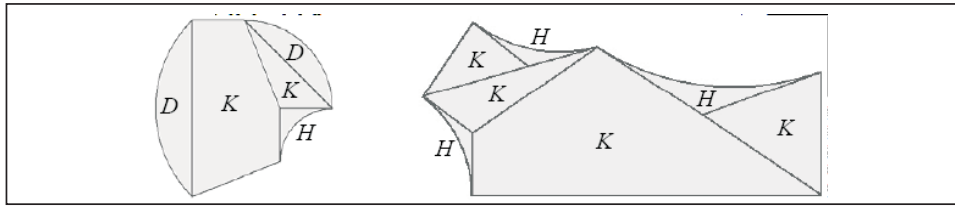


Рис. 12. Разбиение φ -объектов на базовые объекты вида K, D, H

С практической точки зрения класс базовых объектов может быть расширен с целью упрощения вида Φ -функции произвольных объектов, поскольку, следуя [8], Φ -функция объектов $A = \bigcup_{i=1}^{m_A} A_i$ и $B = \bigcup_{j=1}^{m_B} B_j$ имеет вид $\Phi^{AB} = \min \{ \Phi^{A_i B_j}, i \in I_{m_A}, j \in I_{m_B} \}$.

Например, нецелесообразно представлять круги в виде объединения сегментов D и многоугольников K , так как Φ -функция для кругов имеет более простой вид, чем Φ -функция для сегментов. Кроме того, вид Φ -функции для составных объектов может быть значительно упрощен, если иметь в «библиотеке» Φ -функции для объектов вида $L = K \cap C^*$ (рис. 13, а) и $W = C_1^* \cap C_2 \cap S_1 \cap S_2$ (рис. 13, б), где S_1, S_2 — полуплоскости, при этом $\Phi^{C^* C} = 0$. Прямая $\pi_1 = \text{fr } S_1$ проходит через начало дуги $l_{i-1} = \bar{a} \subset C_2$ и конец дуги $l_i = \bar{a} \subset C_1^*$, а прямая $\pi_2 = \text{fr } S_2$ проходит через начало и конец дуги $l_i = \bar{a} \subset C_1^*$. Информация о границе объектов L и W задается кортежами $g^L = (g^{\bar{a}}, g^{\bar{s}_1}, g^{\bar{s}_2}, \dots, g^{\bar{s}_k})$, $g^W = g^V$. Заметим, что любой объект вида V является объектом вида W .

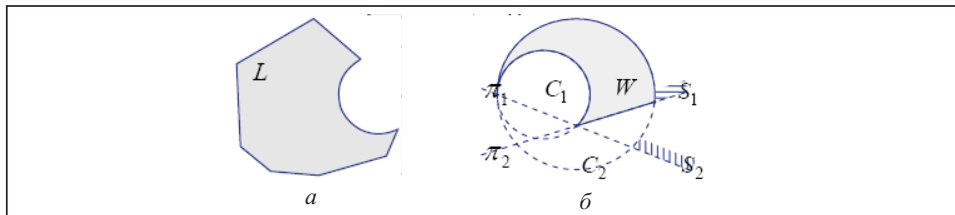


Рис. 13. Вид объектов L и W

В этой связи алгоритм декомпозиции можно модифицировать следующим образом.

Полагаем, что выражение (1) — покрытие множества A , при котором в общем случае A_i и A_j , $i, j \in I_m$, $i \neq j$, могут иметь общие внутренние точки. В класс базовых объектов введем дополнительно круги C , а также объекты L и W .

Процесс покрытия объекта A базовыми объектами из множества $\{C, D, W, K, L\}$ включает три этапа.

