УДК 519.86

Н.А. НЕДАШКОВСКИЙ, Т.И. КРОШКА

О РЕШЕНИИ ОДНОГО КЛАССА НЕЛИНЕЙНЫХ БАЛАНСОВЫХ МОДЕЛЕЙ МЕЖОТРАСЛЕВОГО ЭКОЛОГО-ЭКОНОМИЧЕСКОГО ВЗАИМОДЕЙСТВИЯ

Ключевые слова: *межотраслевой эколого-экономический баланс, матричные ветвящиеся цепные дроби, матричное полиномиальное уравнение, периодическая непрерывная дробь, формальный степенной ряд.*

Современные экономические системы функционируют в условиях сильного влияния экосистем, и наоборот, антропогенное воздействие на экосистемы очень сильно влияет на их динамику. Именно поэтому в большинстве случаев не следует разделять экономику и экологию, а подразумевать их как подсистемы единой целостной эколого-экономической системы. Это особенно важно сейчас, когда общество стремится к устойчивому развитию.

Среди методов изучения эколого-экономических систем или отдельных процессов эколого-экономического взаимодействия важное значение имеют методы математического моделирования. Именно математическому моделированию эколого-экономического взаимодействия на производственно-технологическом уровне посвящена настоящая работа, предметом которой являются так называемые модели межотраслевого эколого-экономического баланса, или модели Леонтьева–Форда.

Рассмотрим один из вариантов нелинейного межотраслевого эколого-экономического баланса в следующей форме [1, 2]:

$$\begin{cases} x_i^{(1)} = \sum_{j=1}^{n} \varphi_{ij}^{(11)}(x_j^{(1)}) + \sum_{s=1}^{m} \varphi_{is}^{(12)}(x_s^{(2)}) + y_i^{(1)}, \; i = \overline{1, n}, \\ x_l^{(2)} = \sum_{j=1}^{n} \varphi_{lj}^{(21)}(x_j^{(1)}) + \sum_{s=1}^{m} \varphi_{ls}^{(22)}(x_s^{(2)}) - y_l^{(2)}, \; l = \overline{1, m}. \end{cases} \tag{1}$$

Здесь $x_i^{(1)}$ $(\overline{i=1,n})$ — элементы вектора основного производства $x^{(1)} \in \mathbb{R}_+^n$ ($\mathbb{R}_+^l$ — неотрицательный ортант l-измеримого векторного пространства); $x_l^{(2)}$ $(\overline{l=1,m})$ — составляющие вектора уничтоженных загрязнителей $x^{(2)} \in \mathbb{R}_+^m$ (вспомогательных продуктов-отходов); $y_i^{(1)}$ $(i=\overline{1,n})$ — элементы вектора конечной продукции $y^{(1)} \in \mathbb{R}_+^n$; элементы $y_l^{(2)} (l = \overline{1, m})$ образуют вектор неуничтоженных загрязнителей $y^{(2)} \in \mathbb{R}_+^m$; $\varphi_{ij}^{(11)}(x_j^{(1)})$ — нелинейная функция затрат продукции i на выпуск $x_j^{(1)}$ единиц продукции j; $\varphi_{is}^{(12)}(x_s^{(2)})$ — нелинейная функция затрат продукции i на уничтожение $x_s^{(2)}$ единиц загрязнителя s; $\varphi_{lj}^{(21)}(x_j^{(1)})$ — нелинейная функция выпуска загрязнителя l при выпуске $x_j^{(1)}$ единиц продукции j; $\varphi_{ls}^{(22)}(x_s^{(2)})$ — нелинейная функция выпуска загрязнителя l при уничтожении $x_s^{(2)}$ единиц продукции s.

Модель (1) также можно подать в векторном виде

$$\begin{cases} x^{(1)} = \Phi^{(11)}(x^{(1)}) + \Phi^{(12)}(x^{(2)}) + y^{(1)}, \\ x^{(2)} = \Phi^{(21)}(x^{(1)}) + \Phi^{(22)}(x^{(2)}) - y^{(2)}, \end{cases} \tag{2}$$

где

$$\Phi_i^{(11)}(x^{(1)}) = \sum_{j=1}^{n} \varphi_{ij}^{(11)}(x_j^{(1)}),\ \ \Phi_i^{(12)}(x^{(2)}) = \sum_{s=1}^{m} \varphi_{is}^{(12)}(x_s^{(2)}),\ \ i = \overline{1, n};$$

$$\Phi_l^{(21)}(x^{(1)}) = \sum_{j=1}^{n} \varphi_{lj}^{(21)}(x_j^{(1)}),\ \ \Phi_l^{(22)}(x^{(2)}) = \sum_{s=1}^{m} \varphi_{ls}^{(22)}(x_s^{(2)}),\ \ l = \overline{1, m};$$

$$\Phi^{(11)}(x^{(1)}) = (\Phi_1^{(11)}(x^{(1)}), \ldots, \Phi_n^{(11)}(x^{(1)}))^{\mathrm{T}};$$

$$\Phi^{(12)}(x^{(2)}) = (\Phi_1^{(12)}(x^{(2)}), \ldots, \Phi_n^{(12)}(x^{(2)}))^{\mathrm{T}};$$

$$\Phi^{(21)}(x^{(1)}) = (\Phi_1^{(21)}(x^{(1)}), \ldots, \Phi_m^{(21)}(x^{(1)}))^{\mathrm{T}};$$

$$\Phi^{(22)}(x^{(2)}) = (\Phi_1^{(22)}(x^{(2)}), \ldots, \Phi_m^{(22)}(x^{(2)}))^{\mathrm{T}};$$

Т — символ транспонирования.

Модель (2) часто называют прямой моделью Леонтьева–Форда [1, 2].

