УДК 519.21

А.А. ВОЙНА

АСИМПТОТИЧЕСКАЯ ОПТИМИЗАЦИЯ ДЛЯ СТОХАСТИЧЕСКИХ МОДЕЛЕЙ, ПОСТРОЕННЫХ НА ОСНОВАНИИ СЛОЖНОГО ПУАССОНОВСКОГО ПРОЦЕССА

Ключевые слова: *пуассоновский процесс, цепь Маркова, функция риска, оптимальное решение, асимптотический анализ, предельная модель, приближенное решение.*

Использование математических методов принятия оптимальных решений в условиях неопределенности предусматривает формализацию фактора неопределенности, а также построение соответствующей функции цели [10]. Поэтому полезной в практических применениях может быть рассмотренная в настоящей статье общая модель, которую охарактеризуем как многомерный сложный пуассоновский процесс, управляемый цепью Маркова с непрерывным временем. Полученные здесь результаты позволяют находить функцию риска в предложенной модели, используя точные аналитические формулы. Кроме того, в статье показано, что при решении практических задач для получения приближенных решений можно эффективно применять методы асимптотического анализа.

Приведем вначале конструктивное определение управляемого пуассоновского процесса, опираясь на его интерпретацию в прикладных моделях. Пусть объектом исследования является некоторая стохастическая система с конечным множеством состояний:

$$\mathrm{Z} = \{1, 2, \dots, m\}.$$

Процесс изменения состояний исследуемой системы описывает цепь Маркова $x(t)$, $t \ge 0$, с непрерывным временем, с множеством состояний $\mathrm{Z} = \{1, 2, \dots, m\}$ и матрицей интенсивностей переходов $A = [a_{ij}]$, $i, j = 1, 2, \dots, m$. Предположим, что для каждого состояния $i \in \mathrm{Z}$ определена случайная величина ζ_i с функцией распределения

$$U_i(x) = P\{\zeta_i < x\}, \; i \in \mathrm{Z} = \{1, 2, \dots, m\}.$$

Пусть на вероятностном пространстве $(\Omega, \mathfrak{F}, \mathrm{P})$ кроме цепи $x(t)$, $t \ge 0$, и семейства случайных величин $\{\zeta_i, \; i \in \mathrm{Z}\}$ определен независимый от них пуассоновский процесс $\Pi(t)$, $t \ge 0$, с параметром ν. Пусть также точечный случайный процесс $S(k) \in [0, +\infty)$ с дискретным временем $k = 0, 1, 2, \dots$ описывает поток событий пуассоновского процесса $\Pi(t)$, $t \ge 0$, т.е.

$$S(0) = 0, \quad \Pi(t) = \max\{k : S(k) \le t\}.$$

Многомерным сложным пуассоновским процессом, управляемым цепью Маркова с непрерывным временем, будем называть векторный случайный процесс

$$\xi(t) = \{\xi_1(t), \xi_2(t), \dots, \xi_m(t)\},$$

который строится следующим образом. В начальный момент времени $t = 0$ полагаем

$$\xi(0) = \underbrace{\{0, 0, \dots, 0\}}_{m}.$$

Изменения координат процесса $\xi(t)$ происходят в моменты времени $S(k)$, причем если $x(S(k)) = i$, то значение координаты $\xi_i(t)$ увеличивается на величину ζ_i:

$$\xi_i(S(k) + 0) = \xi_i(S(k)) + \zeta_i.$$

Все остальные координаты не изменяются:

$$\xi_j(S(k)+0)=\xi_j(S(k)),\ j\in \mathrm{Z},\ \ i\neq j.$$

Пусть $z=\{z_1, z_2, \dots, z_m\}\geq 0$ — некоторый вектор с неотрицательными координатами

$$\theta_i(z)=\min\{t:\xi_i(t)>z_i\},\ \ i=1,\dots,m,$$

$$\theta(z)=\theta(z_1, z_2, \dots, z_m)=\min\{\theta_1(z), \theta_2(z), \dots, \theta_m(z)\},$$

т.е. $\theta(z_1, z_2,\dots, z_m)$ — момент пересечения процессом $\xi(t)=\{\xi_1(t), \xi_2(t),\dots$ $\dots, \xi_m(t)\}$ уровня $z=\{z_1, z_2, \dots, z_m\}$. В прикладных моделях случайная величина $\theta(z)$ может представлять фактор неопределенности [10, с. 33] исследуемой системы и связанный с ним риск принятия решений. Определим $\Xi(z)$, где $z=\{z_1, z_2, \dots, z_m\}\in R^m$, как множество в m-мерном пространстве, для элементов $x=\{x_1, x_2, \dots, x_m\}\in \Xi(z)$ которого выполняется неравенство $x\leq z$, т.е. для всех координат $i=1,2,\dots,m$ имеем $x_i\leq z_i$. Тогда подмножество $\Xi(z)\subset R^m$ можно интерпретировать, как пространство «безопасных» для исследованной системы состояний, а $\theta(z_1, z_2, \dots, z_m)$ — момент пересечения процессом $\xi(t)=\{\xi_1(t), \xi_2(t), \dots, \xi_m(t)\}$ уровня $z=\{z_1, z_2, \dots, z_m\}$, будет моментом выхода системы из этого подмножества. В таком случае функцию распределения $R(t,z)=R(t, z_1, z_2, \dots, z_m)=P\{\theta(z)<t\}$ момента $\theta(z_1, z_2, \dots, z_m)$ можно рассматривать, как функцию риска и использовать для построения целевой функции соответствующей оптимизационной задачи.