Алгоритм 2. Покрытие объекта A

Этап 1. Выделение объектов вида W . На основе анализа информации о $\text{fr } A$ определяем такие точки p_i , $i \in J_n$, для которых выполняются условия $\{(\bar{x}_i - \bar{x}_{i-1})^2 + (\bar{y}_i - \bar{y}_{i-1})^2 - (\bar{r}_i - \bar{r}_{i-1})^2 = 0, \lambda_{i-1} \cdot \lambda_i < 0$, где r_{i-1} и r_i — радиусы окружностей $\text{fr } C_{i-1} \supset l_{i-1}$ и $\text{fr } C_i \supset l_i$. Формируем объект W , где $l^W = (\bar{a}, \bar{a}, \bar{s})$, $g^{\bar{a}} = (p', 1, \bar{p}_{i-1}, p_i)$, $g^{\bar{a}} = (p_i, -1, \bar{p}_{i-1}, p'')$, $\bar{s} = [p'', p']$, $p' \in l_{i-1}$, $p'' \in l_i$. Если $l^W = (\bar{a}, \bar{a}, \bar{s})$, тогда $g^{\bar{a}} = (p', -1, \bar{p}_{i-1}, p_i)$, $g^{\bar{a}} = (p_i, 1, \bar{p}_i, p'')$, $\bar{s} = [p'', p']$, $p' \in l_{i-1}$, $p'' \in l_i$. Пусть $l_{i-1} = \bar{a}$, $l_i = \bar{a}$.

1. Полагаем $p' = p_{i-1}$, $p'' = p_{i+1}$ (рис. 14, а). Если выполняются условия $p_{i-1} \in S_{2i}$, $\bar{s} \cap \text{int } C_i = \emptyset$ и соотношение

$$(\bar{s} \cap \text{fr } A) \setminus (p' \cup p'') = \emptyset, \quad (3)$$

то объект, заданный кортежем $(g^{\bar{a}}, g^{\bar{a}}, g^{\bar{s}})$, где $g^{\bar{a}} = (p_{i-1}, 1, \bar{p}_{i-1}, p_i)$, $g^{\bar{a}} = (p_i, -1, \bar{p}_i, p_{i+1})$, $\bar{s} = [p_{i+1}, p_{i-1}]$, является базовым объектом $W \subset A$.

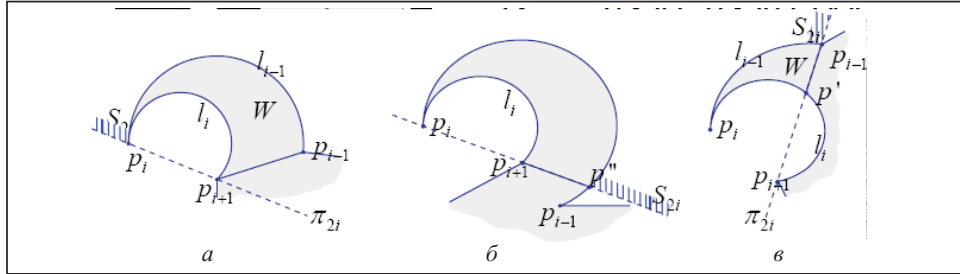


Рис. 14. Построение объекта W

2. Если $p_{i-1} \notin S_{2i}$ (рис. 14, б), то полагаем $p' = \pi_{2i} \cap l_{i-1}$, $p'' = p_{i+1}$. При выполнении (3) объект, заданный кортежем $(g^{\bar{a}}, g^{\bar{a}}, g^{\bar{s}})$, где $g^{\bar{a}} = (p', 1, \bar{p}_{i-1}, p_i)$, $g^{\bar{a}} = (p_i, -1, \bar{p}_i, p_{i+1})$, $\bar{s} = [p_{i+1}, p']$, является базовым объектом W .

3. Если $\bar{s} \cap \text{int } C_i \neq \emptyset$ (рис. 14, в), то полагаем $p' = p_{i-1}$, $p'' = \pi_{1i} \cap l_i$. При выполнении (3) объект, заданный кортежем $(g^{\bar{a}}, g^{\bar{a}}, g^{\bar{s}})$, где $g^{\bar{a}} = (p_{i-1}, 1, \bar{p}_{i-1}, p_i)$, $g^{\bar{a}} = (p_i, -1, \bar{p}_i, p'')$, $\bar{s} = [p'', p_{i-1}]$, является базовым объектом W .