Предположим, что каждая из функций $\varphi_{ij}^{(st)}(x_j)\ \forall i, j, s, t$ — полином порядка l. Это выполняется при условии, когда $\varphi_{ij}^{(st)}(x_j)$ задана таблично и затем интерполируется многочленом порядка l; или же когда $\varphi_{ij}^{(st)}(x_j)$ непрерывна, l раз дифференцируемая и ее можно разложить по формуле Тейлора. Пусть

$$\begin{cases} \varphi_{ij}^{(11)}(x_j^{(1)}) = \sum\limits_{k=0}^{l} a_{ijk}^{(11)}[x_j^{(1)}]^k \quad (i = 1, 2, \ldots, n,\ \ j = 1, 2, \ldots, n), \\ \varphi_{ij}^{(12)}(x_j^{(2)}) = \sum\limits_{s=0}^{l} a_{ijk}^{(12)}[x_j^{(2)}]^k \quad (i = 1, 2, \ldots, n,\ \ j = 1, 2, \ldots, m), \\ \varphi_{ij}^{(21)}(x_j^{(1)}) = \sum\limits_{k=0}^{l} a_{ijk}^{(21)}[x_j^{(1)}]^k \quad (i = 1, 2, \ldots, m,\ \ j = 1, 2, \ldots, n), \\ \varphi_{ij}^{(22)}(x_j^{(2)}) = \sum\limits_{k=0}^{l} a_{ijk}^{(22)}[x_j^{(2)}]^k \quad (i = 1, 2, \ldots, m,\ \ j = 1, 2, \ldots, m). \end{cases} \tag{3}$$

На данном этапе исследований нас пока не интересуют качественные исследования свойств решения. Сосредоточим внимание на проблеме его существования и вычисления. Для этого введем следующие обозначения:

$$\begin{aligned} &u_j = x_j^{(1)},\ \ p_{ij}(u_j) = \sum_{k=0}^{l} q_{ijk} u_j^k \quad (i = 1, 2, \ldots, n,\ \ j = 1, 2, \ldots, n), \\ &u_j = x_j^{(2)},\ \ p_{ij}(u_j) = \sum_{k=0}^{l} q_{ijk} u_j^k \quad (i = 1, 2, \ldots, n,\ \ j = n+1, n+2, \ldots, n+m), \\ &u_j = x_j^{(1)},\ \ p_{ij}(u_j) = \sum_{k=0}^{l} q_{ijk} u_j^k \quad (i = n+1, n+2, \ldots, n+m,\ \ j = 1, 2, \ldots, n), \\ &u_j = x_j^{(2)},\ \ p_{ij}(u_j) = \sum_{k=0}^{l} q_{ijk} u_j^k \quad (i = n+1, n+2, \ldots, n+m,\ \ j = n+1, n+2, \ldots, n+m). \end{aligned} \tag{4}$$

С учетом предположения (3) и обозначений (4) на основе (2) можно записать матричное полиномиальное уравнение

$$\begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ \vdots \\ u_n \\ \vdots \\ u_{n+m} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} p_{11}(u_1) & p_{12}(u_2) & \dots & p_{1n}(u_n) & \dots & p_{1,n+m}(u_{n+m}) \\ p_{21}(u_1) & p_{22}(u_2) & \dots & p_{2n}(u_n) & \dots & p_{2,n+m}(u_{n+m}) \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ p_{n1}(u_1) & p_{n2}(u_2) & \dots & p_{nn}(u_n) & \dots & p_{n,n+m}(u_{n+m}) \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ p_{n+m,1}(u_1) & p_{n+m,2}(u_2) & \dots & p_{n+m,n}(u_n) & \dots & p_{n+m,n+m}(u_{n+m}) \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} y_1^{(1)} \\ \vdots \\ y_n^{(1)} \\ -y_1^{(2)} \\ \vdots \\ -y_m^{(2)} \end{pmatrix}$$

или

$$\begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ \vdots \\ u_n \\ \vdots \\ u_{n+m} \end{pmatrix} = \sum_{k=0}^{l} \begin{pmatrix} q_{11k} & q_{12k} & \dots & q_{1nk} & \dots & q_{1,n+m,k} \\ q_{21k} & q_{22k} & \dots & q_{2nk} & \dots & q_{2,n+m,k} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ q_{n1k} & q_{n2k} & \dots & q_{nnk} & \dots & q_{n,n+m,k} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ q_{n+m,1,k} & q_{n+m,2,k} & \dots & q_{n+m,n,k} & \dots & q_{n+m,n+m,k} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_1^k \\ u_2^k \\ \vdots \\ u_n^k \\ \vdots \\ u_{n+m}^k \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} y_1^{(1)} \\ \vdots \\ y_n^{(1)} \\ -y_1^{(2)} \\ \vdots \\ -y_m^{(2)} \end{pmatrix}.$$

Тогда

$$\sum_{k=2}^{l} \begin{pmatrix} q_{11k} & q_{12k} & \dots & q_{1nk} & \dots & q_{1,n+m,k} \\ q_{21k} & q_{22k} & \dots & q_{2nk} & \dots & q_{2,n+m,k} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ q_{n1k} & q_{n2k} & \dots & q_{nnk} & \dots & q_{n,n+m,k} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ q_{n+m,1,k} & q_{n+m,2,k} & \dots & q_{n+m,n,k} & \dots & q_{n+m,n+m,k} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_1^k \\ u_2^k \\ \vdots \\ u_n^k \\ \vdots \\ u_{n+m}^k \end{pmatrix} +$$

$$+ \begin{pmatrix} q_{11k}-1 & q_{12k} & \dots & q_{1nk} & \dots & q_{1,n+m,k} \\ q_{21k} & q_{22k}-1 & \dots & q_{2nk} & \dots & q_{2,n+m,k} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ q_{n1k} & q_{n2k} & \dots & q_{nnk}-1 & \dots & q_{n,n+m,k} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ q_{n+m,1,k} & q_{n+m,2,k} & \dots & q_{n+m,n,k} & \dots & q_{n+m,n+m,k}-1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ \vdots \\ u_n \\ \vdots \\ u_{n+m} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} q_{11k}+y_1^{(1)} \\ q_{22k}+y_2^{(1)} \\ \vdots \\ q_{nnk}+y_n^{(1)} \\ \vdots \\ q_{n+m,n+m,k}-y_m^{(2)} \end{pmatrix} = 0.$$