Введем совокупность случайных величин $\{\zeta_i^{(k)},\ i\in \mathrm{Z},\ \ k=0,1,2,\dots\}$, не зависящих от случайных процессов $x(t)$, $\Pi(t)$ и таких, что для различных значений индекса k величины $\zeta_i^{(k)}$ взаимно независимы, их распределение не зависит от индекса k и определяется функцией распределения $U_i(x)$, $i=1,2,\dots,m$. Пусть символ $S(k)$ для натуральных значений $k=1,2,\dots$ означает случайную величину, имеющую распределение Эрланга с параметрами (k,ν). Определим однородную цепь Маркова с дискретным временем $\eta(k)$, $k=0,1,2,\dots$, которая имеет конечное множество состояний $\mathrm{Z}=\{1,2,\dots,m\}$. Начальное распределение цепи $\eta(k)$ совпадает с начальным распределением процесса $x(t)$, $t\geq 0$, а элементы p_{ij} матрицы $P=||p_{ij}||$, $i,j=1,2,\dots,m$, переходных вероятностей за один шаг определяются из системы линейных уравнений

$$p_{ij}-\delta_{ij}=\sum_{k=1}^{m} p_{ik}\cdot\frac{a_{kj}}{\nu},\ \ i,j=1,2,\dots,m. \tag{1}$$

Обозначим

$$\zeta_n(i)=\sum_{k=1}^{n}\zeta_i^{(k)}\cdot\chi[\eta(k)=i],$$

$$\mu_j(z)=\min\{n:\zeta_n(j)>z_j\},\ \ j=1,2,\dots,m,$$

$$\mu(z)=\mu(z_1, z_2, \dots, z_m)=\min\{\mu_1(z), \mu_2(z), \dots, \mu_m(z)\},$$

где $\chi(A)$ — индикатор случайного события A, т.е. $\chi(A)=1$, если событие A состоялось, и $\chi(A)=0$ — в противном случае;

$$\delta_{ij}=\begin{cases}1, & \text{если}\ \ i=j,\\ 0, & \text{если}\ \ i\neq j.\end{cases}$$

Теорема 1. Для многомерного сложного пуассоновского процесса, управляемого цепью Маркова с непрерывным временем, функцию риска можно определить следующим образом:

$$R(t, z_1, z_2, \dots, z_m) = P\{S(\mu(z)) < t\}, \tag{2}$$

или эквивалентно

$$R(t, z_1, z_2, \dots, z_m) = 1 - P\{\alpha(t) < z\}, \tag{3}$$

где приняты следующие обозначения:

$$\alpha(t) = \{\alpha_1(t), \alpha_2(t), \dots, \alpha_m(t)\},$$

$$\alpha_i(t) = \zeta_{\Pi(t)}(i) = \sum_{k=1}^{\Pi(t)} \zeta_i^{(k)} \cdot \chi[\eta(k) = i], \; i = 1, 2, \dots, m.$$

Доказательство. Покажем вначале, что описанная в теореме 1 цепь Маркова $\eta(k)$, $k = 0, 1, 2, \dots$, определяет состояние цепи $x(t)$ в момент наступления k-го по порядку события пуассоновского процесса $\Pi(t)$, $t \ge 0$, т.е.

$$\eta(k) = x(S(k)), \; k = 0, 1, 2, \dots$$

Действительно, пусть

$$p_{ij}(t) = P\left\{ x(t) = j \big/ x(0) = i \right\}$$

означает переходную функцию цепи $x(t)$, а

$$\widetilde{p}_{ij}(s) = \int_0^\infty e^{-st} p_{ij}(t) dt$$

— ее преобразование Лапласа. Пусть далее символ τ_1 означает момент наступления первого по порядку события пуассоновского процесса $\Pi(t)$, $t \ge 0$. С учетом того, что τ_1 имеет показательное распределение с параметром ν, получим

$$p_{ij} = P\left\{ \eta(1) = j \big/ \eta(0) = i \right\} = P\left\{ x(S(1)) = j \big/ x(S(0)) = i \right\} =$$

$$= P\left\{ x(\tau_1) = j \big/ x(0) = i \right\} = \int_0^\infty P\left\{ x(t) = j \big/ x(0) = i \right\} \cdot \nu \cdot e^{-\nu t} dt =$$

$$= \nu \cdot \int_0^\infty e^{-\nu t} \cdot p_{ij}(t) dt = \nu \cdot \widetilde{p}_{ij}(\nu). \tag{4}$$

Легко убедиться, что матрица

$$P(\nu) = [\nu \cdot \widetilde{p}_{ij}(\nu)], \; i = 1, \dots, m, \; j = 1, \dots, m,$$