4. Если $(\bar{s} \cap \text{fr } A) \setminus (p' \cup p'') \neq \emptyset$, то W формируем в соответствии с построением объекта V (алгоритм 1, этап 1).

В случае, когда $l_{i-1} = \bar{a}$, $l_i = \hat{a}$, базовый объект W формируем аналогичным образом, используя зеркальное отображение.

После выполнения первого этапа имеем объект $A_1 = \text{cl}(A \setminus \cup W)$.

Этап 2. Формирование объекта C или D . Строим базовый объект C такой, что $l_i = \hat{a} \subset \text{fr } C$, при условии $\text{int } C \cap l_j = \emptyset$, $j \in I_n$. При этом $l_i = \hat{a}$ заменяем хордой $l_i = \bar{s}$, а $g^{\bar{a}} = (p_i, 1, \bar{p}_i, p_{i+1})$ изменяем на $g^{\bar{s}} = (p_i, 0, \bar{p}_i, p_{i+1})$. Если $\exists j$, $j \in I_n$, при котором $\text{int } C_i \cap l_j \neq \emptyset$, то в качестве базового объекта выделяем сегмент D аналогично этапу 2 алгоритма 1.

После выполнения первого и второго этапов получаем объект A'' , граница которого состоит из элементов $l_i \in \{\bar{s}, \bar{a}\}$.

Этап 3. Последовательная декомпозиция объекта A'' . Каждая часть объекта A'' делится на две части, которые затем вновь делятся на две части и т.д. до формирования множества базовых объектов вида $\{K, L\}$. Если объект $A'' \notin \{K, L\}$, то осуществляется деление объекта A'' на две части: A'_1 и A'_2 прямолинейным отрезком. Заметим, что деление объекта A'' отрезком $[a, b]$ допустимо, если $[a, b] \subset A''$, $[a, b] \cap \text{int } A'' \neq \emptyset$ и $a, b \in \text{fr } A''$. В качестве точки a будем выбирать в порядке убывания приоритетности одну из точек вида $a = p_{i+1} = \bar{s}_i \cap \bar{s}_{i+1}$ — невыпуклую вершину объекта A'' ; $a = p_{i+1} = \bar{a}_i \cap \bar{a}_{i+1}$; $a = p_{i+1} = \bar{s}_i \cap \bar{a}_{i+1}$; $a \in \bar{s}_i$, $i \in I_n$, а в качестве точки b будем выбирать в порядке убывания приоритетности $b = p_{j+1} = \bar{s}_j \cap \bar{s}_{j+1}$ невыпуклую вершину объекта A'' ; $b = p_{j+1} = \bar{a}_j \cap \bar{a}_{j+1}$; $b = p_{j+1} = \bar{s}_j \cap \bar{a}_{j+1}$; $b \in \bar{s}_j$, $b \in \bar{a}_j$, $j \in I_n$, $j \neq i$.

Последовательно перебирая варианты выбора точек a и b , находим наилучшие, с точки зрения их приоритетности, варианты деления объекта A'' от-

резком $[a, b]$. При этом при равных значениях уровней приоритетности предпочтение отдается варианту, при котором границы обеих частей разделенного объекта содержат дуги \bar{a} . На основе заданной информации о $\text{fr } A''$ формируем два новых объекта: A_1'' и A_2'' , каждый из которых затем аналогичным образом делим на две части: A_{11}'', A_{12}'' и A_{21}'', A_{22}'' и т.д. Процесс деления объекта A'' заканчивается, когда все полученные объекты принадлежат множеству базовых объектов $\{K, L\}$.

Таким образом, имеем $A = (\cup C) \cup (\cup D) \cup (\cup W) \cup (\cup L) \cup (\cup K)$.

На рис. 15 приведены примеры декомпозиции и покрытия произвольных объектов базовыми объектами вида C, D, K, L .