Обозначим

$$\begin{cases} p_{ijk} = q_{ijk} \quad (k=0,2,\dots,l,\ i=1,2,\dots,n+m,\ j=1,2,\dots,n+m,\ i \neq j), \\ p_{ii1} = q_{ii1} \quad (i=1,2,\dots,n+m), \\ p_{ii0} = q_{ii0} + y_i^{(1)} \quad (i=1,2,\dots,n), \\ p_{ii0} = q_{ii0} - y_i^{(2)} \quad (i=n+1,n+2,\dots,n+m). \end{cases} \tag{5}$$

Тогда получим следующее уравнение относительно $U = (u_1, \dots, u_n, u_{n+1}, \dots, u_{n+m})^{\mathrm{T}}$:

$$\sum_{k=0}^{l} \begin{pmatrix} p_{11k} & p_{12k} & \dots & p_{1nk} & \dots & p_{1,n+m,k} \\ p_{21k} & p_{22k} & \dots & p_{2nk} & \dots & p_{2,n+m,k} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ p_{n1k} & p_{n,2,k} & \dots & p_{nnk} & \dots & p_{n,n+m,k} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ p_{n+m,1,k} & p_{n+m,2,k} & \dots & p_{n+m,n,k} & \dots & p_{n+m,n+m,k} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_1^k \\ u_2^k \\ \vdots \\ u_n^k \\ \vdots \\ u_{n+m}^k \end{pmatrix} = 0. \tag{6}$$

Данное уравнение также можно записать в виде

$$\sum_{k=0}^{l}\begin{pmatrix} p_{11k} & p_{12k} & \cdots & p_{1nk} & \cdots & p_{1,n+m,k} \\ p_{21k} & p_{22k} & \cdots & p_{2nk} & \cdots & p_{2,n+m,k} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ p_{n1k} & p_{n2k} & \cdots & p_{nnk} & \cdots & p_{n,n+m,k} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ p_{n+m,1,k} & p_{n+m,2,k} & \cdots & p_{n+m,n,k} & \cdots & p_{n+m,n+m,k} \end{pmatrix}\times$$

$$\times\,\mathrm{diag}\,(u_1, u_2, \ldots, u_n, \ldots, u_{n+m})^{k-1}(u_1, u_2, \ldots, u_n, \ldots, u_{n+m})^{\mathrm{T}} = 0.$$

Таким образом, получено полиномиальное матричное уравнение [3, 4] порядка l. К подобным уравнениям сводится много задач физики ядра, конденсируемых сред и элементарных частиц. Они являются также важным классом нелинейных уравнений математической физики, моделирования в энергетике, электротехнике.

Рассмотрим подход к решению нелинейных полиномиальных матричных уравнений, который основывается на теории ветвящихся цепных дробей (ВЦД) [5–7]. Следует отметить, что речь пойдет не только о численных, но и о символьных методах решения. В последнее время в электротехнике, физике и других областях науки и техники возник интерес к использованию компьютеров и для символьных преобразований и получения аналитических решений. Интерес к таким исследованиям значительно вырос в связи с интенсивными работами по искусственному интеллекту и по созданию нейрокомпьютерных систем.

Операции с символьными элементами накладывают принципиально новые требования на внешние устройства компьютеров и алгоритмические языки программирования. На первый план выходят иные критерии эффективности и оптимальности, поэтому необходимы другие подходы к решению этой задачи [8, 9].

Существует немало эффективных методов для вычисления неизвестных числовых систем алгебраических уравнений [8, 9]. Вычислительная схема каждого из них состоит в применении определенных рекуррентных соотношений, последовательное использование которых и дает значение неизвестных. Но для аналитического решения матричных уравнений с символьными элементами аналогичный подход практически не пригоден.

Рассмотрим метод построения алгоритмов решения алгебраических уравнений матричными ветвящимися цепными дробями (МВЦД) [3, 4]. Этот подход интересен и сам по себе, а кроме того, применяется для создания методологии новых алгоритмов и получения новых результатов.

Вернемся к матричным цепным дробям. Пусть X — банахово пространство квадратных матриц порядка $p\times p$ над полем $\mathbb{C}$.

Введем в рассмотрение следующие обозначения:

$$\begin{cases} D_1 = \sum\limits_{k_1=1}^{N} b_{k_1}^{-1} a_{k_1} = \sum\limits_{k_1=1}^{N} \dfrac{a_{k(1)}\,|}{|\,b_{k(1)}}, \\ D_2 = \sum\limits_{k_1=1}^{N}\left(b_{k_1} + \sum\limits_{k_2=1}^{N} b_{k_1k_2}^{-1} a_{k_1k_2}\right)^{-1} a_{k_1} = \sum\limits_{k_1=1}^{N} \dfrac{a_{k(1)}\,|}{|\,b_{k(1)}} + \sum\limits_{k_2=1}^{N} \dfrac{a_{k(2)}\,|}{|\,b_{k(2)}}, \\ \cdots \\ D_i = \sum\limits_{k_1=1}^{N} \dfrac{a_{k(1)}\,|}{|\,b_{k(1)}} + \sum\limits_{k_2=1}^{N} \dfrac{a_{k(2)}\,|}{|\,b_{k(2)}} + \ldots + \sum\limits_{k_i=1}^{N} \dfrac{a_{k(i)}\,|}{|\,b_{k(i)}}, \\ \cdots \\ D = \sum\limits_{k_1=1}^{N} \dfrac{a_{k(1)}\,|}{|\,b_{k(1)}} + \sum\limits_{k_2=1}^{N} \dfrac{a_{k(2)}\,|}{|\,b_{k(2)}} + \ldots + \sum\limits_{k_i=1}^{N} \dfrac{a_{k(i)}\,|}{|\,b_{k(i)}} + \ldots \end{cases}$$

Здесь $k(i)=k_1 k_2 \ldots k_i$ — сокращенные обозначения для мультииндексов; $a_{k(i)}, b_{k(i)} \in X$ — квадратные невырожденные матрицы размера $p \times p$.