является стохастической. Вычисляя преобразование Лапласа каждого уравнения прямой системы дифференциальных уравнений Колмогорова для переходной функции $p_{ij}(t)$, после несложных преобразований получим систему уравнений

$$s \cdot \widetilde{p}_{ij}(s) - \delta_{ij} = \sum_{k=1}^{m} \widetilde{p}_{ik}(s) \cdot a_{kj}, \; i, j = 1, 2, \dots, m,$$

откуда с учетом равенства (4) получаем систему уравнений (1) для определения переходных вероятностей цепи Маркова $\eta(k)$. С учетом определения случайных процессов $\xi(t) = \{\xi_1(t), \xi_2(t), \dots, \xi_m(t)\}$ и $\{\zeta_n(i), i = 1, 2, \dots, m\}$ приходим к выводу, что для момента пересечения уровня $z = \{z_1, z_2, \dots, z_m\}$ процессом $\xi(t)$ имеет место

$$\theta(z) = S(\mu(z)).$$

Поэтому равенство (2) следует непосредственно из определения функции риска $R(t,z)$. Поскольку $\xi_i(t) = \zeta_{\Pi(t)}(i) = \alpha_i(t)$, то согласно событию $\{\alpha(t) < z\}$ в интервале $[0,t)$ многомерный случайный процесс $\xi(t)$ будет находиться в подмножестве $\Xi(z)$. Это и доказывает равенство (3).

Теорема 1 позволяет описать многомерный случайный процесс с непрерывным временем $\xi(t)$, $t \ge 0$, с помощью схемы случайных величин, определенных на дискретной цепи Маркова [9]. Сформулируем теорему 2, которая дает возможность аналитически вычислить функцию риска $R(t, z_1, z_2, \ldots, z_m)$, и опишем концепцию ее доказательства (технические детали доказательства можно найти в работах [3, 4], где приведены также примеры практического использования подобных моделей).

Обозначим

$$\tilde{u}_i(s_i) = E[e^{-s_i \zeta_i^{(1)}}] = \int_0^\infty e^{-s_i x} dU_i(x)$$

и определим диагональную матрицу размера $m \times m$

$$\tilde{U}(s_1, s_2, \ldots, s_m) = \operatorname{diag}[\tilde{u}_i(s_i),\ i = 1, 2, \ldots, m]$$

с элементами $\tilde{u}_i(s_i)$ на главной диагонали.

Введем также функцию

$$\tilde{r}(w, s_1, s_2, \ldots, s_m) = \underbrace{\int_0^\infty \ldots \int_0^\infty}_{m} e^{-s_1 x_1 - \ldots - s_m x_m} \left[\int_0^\infty e^{-wt} d_t R(t, x_1, \ldots, x_m) \right] dx_m \ldots dx_1.$$

Теорема 2. Пусть для произвольного состояния $i \in \{1, 2, \ldots, m\}$ выполнено следующее условие: $P\{\xi_i > 0\} = 1$. Тогда

$$\tilde{r}(w, s_1, s_2, \ldots, s_m) = \pi \cdot P \cdot \left(E - \frac{\nu}{\nu + w} \cdot P \cdot \tilde{U}(s_1, \ldots, s_m) \right)^{-1} \times$$

$$\times (E - \tilde{U}(s_1, \ldots, s_m)) \cdot I \cdot \frac{\nu}{(\nu + w) \cdot s_1 \cdot \ldots \cdot s_m}, \qquad (5)$$

где E — единичная матрица размера $m \times m$, I — m-мерный единичный вектор-столбец; $\pi = \{\pi_1, \pi_2, \ldots, \pi_m\}$ — вектор начального распределения процесса $x(t)$, $t \ge 0$.

Доказательство. Определим семейство условных функций риска следующим образом:

$$R_{ij}(t, z) = P\left\{ \theta(z) < t;\ \eta(\mu(z)) = j \middle/ \eta(0) = i \right\}. \qquad (6)$$

Введем множество $\{F_{ij}^{(n)}(t, z_1, \ldots, z_m),\ i = 1, \ldots, m,\ j = 1, \ldots, m\}$, $n = 0, 1, 2, \ldots$, условных функций распределения

$$F_{ij}^{(n)}(t, z) = P\left\{ S(n) < t;\ \zeta_n(1) < z_1, \ldots, \zeta_n(m) < z_m,\ \eta(n+1) = j \middle/ \eta(0) = i \right\}$$

и множество $\{\tilde{F}_{ij}^{(n)}(w, s_1, \ldots, s_m),\ i = 1, \ldots, m,\ j = 1, \ldots, m\}$, $n = 0, 1, 2, \ldots$, условных математических ожиданий

$$\tilde{F}_{ij}^{(n)}(w, s_1, \ldots, s_m) = E\left[e^{-w \cdot S(n)} \prod_{l=1}^m e^{-s_l \cdot \zeta_n(l)} \cdot \chi[\eta(n+1) = j] \middle/ \eta(0) = i \right]. \qquad (7)$$