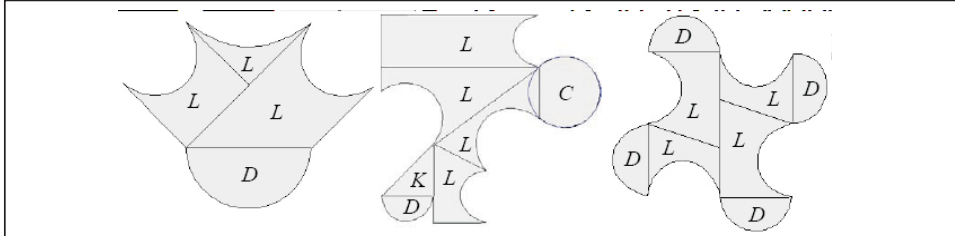


Рис. 15. Покрытие φ -объектов базовыми объектами вида C, D, K, L

Результаты численных экспериментов. Имеется множество объектов $\{T_i, i \in I_N = 1, 2, \dots, 13\}$ вида A_1 (рис. 16, а), A_2 (рис. 16, б), A_3 (рис. 16, в), причем $\{T_i, i \in I_N\} = \{T_i \in \{A_1\}, i = 1, \dots, 4, T_i \in \{A_2\}, i = 5, \dots, 8, T_i \in \{A_3\}, i = 9, \dots, 13\}$. В результате разбиения объектов A_1, A_2, A_3 имеем $A_1 = D_{11} \cup K_{12}$, $D_{11}: l_1 = (1.73, 1, 1, 0, 1, -1.73, 1)$, $s_2 = [-1.73, 1, 1.73, 1]$, $K_{12}: s_1 = [2.5, -1, 1.73, 1]$, $s_2 = [1.73, 1, -1.73, 1]$, $s_3 = [-1.73, 1, -2.5, -1]$, $s_4 = [-2.5, -1, 2.5, -1]$; $A_2 = D_{21} \cup D_{22} \cup K_{23}$, $D_{21}: l_1 = (1, 1.5, 1, 0, 1.5, -1, 1.5)$, $s_2 = [-1, 1.5, 1, 1.5]$; $D_{22}: l_1 = (-1, -1.5, 1, 0, -1.5, 1, -1.5)$, $s_2 = [1, -1.5, -1, -1.5]$; $K_{23}: s_1 = [1, 1.5, -1, 1.5]$, $s_2 = [-1, 1.5, -1, -1.5]$, $s_3 = [-1, -1.5, 1, -1.5]$, $s_4 = [1, -1.5, 1, 1.5]$; $A_3 = D_{31} \cup K_{32}$, $D_{31}: l_1 = (1, 4, 1, 0, 4, -1, 4)$, $s_2 = [-1, 4, 1, 4]$; $K_{32}: s_1 = [1, 4, -1, 4]$, $s_2 = [-1, 4, 0, -1]$, $s_3 = [0, -1, 1, 4]$.

На рис. 16, г показано размещение объектов $\{T_i, i \in I_N\}$ в полосе ширины $w=15$ переменной длины l , соответствующее локальному минимуму $l^* = 8,90344$. При этом вектор параметров размещения $u^* = (u_1^*, u_2^*, \dots, u_{13}^*)$ объектов T_1, T_2, \dots, T_{13} , где $u_i^* = (x_i, y_i, \theta_i)$, имеет вид $u^* = ((6.903, 12.322, 0.808), (3.736, 3.233, 0.846), (6.467, 1.997, 2.059), (3.59, 8.586, -0.389), (6.522, 6.646, 3.536), (5.398, 11.001, -0.763), (3.011, 6.185, 1.183), (1.743, 12.696, 5.765), (0.197, 6.152, 6.481), (8.707, 8.779, 3.339), (0.461, 4.965, 3.009), (7.214, 14.803, 4.515), (1.052, 4.457, 2.614))$. Здесь (x_i, y_i) — вектор трансляции объекта T_i , θ_i — угол поворота. Для решения задачи размещения использовалась стратегия, изложенная в [11].