Определение. Конечную дробь

$$D_m = \sum_{k_1=1}^{N} \frac{a_{k(1)} \mid}{\mid b_{k(1)}} + \sum_{k_2=1}^{N} \frac{a_{k(2)} \mid}{\mid b_{k(2)}} + \ldots + \sum_{k_m=1}^{N} \frac{a_{k(m)} \mid}{\mid b_{k(m)}}$$

назовем m-й подходящей дробью бесконечной МВЦД.

В дальнейшем МВЦД будем записывать в виде

$$D = \mathop{D}\limits_{i=1}^{\infty} \sum_{k_i=1}^{N} \frac{a_{k(i)}}{b_{k(i)}}, \qquad (7)$$

также использовать обозначения

$$D_{k(m),m} = b_{k(m)}, \; D_{k(i),m} = b_{k(i)} + \sum_{k_{s+1}=1}^{N} \frac{a_{k(s+1)} \mid}{\mid b_{k(s+1)}} + \ldots + \sum_{k_m=1}^{N} \frac{a_{k(m)} \mid}{\mid b_{k(m)}} \quad (i < m).$$

Рассмотрим применение МВЦД для решения матричного полиномиального уравнения. Для начала остановимся на построении алгоритма для квадратного уравнения

$$XAX + X + B = 0, \qquad (8)$$

где A, B — квадратные ненулевые матрицы порядка N с постоянными элементами, X — неизвестная квадратная матрица порядка N.

Уравнение (8) можно записать

$$(XA+E)X = -B$$

или, допуская существование обратной матрицы $(XA+E)^{-1}$,

$$X = -(XA+E)^{-1} B .$$

Для удобства в дальнейшем будем использовать обозначение

$$-(XA+E)^{-1} B = -\frac{B}{E+XA} .$$

Тогда методом вкладывания для решения (8) запишем следующее разложение X в непрерывную дробь:

$$X = -\cfrac{B}{E - \cfrac{BA}{E - \cfrac{BA}{E - \ddots}}} .$$

Опишем теперь построение вычислительной схемы для квадратного уравнения

$$AX^2 + BX + C = 0, \qquad (9)$$

где A, B, C и X — матрицы размера $p \times p$.

После перегруппировки его членов можно записать

$$(AX+B)X = -C,$$

$$X = -(AX+B)^{-1} C = \frac{-C \mid}{\mid B+AX}. \qquad (10)$$

При использовании композиции (10) получаем следующее формальное разложение X в непрерывную дробь:

$$X=-\frac{C|}{|B}-\frac{AC|}{|B}-\frac{AC|}{|B}-\ldots,$$

или

$$X=\frac{a_1|}{|b_1}+\frac{a_2|}{|b_2}+\ldots,$$

где $a_1=-C,\ b_1=B,\ a_i=-AC,\ b_i=B\ (i=2,3,\ldots)$.

Аналогичную схему можно использовать и для уравнения

$$X^2A+XB+C=0, \tag{11}$$

A, B, C и X, как и в предыдущем случае, — матрицы размера $p\times p$.

После перегруппировки членов уравнения (11) можно записать $X(XA+B)=-C$, откуда $X=-C(XA+B)^{-1}$ и $X=-\frac{C|}{|B}-\frac{CA|}{|B}-\frac{CA|}{|B}-\ldots$ или $X=\frac{a_1|}{|b_1}+\frac{a_2|}{|b_2}+\ldots$, где $a_1=-C$, $b_1=B$, $a_i=-AC$, $b_i=B$ $(i=2,3,\ldots)$.

Аналогичный подход можно использовать и для квадратного уравнения неканонического вида, которое часто встречается на практике:

$$AX+XB+XFX+C=0, \tag{12}$$

A, B, C, F и X — матрицы размера $p\times p$.

После перегруппировки его членов получаем

$$(A+XF)X=-XB-C=AF^{-1}B-XFF^{-1}B-AF^{-1}B-C$$

или

$$X=-(XF+A)^{-1}(XB+C)=-(XF+A)^{-1}(XB+C)B^{-1}FF^{-1}B,$$

$$X=-(XF+A)^{-1}(XF+CB^{-1}F)F^{-1}B,$$

$$X=-(XF+A)^{-1}(XF+A-A+CB^{-1}F)F^{-1}B,$$

$$X=-(XF+A)^{-1}[(XF+A)-(A-CB^{-1}F)]F^{-1}B,$$

$$X=-F^{-1}B+(XF+A)^{-1}(A-CB^{-1}F)F^{-1}B,$$

$$X=-F^{-1}B+(XF+A)^{-1}(AF^{-1}B-C),$$

$$(A+XF)X=-(A+XF)F^{-1}B+(AF^{-1}B-C),$$

$$X=-F^{-1}B+\frac{AF^{-1}B-C|}{|A+XF}. \tag{13}$$

Теперь, используя композицию (13), разложим формальное решение (12) в следующую периодическую непрерывную дробь:

$$X=-F^{-1}B+\frac{AF^{-1}B-C|}{|A-F^{-1}BF}+\frac{AF^{-1}BF-CF|}{|A-F^{-1}BF}+\ldots+\frac{AF^{-1}BF-CF|}{|A-F^{-1}BF}+\ldots$$

Представленную схему также можно использовать для дискретного уравнения Риккати вида

$$A^{\mathrm{T}}XA-X-A^{\mathrm{T}}XB(R+B^{\mathrm{T}}XB)^{-1}B^{\mathrm{T}}XA+Q=0, \tag{14}$$

где A, B, C, R, Q и X — матрицы размера $p\times p$.