Обозначим

$$\widetilde{F}^{(n)}(w, s_1, \dots, s_m) = [\widetilde{F}_{ij}^{(n)}(w, s_1, \dots, s_m)], \ i = 1, \dots, m, \ j = 1, \dots, m,$$

матрицу, составленную из условных математических ожиданий (7). Согласно принятым предположениям семейство случайных величин $\{\zeta_i, i = 1, \dots, m\}$ и пуассоновский процесс $\Pi(t)$, $t \geq 0$, взаимно независимы, а для случайной величины $S(k)$ при любом $k = 1, 2, \dots$ справедливо равенство

$$S(k) = \tau_1 + \dots + \tau_k,$$

где $\tau_1, \dots, \tau_k$ — независимые случайные величины, имеющие показательное распределение с параметром ν. Поэтому с учетом определения условных функций распределения $F_{ij}^{(n)}(t, z)$, свойств цепей Маркова, а также рассуждений, аналогичных изложенным в работах [3, 4], можно показать, что матрица $\widetilde{F}^{(n)}(w, s)$ определяется равенством

$$\widetilde{F}^{(n)}(w, s) = P \cdot [P \cdot \widetilde{H}(w, s)]^n,$$

где $\widetilde{H}(w, s_1, \dots, s_m) = \dfrac{\nu}{\nu + w} \cdot \widetilde{U}(s_1, \dots, s_m)$. Если $\widetilde{R}(w, s)$ означает матрицу преобразований Лапласа–Стилтьеса условных функций риска (6), т.е. матрицу, составленную из функций

$$\widetilde{r}_{ij}(w, s) = \underbrace{\int_0^\infty \dots \int_0^\infty}_{m} e^{-s_1 x_1 - \dots - s_m x_m} \left[\int_0^\infty e^{-wt} d_t R_{ij}(t, x_1, \dots, x_m) \right] dx_m \dots dx_1,$$

то можно доказать равенство

$$\widetilde{R}(w, s) = P \cdot \left(\sum_{n=0}^{\infty} [P \cdot \widetilde{H}(w, s)]^n \right) \cdot D(w, s),$$

где $D(w, s) = \mathrm{diag}\,[d_{ii}(w, s), \ i = 1, 2, \dots, m]$ — диагональная матрица размера $m \times m$ с элементами

$$d_{ii}(w, s) = \frac{\nu \cdot (1 - \widetilde{u}_i(s_i))}{(\nu + w) \cdot s_1 \cdot \ldots \cdot s_m}, \ i = 1, \dots, m,$$

на главной диагонали. Принятые условия гарантируют сходимость матричного ряда в формуле, определяющей матрицу $\widetilde{R}(w, s)$, что и доказывает теорему 2.

Пример. Рассмотрим сложный пуассоновский процесс, управляемый простым марковским процессом регенерации, или частный случай изложенной модели, когда процесс $x(t)$ имеет два состояния: $Z = \{1, 2\}$, а распределение времени пребывания в этих состояниях является показательным. Пусть, как и ранее, $\Pi(t)$, $t \geq 0$, — пуассоновский процесс с параметром ν, а $x(t)$, $t \geq 0$, — простой марковский процесс регенерации с параметрами (λ, μ). Это означает, что время пребывания процесса $x(t)$ в состоянии $\{1\}$ является показательным с параметром λ, в состоянии $\{2\}$ — показательным с параметром μ. Предположим, что определены две совокупности случайных величин: ξ_k, $k = 0, 1, 2, \dots$, и ζ_k, $k = 0, 1, 2, \dots$, не зависимых от случайных процессов $\Pi(t)$ и $x(t)$, взаимно независимых для разных значений индекса k, распределение которых не зависит от индекса k, а $S(k)$, $k = 1, 2, \dots$, означает случайную величину, имеющую распределение Эрланга с параметрами (k, ν).

Сложным пуассоновским процессом, управляемым простым марковским процессом регенерации, назовем двумерный случайный процесс $(\xi(t), \zeta(t))$, $t \geq 0$, определенный следующим образом:

$$\xi(t)=\sum_{k=1}^{\Pi(t)}\xi_i\cdot\chi[x(S(k))=1]; \qquad \zeta(t)=\sum_{k=1}^{\Pi(t)}\zeta_i\cdot\chi[x(S(k))=2].$$

Пусть

$$\mu_1(z)=\min\{t{:}\xi(t)>z_1\}, \quad \mu_2(z)=\min\{t{:}\zeta(t)>z_2\},$$

$\theta(z_1, z_2)$ — момент пересечения процессом $(\xi(t),\zeta(t))$ уровня $z=\{z_1, z_2\}$,

$$\theta(z_1, z_2)=\min\{\mu_1(z),\mu_2(z)\}.$$

Функцию

$$R(t, z_1, z_2)=P\{\theta(z_1, z_2)t\}$$

можно рассматривать, как функцию риска в моделях, построенных на основании процесса $(\xi(t),\zeta(t))$, $t\ge 0$. Введем функцию

$$r(w, s_1, s_2)=\int_0^\infty\int_0^\infty e^{-s_1z_1-s_2z_2}\left(\int_0^\infty e^{-wt}d_tR(t, z_1, z_2)\right)dz_2dz_1.$$