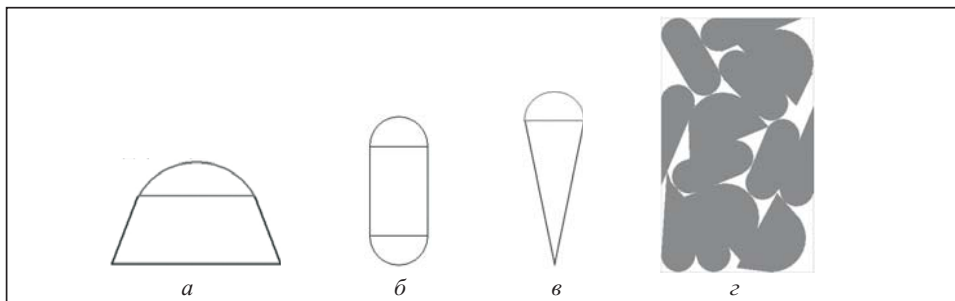


Рис. 16. Вид объектов A_1, A_2, A_3 и размещение объектов $T_i, i \in I_{13}$, соответствующее локальному минимуму

Другие примеры математического и компьютерного моделирования оптимизационных задач размещения, использующие предложенный алгоритм, можно найти в статье [11] и на Интернет сайте [12].

Таким образом, разработанный в данной статье алгоритм разбиения и соответствующий программный модуль могут быть использованы для математического и компьютерного моделирования в современных информационных системах решения 2D-задач упаковки и раскроя.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Dyckhoff H., Scheithauer G., Terno J. Cutting and packing // M. Dell'Amico, F. Maffioli and S. Martello, Eds. Annotated Bibliographies in Combinatorial Optimization, John Wiley & Sons. — Chichester, 1997. — P. 393–412.
2. Bennell J.A., Oliveira J.F. A tutorial in nesting problem: the geometry // European J. Oper. Res. Invited review. — 2008. — **184**. — P. 397–415.
3. Burke E., Heller R., Kendall G., Whitwell G. A new bottom-left-fill heuristic algorithm for the two-dimensional irregular packing problem // Operational research. — 2006. — **54**, N 3. — P. 587–601.
4. Канторович Л.В., Залгаллер В.А. Рациональный раскрой промышленных материалов. Изд. 2-е. — Новосибирск: Наука, 1971. — 299 с.
5. Stoyan Yu. G. Φ -function and its basic properties // Доп. НАН України. — 2001. — № 8. — С. 112–117.
6. Stoyan Yu., Gil M., Terno M., Romanova T., Scheithauer G. Construction of a Φ -function for two convex polytopes // Applicationes Mathematicae. — 2002. — **2**, N 29. — P. 199–218.
7. Bennell J., Scheithauer G., Stoyan Yu., Romanova T. Tools of mathematical modelling of arbitrary object packing problems // J. Annals of Operations Research, Publisher Springer Netherlands. — 2010. — **179**, N 1. — С. 343–368.
8. Stoyan Yu., Scheithauer G., Gil N., Romanova T. Φ -functions for complex 2D-objects // 4OR: Quarterly J. Belgian, French and Italian Operations Research Soc. — 2004. — **2**. — P. 69–84.
9. Stoyan Yu., Terno J., Scheithauer G., Gil N., Romanova T. Φ -functions for primary 2D-objects // Studia Informatica Universalis. — 2001. — **2**. — P. 1–32.
10. Стоян Ю.Г., Гиль Н.И. Методы и алгоритмы размещения плоских геометрических объектов. — Киев: Наук. думка, 1976. — 246 с.
11. Chernov N., Stoyan Yu., Romanova T. Mathematical model and efficient algorithms for object packing problem // Computational Geometry: Theory and Applications. 43 (2010) 535–553. doi:10.1016/j.comgeo.2009.12.003
12. <http://www.math.uab.edu/~chernov/CP>

Поступила 26.02.2010