Перегруппировав члены уравнения (14), получим

$$A^{\mathrm{T}} X (A - E - B(R + B^{\mathrm{T}} XB)^{-1} B^{\mathrm{T}} XA) + Q = 0,$$

$$A^{\mathrm{T}} X (A - E - B(R + B^{\mathrm{T}} XB)^{-1} B^{\mathrm{T}} XBB^{-1} A) + Q = 0.$$

Тогда

$$A^{\mathrm{T}} X [A - E - B(R + B^{\mathrm{T}} XB)^{-1} (R + B^{\mathrm{T}} XB - R) B^{-1} A)] + Q = 0,$$

$$A^{\mathrm{T}} X [A - E - BB^{-1} A + B(R + B^{\mathrm{T}} XB)^{-1} RB^{-1} A)] + Q = 0.$$

Отсюда $X = -[A - E - BB^{-1} A + B(R + B^{\mathrm{T}} XB)^{-1} RB^{-1} A)]^{-1} (A^{-1})^{\mathrm{T}} Q = 0$.

Таким образом, для уравнения Риккати можно записать рекуррентную формулу

$$X = -\frac{(A^{-1})^{\mathrm{T}} Q \,\big|}{\big|\, E + BB^{-1} A - A - B \dfrac{RB^{-1} A}{R + B^{\mathrm{T}} XB}}. \tag{15}$$

Используя композицию (15) для уравнения (14) с числовыми или символьными элементами, можно записать следующее разложение X в непрерывную дробь:

$$X = -\frac{(A^{-1})^{\mathrm{T}} Q \,\big|}{\big|\, E + BB^{-1} A - A} - B \frac{RB^{-1} A \,\big|}{\big|\, R} - B^{\mathrm{T}} \frac{(A^{-1})^{\mathrm{T}} QB \,\big|}{\big|\, E + BB^{-1} A - A} - \ldots$$

$$\ldots - B \frac{RB^{-1} A \,\big|}{\big|\, R} - B^{\mathrm{T}} \frac{(A^{-1})^{\mathrm{T}} QB \,\big|}{\big|\, E + BB^{-1} A - A} - \ldots .$$

Таким образом, для каждого из рассмотренных уравнений можно построить формальную схему разложения решения в матричную цепную дробь. Вопрос существования решения и сходимости дроби к нему не будет сейчас обсуждаться [10]. Однако для каждого конкретного уравнения (8), (9), (11), (12) и (14) применяется своя особенная схема, которая не носит общего характера. Но такую схему можно построить, причем и для матричных уравнений высших порядков канонического вида. Далее предметом рассмотрения будет именно общий подход к решению матричных полиномиальных уравнений, который основывается на использовании аппарата ВЦД.

В работе [3] уже рассматривалось применение ВЦД для уравнений вида

$$x^n + a_{n-1} x^{n-1} + a_{n-2} x^{n-2} + \ldots + a_1 x + a_0 = 0, \tag{16}$$

где a_i $(i = 0, 1, \ldots, n-1)$ и x — вещественные числа, а $n \geq 2$ — целое число.

Рассмотрим матричное полиномиальное уравнение n-го порядка

$$X^n + A_{n-1} X^{n-1} + A_{n-2} X^{n-2} + \ldots + A_1 X + A_0 = 0, \tag{17}$$

где матрицы $A_i \in \mathbb{R}^{p \times p}$ $(i = 0, 1, \ldots, n-1)$, $X \in \mathbb{R}^{p \times q}$, а $n \geq 2$ — целое число.

Предложенная в [3] схема для уравнения (16) не может быть формально обобщена в случае матричного полинома в силу некоммутативности умножения матриц общего вида, но подход к решению (17) может быть построен, и его схема будет рассмотрена далее.

Теорема 1 (теорема Виета). Пусть $F(X)$ — многочлен степени n с коэффициентами из некоторой области и старшим коэффициентом 1. Тогда над областью, в которую входят все корни $F(X)$ (например, над областью разложения $F(X)$), многочлен $F(X)$ раскладывается на линейные множители

$$F(X)=X^n+A_{n-1}X^{n-1}+\ldots+A_1X+A_0=(X-\alpha_1)(X-\alpha_2)\ldots(X-\alpha_n),$$

где α_i — корни $F(X)$, $i=1,2,\ldots,n$, причем выполняются соотношения

$$\begin{cases} A_0=(-1)^n\alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_n, \\ A_1=(-1)^{n-1}(\alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_{n-1}+\alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_{n-2}\alpha_n+\ldots+\alpha_2\alpha_3\ldots\alpha_n), \\ \ldots \\ A_{n-1}=-(\alpha_1+\alpha_2+\ldots+\alpha_n). \end{cases}$$

Утверждение. Решение уравнения (17) n-го порядка можно подать в виде бесконечной периодической цепной дроби вида (7) с $n-1$ веткой разветвления.