Теорема 3. Если случайные величины ξ_i, $i=0,1,2,\dots$, и ζ_j, $j=0,1,2,\dots$, имеют показательное распределение соответственно с параметрами k и d:

$$U_1(x)=K(x)=P\{\xi_i<x\}=1-e^{-kx},$$

$$U_2(x)=D(x)=P\{\zeta_i<x\}=1-e^{-dx},$$

в начальный момент времени $t=0$ процесс $x(t)$ находится в состоянии $\{1\}$

$$P\{x(0)=1\}=1,$$

то имеет место равенство

$$r(w, s_1, s_2)=\frac{\nu[(\nu+w)(d+s_2)-B\nu d]}{s_2(\nu+w)^2(k+s_1)(d+s_2)V(w, s_1, s_2)}+$$

$$+\frac{B\nu\lambda k}{s_1(\nu+w)(\lambda+w)(k+s_1)(d+s_2)V(w, s_1, s_2)},$$

где

$$V(w, s_1, s_2)=1-\frac{\nu}{\nu+w}\cdot\frac{d(\nu+\lambda)(k+s_1)+k(\nu+\mu)(d+s_2)}{(\nu+\lambda+\mu)(k+s_1)(d+s_2)}+$$

$$+\frac{\nu^3}{(\nu+w)^2}\cdot\frac{kd}{(k+s_1)(d+s_2)},$$

$$B=\frac{\nu}{\nu+\lambda+\mu}.$$

Доказательство. Воспользуемся теоремой 2. Согласно принятым в теореме 3 предположениям

$$\widetilde{u}_1(s_1)=E(e^{-s_1\xi})=\frac{k}{k+s},$$

$$\widetilde{u}_2(s_2)=E(e^{-s_2\zeta})=\frac{d}{d+s}.$$

Матрица интенсивностей переходов $A=[a_{ij}]$, $i, j=1, 2$, для рассматриваемой в теореме 3 цепи Маркова $x(t)$ имеет вид

$$A=\begin{bmatrix} -\lambda & \lambda \\ \mu & -\mu \end{bmatrix}.$$

Система линейных уравнений (1) для определения переходных вероятностей цепи Маркова $\eta(k)$ принимает следующий вид:

$$\begin{cases} p_{11}-1=-p_{11}\cdot\dfrac{\lambda}{\nu}+p_{12}\cdot\dfrac{\mu}{\nu}, \\ p_{12}=-p_{12}\cdot\dfrac{\mu}{\nu}+p_{11}\cdot\dfrac{\lambda}{\nu}, \\ p_{22}-1=-p_{22}\cdot\dfrac{\mu}{\nu}+p_{21}\cdot\dfrac{\lambda}{\nu}, \\ p_{21}=-p_{21}\cdot\dfrac{\lambda}{\nu}+p_{22}\cdot\dfrac{\mu}{\nu}. \end{cases}$$

С учетом того, что

$$\begin{cases} p_{11}+p_{12}=1, \\ p_{21}+p_{22}=1, \end{cases}$$

получим

$$P=\begin{bmatrix} \dfrac{\nu+\mu}{\nu+\mu+\lambda} & \dfrac{\lambda}{\nu+\mu+\lambda} \\ \dfrac{\mu}{\nu+\mu+\lambda} & \dfrac{\nu+\lambda}{\nu+\mu+\lambda} \end{bmatrix}.$$

Окончательное доказательство теоремы 3 получим непосредственно из теоремы 2, используя формулу (5) и производя необходимые вычисления.

Предположим теперь, что исследуемая в теореме 1 и теореме 2 система должна исполнять свои функции на протяжении некоторого промежутка времени $[0, T]$. «Успешное» ее функционирование означает, что на протяжении всего этого времени она будет находиться во множестве «безопасных» для нее состояний. Пусть, кроме того, вектор $z=\{z_1, z_2, \dots, z_m\}\geq 0$, который определяет пространство $\Xi(z)\subset R^m$ «безопасных» для исследуемой системы состояний, имеет следующее свойство: сумма координат вектора $z=\{z_1, z_2, \dots, z_m\}$ постоянна и равна D, т.е. $z_1+z_2+\ldots+z_m=D$. Функция $R(T, z_1, z_2, \dots, z_m)$ определяет вероятность возникновения «аварийной ситуации» и может быть функцией риска системы. Поэтому представляет практический интерес задача определения оптимальной структуры системы, состоящая в том, чтобы найти такой вектор $d=\{d_1, d_2, \dots, d_m\}$, для которого

$$d_1+d_2+\ldots+d_m=D, \tag{8}$$

$$d_1\geq 0,\ d_2\geq 0, \dots, d_m\geq 0, \tag{9}$$

при этом

$$R(T, d_1, d_2, \dots, d_m)\to \min. \tag{10}$$

Из сформулированных выше теорем следует, что даже в простейших случаях непосредственное решение этой задачи усложнено, поскольку с помощью преобразования Лапласа $\widetilde{r}(w, s_1, s_2, \dots, s_m)$ не всегда просто восстановить функцию $R(T, d_1, d_2, \dots, d_m)$. Поэтому для практического использования более приемлемым будет метод асимптотической оптимизации, согласно которому вначале необходимо провести асимптотический анализ исследуемой модели, а затем находить приближенное решение оптимизационной задачи на основании предельной модели.

