УДК 519.246

Б.В. БОНДАРЕВ, С.М. КОЗЫРЬ

ОЦЕНКА НЕИЗВЕСТНОГО ПАРАМЕТРА В СИСТЕМАХ СО СЛАБЫМ СИГНАЛОМ

Ключевые слова: *оценка параметра, метод максимального правдоподобия, плотность мер, интервал накрытия.*

ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ

Вопросам оценки неизвестных параметров в коэффициенте сноса стохастического дифференциального уравнения посвящено большое число публикаций (см. [1–10] и др.). В настоящей статье рассматривается следующая задача: наблюдается $\xi_{\theta_0}^{\varepsilon,T/\varepsilon^2} = \{\xi_{\theta_0}^{\varepsilon}(t) : 0 \le t \le T/\varepsilon^2\}$, где $\xi_{\theta_0}^{\varepsilon}(t)$ — траектория решения стохастического дифференциального уравнения с малым параметром при коэффициенте сноса $\alpha(\theta_0, x)$,

$$d\xi_{\theta_0}^{\varepsilon}(t) = \varepsilon\alpha(\theta_0, \xi_{\theta_0}^{\varepsilon}(t))dt + \beta(\xi_{\theta_0}^{\varepsilon}(t))dW(t), \;\; \xi_{\theta_0}^{\varepsilon}(0) = \xi_0. \tag{1}$$

Здесь $\varepsilon > 0$ — малый параметр, коэффициент сноса $\alpha(\theta_0, x)$ естественно интерпретировать как сигнал, θ_0 — неизвестный параметр, т.е. наблюдается «слабый» сигнал, «зашумленный» диффузионным шумом. Предположим, что $\theta_0 \in Q$, где Q — некоторое параметрическое множество, параметр θ_0 следует оценить с помощью $\xi_{\theta_0}^{\varepsilon,T/\varepsilon^2}$ — наблюдаемой траектории решения (1), и построить для него интервал накрытия: $\theta_\varepsilon - \delta_\varepsilon < \theta_0 < \theta_\varepsilon + \delta_\varepsilon$ с вероятностью $1-\gamma_\varepsilon$, где $\delta_\varepsilon \to 0$, $\gamma_\varepsilon \to 0$ при $\varepsilon \to 0$ должны быть выписаны в явном виде. Здесь θ_ε — некоторая построенная по $\xi_{\theta_0}^{\varepsilon,T/\varepsilon^2}$ оценка неизвестного параметра.

В дальнейшем будем считать, что выполняются следующие условия.

Условие 1. Периодические с периодом единица коэффициенты $\alpha(\theta, x)$, $\beta(x)$ имеют непрерывные производные второго порядка $\alpha''_{xx}(\theta, x)$, $\beta''_{xx}(x)$.

Условие 2. Функции $\alpha(\theta, x)$, $\beta(x)$, $\alpha'_x(\theta, x)$, $\beta'_x(x)$ таковы, что

$$\alpha(\theta, x) = \alpha(\theta, x+1), \;\; \beta(x) = \beta(x+1), \;\; |\alpha(\theta, x)| \le K < +\infty, \;\; 0 < \lambda \le \beta^2(x) \le K < +\infty,$$

$$|\alpha'_x(\theta, x)| + |\beta'_x(x)| \le K < +\infty .$$

Идея построения θ_ε-оценки неизвестного параметра θ_0 и построения интервала накрытия базируется на «близости» решения задачи (1) в метрике

$$\rho(X, Y) = \left(\sup_{0 \le t \le T} M|X(t) - Y(t)|^2 \right)^{1/2}$$

к процессу

$$d\eta_{\theta_0}^{\varepsilon}(t) = \overline{\alpha}(\theta_0)dt + \overline{\beta}d\widetilde{W}_\varepsilon(t), \;\; \eta_{\theta_0}^{\varepsilon}(0) = 0, \tag{2}$$

где $\overline{\alpha}(\theta_0)$, $\overline{\beta}$ — коэффициенты, которые определенным образом выражаются через $\alpha(\theta, x)$, $\beta(x)$ — коэффициенты уравнения (1), $\widetilde{W}_\varepsilon(t)$ — семейство стандартных винеровских процессов.

ВСПОМОГАТЕЛЬНЫЕ РЕЗУЛЬТАТЫ

В работе [11] приведены достаточные условия, чтобы семейство непрерывных мартингалов μ_t^ε при достаточно малых $\varepsilon > 0$ было «близко» к винеровскому семейству в смысле метрики $\rho(X, Y) = \left(\sup\limits_{0 \le t \le T} M | X(t) - Y(t)|^2 \right)^{1/2}$, а именно доказано следующее утверждение.

Пусть $\{\mu_t, \mathfrak{F}_0^t,\ t \ge 0\}$ — непрерывный локальный мартингал такой, что $\lim\limits_{t \to +\infty} [\mu, \mu]_t = +\infty$, а $\tau_t = \inf\{s > 0 : [\mu, \mu]_s \ge \sigma^2 t\}$ — конечный марковский момент для каждого $t > 0$. Тогда найдется стандартный винеровский процесс W_t такой, что выполняется неравенство

$$\sup_{0 \le t \le T} M \left| \varepsilon \mu_{t/\varepsilon^2} - \sigma \varepsilon W_{t/\varepsilon^2} \right|^2 \le \sup_{0 \le t \le T} M \left| \varepsilon^2 \le \langle \mu, \mu \rangle_{t/\varepsilon^2} - \sigma^2 t \right|. \tag{3}$$

Здесь будет рассмотрен процесс

$$\mu_t^\varepsilon = \varepsilon \int_0^{t/\varepsilon^2} \beta(\xi_{\theta_0}^\varepsilon(s)) dW(s),$$

тогда очевидно, что $\varepsilon^2 \langle \mu, \mu \rangle_{t/\varepsilon^2} = \varepsilon^2 \int_0^{t/\varepsilon^2} \beta^2 (\xi_{\theta_0}^\varepsilon(s)) ds$.