Доказательство. Основываясь на теореме 1, уравнение (17) также можно записать в виде

$$(X-\alpha_1)(X-\alpha_2)\ldots(X-\alpha_{n-1})(X-B_0)+$$

$$+B_1X^{n-2}+B_2X^{n-3}+\ldots+B_{n-3}X+B_{n-2}=0.$$

Предполагая, что $\alpha_1,\alpha_2,\ldots,\alpha_{n-1}$ не являются решением (16), можно записать

$$X=B_0+[(X-\alpha_1)(X-\alpha_2)\ldots(X-\alpha_{n-1})]^{-1}\times$$

$$\times[B_1X^{n-2}+B_2X^{n-3}+\ldots+B_{n-3}X+B_{n-2}]=$$

$$=B_0+\frac{B_1X^{n-2}+B_2X^{n-3}+\ldots+B_{n-3}X+B_{n-2}}{(X-\alpha_1)(X-\alpha_2)\ldots(X-\alpha_{n-1})}.$$

Последнее уравнение также можно записать в виде

$$X=B_0+(X-\alpha_1)^{-1}Y_1+(X-\alpha_2)^{-1}Y_2+\ldots+(X-\alpha_{n-1})^{-1}Y_{n-1}=$$

$$=B_0+\frac{Y_1}{X-\alpha_1}+\frac{Y_2}{X-\alpha_2}+\ldots+\frac{Y_{n-1}}{X-\alpha_{n-1}}, \tag{18}$$

где $Y_1,Y_2,\ldots,Y_{n-1}$ — некоторые неизвестные матрицы. Для их определения можно воспользоваться методом неопределенных коэффициентов. Для этого приведем простые дроби в (18) к общему знаменателю:

$$X=\left[B_0\prod_{i=1}^{n-1}(X-\alpha_i)+Y_1\prod_{i=2}^{n-1}(X-\alpha_i)+Y_2(X-\alpha_1)\prod_{i=3}^{n-1}(X-\alpha_i)+\ldots\right.$$

$$\left.\ldots+Y_j\prod_{i=1}^{j-1}(X-\alpha_i)\prod_{i=j+1}^{n-1}(X-\alpha_i)+\ldots+Y_{n-1}\prod_{i=1}^{n-2}(X-\alpha_i)\right]\Big/\prod_{i=1}^{n-1}(X-\alpha_i),$$

откуда получим уравнение

$$\left[-X\prod_{i=1}^{n-1}(X-\alpha_i)+B_0\prod_{i=1}^{n-1}(X-\alpha_i)+Y_1\prod_{i=2}^{n-1}(X-\alpha_i)+Y_2(X-\alpha_1)\prod_{i=3}^{n-1}(X-\alpha_i)+\ldots\right.$$

$$\left.\ldots+Y_j\prod_{i=1}^{j-1}(X-\alpha_i)\prod_{i=j+1}^{n-1}(X-\alpha_i)+\ldots+Y_{n-1}\prod_{i=1}^{n-2}(X-\alpha_i)\right]\Big/\prod_{i=1}^{n-1}(X-\alpha_i)=0.$$

Для точности сначала запишем каждое произведение, воспользовавшись теоремой Виета:

$$-X\prod_{i=1}^{n-1}(X-\alpha_i)=-[X^n+(-1)^{n-1}\alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_{n-1}X^{n-1}+(-1)^{n-2}(\alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_{n-2}+$$

$$+\alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_{n-3}\alpha_{n-1}+\ldots+\alpha_2\alpha_3\ldots\alpha_{n-1})X^{n-2}+\ldots$$

$$\ldots+(\alpha_1\alpha_2+\alpha_1\alpha_3+\ldots+\alpha_{n-2}\alpha_{n-1})X^2-(\alpha_1+\alpha_2+\ldots+\alpha_{n-1})X\,];$$

$$B_0\prod_{i=1}^{n-1}(X-\alpha_i)=B_0X^{n-1}+(-1)^{n-1}\alpha_1\alpha_2\ldots$$

$$\ldots\alpha_{n-1}B_0X^{n-2}+(-1)^{n-2}(\alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_{n-2}+$$

$$+\alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_{n-3}\alpha_{n-1}+\ldots+\alpha_2\alpha_3\ldots\alpha_{n-1})B_0X^{n-3}+\ldots$$

$$\ldots+(\alpha_1\alpha_2+\alpha_1\alpha_3+\ldots+\alpha_{n-2}\alpha_{n-1})B_0X-(\alpha_1+\alpha_2+\ldots+\alpha_{n-1})B_0;$$

$$Y_1\prod_{i=2}^{n-1}(X-\alpha_i)=Y_1X^{n-2}+(-1)^{n-2}\alpha_2\alpha_3\ldots$$

$$\ldots\alpha_{n-2}Y_1X^{n-3}+(-1)^{n-3}(\alpha_2\alpha_3\ldots\alpha_{n-2}+$$

$$+\alpha_2\alpha_3\ldots\alpha_{n-3}\alpha_{n-1}+\ldots+\alpha_3\alpha_4\ldots\alpha_{n-1})Y_1X^{n-4}+\ldots$$

$$\ldots+(\alpha_2\alpha_3+\alpha_2\alpha_4+\ldots+\alpha_{n-2}\alpha_{n-1})Y_1X-(\alpha_2+\alpha_3+\ldots+\alpha_{n-1})Y_1;$$

$$\ldots$$

$$Y_j\prod_{i=2}^{j-1}(X-\alpha_i)\prod_{i=j+1}^{n-1}(X-\alpha_i)=$$

$$=Y_jX^{n-2}+(-1)^{n-2}\alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_{j-1}\alpha_{j+1}\ldots\alpha_{n-1}Y_jX^{n-3}+$$

$$+(-1)^{n-3}(\alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_{j-1}\alpha_{j+1}\ldots\alpha_{n-2}+\alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_{j-1}\alpha_{j+1}\ldots\alpha_{n-3}\alpha_{n-1}+\ldots$$

$$\ldots+\alpha_2\alpha_3\ldots\alpha_{j-1}\alpha_{j+1}\ldots\alpha_{n-2}\alpha_{n-1})Y_jX^{n-4}+\ldots+(\alpha_2\alpha_3+\alpha_2\alpha_4+\ldots$$