Основным предположением, позволяющим использовать метод асимптотической оптимизации для случая сложного управляемого пуассоновского процесса, является гипотеза, согласно которой $\zeta_i << D$ для каждого состояния $i \in Z = \{1, 2, \dots, m\}$, и при этом интенсивность ν пуассоновского процесса $\Pi(t)$ достаточно большая. Поскольку для точечного случайного процесса $S(k)$, $k = 1, 2, \dots$, справедливо представление

$$S(k) = \tau_1 + \tau_2 + \ldots + \tau_k,$$

где τ_i, $i = 1, 2, \dots, k$, — независимые между собой случайные величины, имеющие показательное распределение с параметром ν, то принятое предположение означает, что длина τ_i промежутков времени между двумя последовательными событиями пуассоновского процесса $\Pi(t)$ значительно меньше длины T промежутка времени, в котором система должна функционировать «без аварий»:

$$\tau_i << T, \quad i = 1, 2, \dots$$

Практическая реализация метода асимптотической оптимизации состоит в построении параметрической модели, зависящей от малого параметра ε, и исследовании ее поведения при условии, что $\varepsilon \to 0$ (например, [1, 6–8]). Предельные теоремы для специальных многомерных схем остановки случайных процессов, полученные в работах [1, 2, 5, 7, 8], дают теоретические предпосылки считать предельную модель приближением к исходной. «Приближенная» модель с математической точки зрения значительно упрощенная по сравнению с точной, что позволяет использовать ее для построения приближенных решений сформулированной оптимизационной задачи. Параметризация исследуемой в настоящей статье модели производится следующим образом. Предположим, что распределение исходных случайных величин зависит от некоторого малого параметра ε, т.е.

$$\{\zeta_i^{(k)}, (\varepsilon), \ i \in Z, \ k = 0, 1, 2, \dots\}, \ \varepsilon > 0,$$

причем зависит таким образом, что в некотором смысле $\zeta_i^{(k)}(\varepsilon) \to 0$ при $\varepsilon \to 0$. Параметр $\nu(\varepsilon)$, $\varepsilon > 0$, пуассоновского процесса зависит от того же малого параметра ε таким образом, что $\nu(\varepsilon) \to \infty$ при $\varepsilon \to 0$. Введем функции

$$u_{\varepsilon i}(s) = E(e^{-s \cdot \zeta_i^{(1)}(\varepsilon)}), \ i \in \{1, 2, \dots, m\}.$$

Матрица $A(\varepsilon) = [a_{ij}(\varepsilon)]$, $i, j = 1, 2, \dots, m$, интенсивностей переходов цепи Маркова зависит от малого параметра ε таким образом, что $a_{ij}(\varepsilon) \to \infty$ при $\varepsilon \to 0$ для произвольных $i, j = 1, 2, \dots, m$. Начальное распределение $q(\varepsilon) = \{q_i(\varepsilon),$ $i = 1, \dots, m\}$ цепи Маркова стремится к некоторому распределению $q(\varepsilon) \to q(0)$ при $\varepsilon \to 0$.

Пусть n_ε — некоторая неслучайная функция такая, что $n_\varepsilon \to \infty$ при $\varepsilon \to 0$. Обозначим символом $x_\varepsilon(t)$, $t \ge 0$, цепь Маркова с непрерывным временем, которая определяется матрицей интенсивностей переходов $A(\varepsilon)$, и начальным распределением $q(\varepsilon)$, а символом $\Pi_\varepsilon(t)$, $t \ge 0$, — пуассоновский процесс с параметром $\nu(\varepsilon)$. Пусть $S_\varepsilon(k)$, $k = 0, 1, 2, \dots$, — соответствующий для $\Pi_\varepsilon(t)$, $t \ge 0$, точечный случайный процесс. Определим многомерный случайный процесс с непрерывным временем следующим образом:

$$\zeta_\varepsilon(t) = \{\zeta_\varepsilon(t,1), \ \zeta_\varepsilon(t,2), \dots, \zeta_\varepsilon(t, m)\},$$

где

$$\zeta_\varepsilon(t, i) = \sum_{k=1}^{[n_\varepsilon \cdot t]} \zeta_i^{(k)}(\varepsilon) \cdot \chi[x_\varepsilon(S_\varepsilon(k)) = i], \ i = 1, 2, \dots, m,$$

а символ $[a]$ означает целую часть числа a: $[a] \le a < [a]+1$. Пусть также $\tau_\varepsilon(t)$, $t \ge 0$, — случайный процесс,

$$\tau_\varepsilon(t) = S_\varepsilon([n_\varepsilon \cdot t]), \; t \ge 0,$$

а величины $p_{ij}(\varepsilon)$, $i, j = 1, 2, \dots, m$, являются решениями системы линейных уравнений

$$p_{ij}(\varepsilon)(1 - b_{ij}(\varepsilon)) - \sum_{k \ne j} p_{ik} \cdot b_{kj}(\varepsilon) = \delta_{ij}, \; i, j = 1, 2, \dots, m,$$

где

$$b_{ij}(\varepsilon) = \frac{a_{ij}(\varepsilon)}{\nu(\varepsilon)}, \; i, j = 1, 2, \dots, m.$$

Теорема 4. Предположим, что для параметрической модели выполнены следующее условия.

1. Справедливо представление

$$u_{\varepsilon i}(s) = 1 - \frac{1}{n_\varepsilon} a_i(s) + o\left(\frac{1}{n_\varepsilon}\right), \; i \in \{1, 2, \dots, m\}, \; \varepsilon > 0,$$

(т.е. для произвольного значения $i \in \{1, 2, \dots, m\}$ распределение случайной величины $\zeta_i^{(1)}(\varepsilon)$ находится в области притяжения некоторого безгранично делимого закона с кумулянтой $a_j(s)$ [5]).

2. Для произвольных значений $i, j = 1, 2, \dots, m$ существуют пределы

$$\lim_{\varepsilon \to 0} p_{ij}(\varepsilon) = p_{ij}(0), \; i, j = 1, 2, \dots, m.$$

3. Матрица $P(0) = [p_{ij}(0)]$, $i, j = 1, 2, \dots, m$, является матрицей стохастической, а однородная цепь Маркова $\eta_0(k)$, $k = 0, 1, 2, \dots$, с дискретным временем и с конечным множеством состояний $Z = \{1, 2, \dots, m\}$, в которой переходные вероятности за один шаг определяются матрицей $P(0)$, неприводима и непериодическая.

4. Существует предел

$$\lim_{\varepsilon \to 0} \frac{\nu(\varepsilon)}{n_\varepsilon} = \nu_0.$$

При выполнении этих условий независимо от начального распределения цепи $x_\varepsilon(t)$, $t \ge 0$, конечномерные распределения векторного случайного процесса

$$z_\varepsilon(t) = (\tau_\varepsilon(t), \zeta_\varepsilon(t)) = (\tau_\varepsilon(t), \zeta_\varepsilon(t,1), \zeta_\varepsilon(t,2), \dots, \zeta_\varepsilon(t,m)), \; t \ge 0, \; \varepsilon > 0,$$

сходятся слабо при $\varepsilon \to 0$ к конечномерным распределениям векторного случайного процесса

$$z(t) = (\tau(t), \zeta(t)) = (\tau(t), \zeta(t,1), \zeta(t,2), \dots, \zeta(t,m)), \; t \ge 0.$$

Кроме того, имеет место сходимость процесса $z_\varepsilon(t)$ в J-топологии Скорохода

$$z_\varepsilon(t) \underset{\varepsilon \to 0}{\overset{J}{\Rightarrow}} z(t),$$

т.е. для произвольного положительного числа $t > 0$ и произвольного непрерывного на промежутке времени $[0, t]$ в J-топологии Скорохода функционала f распределение $f(z_\varepsilon(t))$ сходится слабо при $\varepsilon \to 0$ к распределению $f(z_\varepsilon(t))$. При этом координаты предельного процесса $z(t)$ имеют структуру

$$\tau(t) = \frac{t}{\nu_0}, \; t \ge 0, \quad \zeta(t, j) = \zeta_j^0(\pi_j \cdot t), \; j \in \{1, 2, \dots, m\},$$

где $\{\zeta_j^0(t),\ j=1,2,\ldots,m\}$, $t \ge 0$, означает совокупность независимых между собой однородных процессов с независимыми приращениями с кумулянтами $a_j(s)$, $j=1,2,\ldots,m$. Вектор $\pi=(\pi_1,\pi_2,\ldots,\pi_m)$ представляет стационарное распределение цепи Маркова $\eta_0(k)$, $k=0,1,2,\ldots$, и определяется как единственное решение системы уравнений

$$\pi \cdot P(0)=\pi,$$

$$\pi_1+\pi_2+\ldots+\pi_m=1.$$

Доказательство теоремы 4 предполагает использование специальных методов из области предельных теорем теории случайных процессов, поэтому ограничимся ссылками на работы [8, с. 212] и [5, с. 525].

Рассмотрим важный с точки зрения практических применений частный случай теоремы 4. Предположим, что выполнены следующие условия:

$$E[\zeta_j^{(s)}(\varepsilon)]=\varepsilon \cdot a_j+o(\varepsilon),\ a_j>0,\ j=1,2,\ldots,m;$$

$$\nu(\varepsilon)=\frac{\nu}{\varepsilon},\ \varepsilon>0;$$

$$a_{ij}(\varepsilon)=\frac{a_{ij}}{\varepsilon},\ \ i,j=1,2,\ldots,m.$$

Положим $n_\varepsilon=\frac{1}{\varepsilon}$, и пусть $R_\varepsilon(T,d_1,d_2,\ldots,d_m)$ — функция риска для параметрической модели. В этом случае для функций $u_{\varepsilon i}(s)$, $i \in \{1,2,\ldots,m\}$, справедливо представление

$$u_{\varepsilon i}(s)=1-\varepsilon \cdot (s \cdot a_i)+o(\varepsilon),\ \ i \in \{1,2,\ldots,m\},\ \varepsilon>0,$$