$$\ldots+\alpha_{j-1}\alpha_{j+1}+\alpha_{j-1}\alpha_{j+2}+\ldots+\alpha_{n-2}\alpha_{n-1})Y_jX-$$

$$-(\alpha_1+\alpha_2+\ldots+\alpha_{j-1}+\alpha_{j+1}+\ldots+\alpha_{n-1})Y_j;$$

$$\ldots$$

$$Y_{n-1}\prod_{i=2}^{n-2}(X-\alpha_i)=Y_{n-1}X^{n-2}+(-1)^{n-2}\alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_{n-2}\alpha_{n-1}Y_{n-1}X^{n-3}+$$

$$+(-1)^{n-3}(\alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_{n-3}+\alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_{n-4}\alpha_{n-2}+\ldots+\alpha_2\alpha_3\ldots\alpha_{n-2})Y_{n-1}X^{n-4}+\ldots$$

$$\ldots+(\alpha_1\alpha_2+\alpha_1\alpha_3+\ldots+\alpha_{n-3}\alpha_{n-2})Y_{n-1}X-(\alpha_1+\alpha_2+\ldots+\alpha_{n-2})Y_{n-1}.$$

Выполним теперь сложение правых частей записанных равенств с одновременным группированием коэффициентов при одинаковых степенях X. Приравнивая коэффициенты одинаковых степеней X, получим следующую систему уравнений для определения Y_j $(j=1,2,\ldots,n-1)$:

$$
\begin{cases}
(-1)^{n-1}\alpha_1\alpha_2\ldots.\alpha_{n-1}+B_0=a_1,\\
(-1)^{n-2}\sum\limits_{k=1}^{n-1}\prod\limits_{i=1}^{k-1}\alpha_i\prod\limits_{i=k+1}^{n-1}\alpha_i-\sum\limits_{i=1}^{n-1}Y_i+(-1)^{n-1}\alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_{n-1}B_0=a_2,\\
(-1)^{n-3}\sum\limits_{k=1}^{n-2}\sum\limits_{l=k+1}^{n-2}(1-\delta_{kl})\prod\limits_{i=1}^{k-1}\alpha_i\prod\limits_{i=k+1}^{l-1}\alpha_i\prod\limits_{i=l+1}^{n-2}\alpha_i+\sum\limits_{k=1}^{n-1}\prod\limits_{i=1}^{k-1}\alpha_i\prod\limits_{i=k+1}^{n-1}\alpha_iY_k+\\
+(-1)^{n-1}\sum\limits_{k=1}^{n-1}\prod\limits_{i=1}^{k-1}\alpha_iB_0=a_3,\\
\ldots\\
\sum\limits_{i=1}^{n-1}\alpha_i+\sum\limits_{k=2}^{n-1}\sum\limits_{l=k+1}^{n-1}\alpha_k\alpha_lY_1+\ldots+\sum\limits_{k=1}^{n-1}\sum\limits_{l=k+1}^{n-1}(1-\delta_{kl})\alpha_k\alpha_lY_j+\ldots\\
\ldots+\sum\limits_{k=1}^{n-2}\sum\limits_{l=k+1}^{n-2}\alpha_i\alpha_lY_{n-1}=a_{n-1};\\
\sum\limits_{i=1}^{n-1}\alpha_iY_1+\ldots+\sum\limits_{i=1}^{n-1}(1-\delta_{kl})\alpha_jY_j+\ldots+\sum\limits_{i=1}^{n-2}\alpha_iY_{n-1}+\sum\limits_{i=1}^{n-1}\alpha_iB_0=a_n,
\end{cases}
$$

где $\delta_{kl}=\begin{cases}1, \text{ если } k=l,\\ 0, \text{ если } k\neq l.\end{cases}$

Если выбрать все α_i попарно разными, то последняя система n уравнений с n неизвестными Y_i $(i=1,2,\ldots,n-1)$ будет иметь единственное решение. Используя закон композиции (7) для X, получим следующее разложение в ВЦД:

$$
X=B_0+\sum_{i=1}^{n-1}\frac{Y_i\,|}{|\,B_0-\alpha_i}+\sum_{j=1}^{n-1}\frac{Y_j\,|}{|\,B_0-\alpha_j}+\ldots+\sum_{m=1}^{n-1}\frac{Y_m\,|}{|\,B_0-\alpha_m}+\ldots,
$$

что и следовало доказать.

Вопрос сходимости к решению такой ВЦД рассматриваться не будет, а вопрос сходимости самой дроби можно изучить, используя известные достаточные признаки [11–14].

Существует иной подход, который основывается на теореме из работы [15]. Эта теорема дает необходимые и достаточные условия того, что для заданного формального степенного ряда (ФСР) существует соответствующая правильная C-дробь, а также явные выражения для коэффициентов правильной C-дроби через коэффициенты ФСР. Условия формулируются с помощью определителей Ганкеля $H_k^{(n)}$ (порядка k), связанных с ФСР

$$
L=c_0+c_1z+c_2z^2+c_3z^3+\ldots \tag{19}
$$

и определенных следующим образом:

$$
H_0^{(n)}=1,\ H_k^{(n)}=\begin{vmatrix} c_n & c_{n+1} & \ldots & c_{n+k-1}\\ c_{n+1} & c_{n+2} & \ldots & c_{n+k}\\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots\\ c_{n+k-1} & c_{n+k} & \ldots & c_{n+2k-2}\end{vmatrix},\ k=1,2,3,\ldots
$$

Теорема 2 [15]. Если для заданного ФСР (19) существует правильная C-дробь $1+\underset{n=1}{\overset{\infty}{K}}(a_n z/1)$, $a_n \neq 0$, которая соответствует L (в точке $z=0$), то

$$H_k^{(1)} \neq 0 \text{ и } H_k^{(2)} \neq 0,\ k=1,2,3,\dots, \tag{20}$$

$$a_1 = H_1^{(1)},\ a_{2m} = -\frac{H_{m-1}^{(1)} H_m^{(2)}}{H_m^{(1)} H_{m-1}^{(2)}},\ a_{2m+1} = -\frac{H_{m+1}^{(1)} H_{m-1}^{(2)}}{H_m^{(1)} H_m^{(2)}},\ m=1,2,3,\dots, \tag{21}$$

и наоборот, если имеют место соотношения (20) и (21), то правильная C-дробь с коэффициентами a_n, которые определены из равенств (20) и (21), соответствуют ряду (19).