и поведение функции риска при условии, что $\varepsilon \to 0$, можно исследовать, используя теорему 2. Заметим, что такой подход сопряжен с большыми аналитическими трудностями, в то время как использование теоремы 4 позволяет получить тот же результат значительно проще. При принятых предположениях координата $\tau(t)$ предельного случайного процесса $z(t)$ будет неслучайной функцией:

$$\tau(t)=\frac{t}{\nu},\ \ t \ge 0.$$

Координаты $[\zeta(t,1),\zeta(t,2),\ldots,\zeta(t,m)]$, $t \ge 0$, будут соответственно функциями

$$\zeta(t,j)=a_j \cdot \pi_j \cdot t,\ \ t \ge 0,\ \ j=1,2,\ldots,m,$$

где вектор $\pi=(\pi_1,\pi_2,\ldots,\pi_m)$ представляет стационарное распределение однородной цепи Маркова, для которой матрица $P=[p_{ij}]$, $i,j=1,2,\ldots,m$, переходных вероятностей за один шаг определяется из системы уравнений

$$p_{ij} \cdot \left(1-\frac{a_{ij}}{\nu}\right)-\sum_{k \ne j} p_{ik} \cdot \frac{a_{kj}}{\nu}=\delta_{ij},\ \ j=1,2,\ldots,m.$$

Исходя из этого, можно найти приближенное решение задачи (8)–(10), которое определяет оптимальную структуру системы. Опираясь на теоремы 1 и 4, можно утверждать, что

$$\lim_{\varepsilon \to 0} R_\varepsilon(T,d_1,d_2,\ldots,d_m)=\begin{cases}1, & \text{если } \tau(\mu(d)) \le T;\\ 0, & \text{если } \tau(\mu(d))>T.\end{cases}$$

При этом

$$\tau(\mu(d))=\frac{1}{\nu} \cdot \frac{d_{j*}}{\pi_{j*} \cdot a_{j*}},$$

где

$$\frac{d_{j*}}{\pi_{j*} \cdot a_{j*}} = \min\left\{\frac{d_1}{\pi_1 \cdot a_1}, \ldots, \frac{d_m}{\pi_m \cdot a_m}\right\}.$$

Это означает, что исходя из вероятности возникновения в системе «аварийной ситуации», оптимальным будет выбор вектора $d^* = \{d_1^*, d_2^*, \ldots, d_m^*\}$ таким образом, чтобы выполнялись соотношения

$$d_1^* + d_2^* + \ldots + d_m^* = D,$$

$$d_1^* \geq 0, \ d_2^* \geq 0, \ldots, \ d_m^* \geq 0,$$

$$\frac{d_1^*}{\pi_1 \cdot a_1} = \frac{d_2^*}{\pi_2 \cdot a_2} = \ldots = \frac{d_m^*}{\pi_m \cdot a_m}.$$

В заключение заметим, что примеры использования описанных в настоящей статье подходов к решению практических задач рассматривались в работах [3, 4], где изучались задачи оптимального управлением риском в многомерных моделях страхования и моделях управления запасами. Как следует из полученных результатов, при решении подобных задач можно эффективно использовать точные аналитические решения, а также находить приближенные решения, применяя методы асимптотического анализа.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Анисимов В.В. Случайные процессы с дискретной компонентой. Предельные теоремы. — Киев: «Вища шк.», 1988. — 184 с.
2. Анисимов В.В., Война А.А. О случайной остановке многомерных процессов // ДАН УССР. Сер. А. — 1977. — № 9. — С. 771–775.
3. Война А.А. Управление риском в многомерных моделях страхования // Журн. вычисл. и приклад. математики. — 2007. — № 2(95). — С. 13–23.
4. Война А.А., Клодзинська А. Функция риска в многомерных моделях управления запасами, функционирующих в случайной марковской среде // Кибернетика и системный анализ. — 2004. — № 4. — С. 150–155.
5. Гихман И.И., Скороход А.В. Введение в теорию случайных процессов. — М.: Наука, 1977. — 568 с.
6. Коваленко И.Н., Кузнецов Н.Ю. Методы расчета высоконадежных систем. — М.: Радио и связь, 1988. — 176 с.
7. Королюк В.С., Турбин А.Ф. Математические основы фазового укрупнения сложных систем. — Киев: Наук. думка, 1978, — 220 с.
8. Сильвестров Д.С. Предельные теоремы для сложных случайных функций. — Киев: Вища шк., 1974. — 317 с.
9. Voina A.A. Statistical estimation in a scheme of random variables on Markov chains with incomplete observations // Theor. Prob. and Math. Statist. — 1988. — N 37. — P. 19–28.
10. Wojna A. Ryzyko w procesach finansowych oraz metody badac koniunktury. — Politechnika Koszalińska (Polska), 2009. — 446 s.

Поступила 17.02.2010