Рассмотрим теперь уравнение вида

$$\sum_{i=1}^{n} A_i X^{n-i} = 0, \tag{22}$$

где A_i — постоянная, а X — неизвестная квадратная матрица порядка n.

Предполагая, что $X=0$ не является решением уравнения (22), запишем

$$(A_0 + A_1 X^{n-2} + \dots + A_{n-2} X + A_{n-1}) X + A_n = 0,$$

откуда

$$X = -(A_0 + A_1 X^{n-2} + \dots + A_{n-2} X + A_{n-1})^{-1} A_n.$$

Применив тождество Эйлера для связи между рядами и цепными дробями [13], последнее равенство можно представить в виде

$$X = \frac{-A_n \mid}{\mid 0} + \frac{A_{n-1} \mid}{\mid E} - \frac{A_{n-1}^{-1} A_{n-2} X \mid}{\mid E + A_{n-1}^{-1} A_{n-2} X} - \frac{A_{n-2}^{-1} A_{n-3} X \mid}{\mid E + A_{n-2}^{-1} A_{n-3} X} - \dots - \frac{A_0^{-1} A_1 X \mid}{\mid E + A_0^{-1} A_1 X}.$$

Используя закон композиции, (22) можно записать следующим разложением X в бесконечную фигурную [4] ВЦД:

$$X = \cfrac{-A_n}{\cfrac{A_{n-1}}{E - \cfrac{\cfrac{-A_{n-1}^{-1} A_{n-2} A_n}{E - \dots}}{E + \cfrac{-A_{n-1}^{-1} A_{n-2} A_n}{E - \dots - \cfrac{\cfrac{A_0^{-1} A_1 A_2}{E - \dots}}{E + \cfrac{A_0^{-1} A_1 A_2}{E - \dots}}}}}}. \tag{23}$$

Для неформального использования (23) в системах компьютерной алгебры необходимо применять признаки сходимости и устойчивости ВЦД.

Следует отметить, что для записи решений уравнения (22) в виде ВЦД также можно применять T- и C -дроби [11]. Но их описание, как и получение кортежа решений, и их отделение, являются предметом отдельного исследования.

На языке С++ написаны процедуры для решения уравнений вида (22) с помощью разложения в периодическую ВЦД, а также в фигурные T-, J- и C-дроби. При решении уравнения $x^3 - 6x^2 + 11x - 6 = 0$ после 12 итераций получены следующие результаты: значение x для периодической ВЦД при невязке 1.14441900 составило 0.999994247; для C-дроби при нулевой невязке составило 1.0000000000; для J-дроби при невязке 0.8933951 составило 1.048081994.

Хотя результаты вычислительного эксперимента и имеют убедительный вид, вопрос о сходимости алгоритма к решению уравнения остается открытым, но это будет предметом изучения следующих публикаций.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Григоркiв В.С. Моделювання еколого-економічної взаємодії: Навч. посібник. — Чернівці: Рута, 2007. — 84 с.
2. Ляшенко I.М. Економіко-математичні методи та моделі сталого розвитку. — К.: Вища шк., 1999. — 236 с.
3. Nedashkovskyy M. Solving of non-linear polynomial equation by branching chain fractions // Comput. Intern. Sci. J. — 2003. — **2**, N 1.
4. Nedashkovskyy M. The convergence of branched continued fractions to solutions of polynomial matrix equations // VIIth Intern. Conf. INTERPOR 2008. Porous Materials. Theory and Experiment. Bydgoszcz / Lubostroń, 20–22 October 2008, Kazimerz Wielki Bydgoszcz Univ., 2008. — P. 63–64.
5. Боднар Д.И. Ветвящиеся цепные дроби. — Киев: Наук. думка, 1986. — 176 с.
6. Боднарчук П.I., Скоробогатько В.Я. Гіллясті ланцюгові дроби та їх застосування. — Київ: Наук. думка, 1974. — 271 с.
7. Скоробогатько В.Я. Теория ветвящихся цепных дробей и ее применение в вычислительной математике. — М.: Наука, 1983. — 311 с.
8. Акритас А. Основы компьютерной алгебры с приложениями. — М.: Мир, 1994. — 544 с.
9. Дэвэнпорт Дж., Сирэ И., Турнье Э. Компьютерная алгебра. — М.: Мир, 1991. — 352 с.
10. Недашковский Н.А. О сходимости и вычислительной устойчивости ветвящихся цепных дробей некоторых типов // Математические методы и физико-математические поля. — 1984. — Вып. 20. — С. 27–31.
11. Воеводин В.В. Численные методы алгебры. — М.: Наука, 1966. — 248 с.
12. Григоркiв В.С., Верстяк А.В. Прогнозування системи збалансованих цін на основі моделі Леонтьєва-Форда // Наук. вісн. Львів. нац. ун-ту ім. Івана Франка: Проблеми економічної кібернетики. — 2007. — Спецвипуск 16. — С. 61–68.
13. Григоркiв В.С. Моделювання економіки: Навч. посібник. Ч. 2. — Чернівці: Рута, 2006. — 100 с.
14. Ланкастер П. Теория матриц. — М.: Мир, 1978. — 280 с.
15. Джоунс У., Трон В. Непрерывные дроби. Аналитическая теория и приложения. — М.: Мир, 1985. — 414 с.

Поступила 11.09.2009