Дальнейшие рассуждения опираются на результаты работы [8]. Рассмотрим функцию

$$G_0^\varepsilon(x, \theta_0) = \frac{2}{(1 + \vartheta_\varepsilon(1, \theta_0)) \beta^2(x) \vartheta_\varepsilon(x, \theta_0)} \left[\vartheta_\varepsilon(1, \theta_0) \int_0^x \vartheta_\varepsilon(y, \theta_0) dy + \int_x^1 \vartheta_\varepsilon(y, \theta_0) dy \right],$$

где

$$\vartheta_\varepsilon(x, \theta_0) = \exp\left\{ -\int_0^x \frac{2\varepsilon \alpha(y, \theta_0)}{\beta^2(y)} dy \right\}. \tag{4}$$

Тогда плотность эргодического распределения процесса $\xi_{\theta_0}^\varepsilon(t)$ примет вид

$$\rho_\varepsilon(x, \theta_0) = G_0^\varepsilon(x, \theta_0) \left[\int_0^1 G_0^\varepsilon(y, \theta_0) dy \right]^{-1}. \tag{5}$$

Нетрудно заметить, что при $x \in [0, 1]$ для $\vartheta_\varepsilon(x, \theta_0)$ справедливы оценки

$$0 < \exp\left\{ -\frac{2\varepsilon K}{\lambda} \right\} = C_\varepsilon^{-1} \le \vartheta_\varepsilon(x, \theta_0) \le C_\varepsilon = \exp\left\{ \frac{2\varepsilon K}{\lambda} \right\} < +\infty .$$

Введем оператор

$$L_\varepsilon(\theta_0) U = \frac{1}{2} \beta^2(x) \frac{d^2 U}{dx^2} + \varepsilon \alpha(x, \theta_0) \frac{dU}{dx}. \tag{6}$$

Имеет место следующее утверждение: пусть $\alpha(x, \theta_0)$, $\beta(x)$ удовлетворяют условиям 1, 2. Тогда для 1-периодической дважды непрерывно дифференцируемой функции $f(x)$ существует и единственна постоянная $\bar{f}^\varepsilon(\theta_0)$ такая, что периодическая задача

$$\begin{cases} L^{\varepsilon}(\theta_0)U^{\varepsilon} = f(x) - \overline{f}^{\varepsilon}(\theta_0), \\ U^{\varepsilon}(x) = U^{\varepsilon}(x+1), \ \dfrac{dU^{\varepsilon}}{dx}(x) = \dfrac{dU^{\varepsilon}}{dx}(x+1) \end{cases} \tag{7}$$

имеет единственное классическое решение [8], принадлежащее пространству Соболева $W^{2,p}[0,1)$ при каждом $p \in [1, +\infty)$, причем постоянная $\overline{f}^{\varepsilon}(\theta_0)$ находится по формуле

$$\overline{f}^{\varepsilon}(\theta_0) = \int_0^1 f(x)\rho_{\varepsilon}(x, \theta_0)dx.$$

ОЦЕНКИ СКОРОСТИ СХОДИМОСТИ К ПРЕДЕЛЬНЫМ ХАРАКТЕРИСТИКАМ

Известно [12, с. 373], что справедлива оценка

$$\sup_x |M f(\xi^{\varepsilon}_{\theta_0,x}(t)) - \overline{f}^{\varepsilon}(\theta_0)| \le c \sup_x |f(x)| \exp\{-\gamma t\}, \tag{8}$$

где постоянные $c > 0$, $\gamma > 0$ определяются через коэффициенты уравнения

$$\xi^{\varepsilon}_{\theta_0,x}(t) = x + \int_0^t \varepsilon\alpha(\theta_0, \xi^{\varepsilon}_{\theta_0,x}(s))ds + \int_0^t \beta(\xi^{\varepsilon}_{\theta_0,x}(s))dW(s).$$

Пусть $\psi^{\varepsilon}(\theta_0, x) = \dfrac{dU^{\varepsilon}(\theta_0, x)}{dx}$, тогда (7) перепишем в виде

$$\begin{cases} \dfrac{d\psi^{\varepsilon}(\theta_0, x)}{dx} + \dfrac{2\varepsilon\alpha(\theta_0, x)}{\beta^2(x)}\psi^{\varepsilon}(\theta_0, x) = \dfrac{2[f(x) - \overline{f}^{\varepsilon}(\theta_0)]}{\beta^2(x)}, \\ \psi^{\varepsilon}(\theta_0, x+1) = \psi^{\varepsilon}(\theta_0, x). \end{cases} \tag{9}$$

Дальнейшее изложение перекликается с результатами работы [13]. Нетрудно убедиться, что решением задачи (9) будет функция

$$\psi^{\varepsilon}(\theta_0, x) = -[\vartheta^{\varepsilon}(\theta_0, x)]^{-1}\left[\int_x^1 \vartheta^{\varepsilon}(\theta_0, y)\frac{2[f(y) - \overline{f}^{\varepsilon}(\theta_0)]}{\beta^2(y)}dy\right]. \tag{10}$$

В силу периодичности решение задачи (10) ограничено:

$$|\psi^{\varepsilon}(\theta_0, x)| \le \frac{4C^2}{\lambda}K = D_{\psi}. \tag{11}$$

Известно также, что решением уравнения (7) будет функция

$$U^{\varepsilon}(\theta_0, x) = -\int_0^{+\infty} M[f(\xi^{\varepsilon}_{\theta_0,x}(t)) - \overline{f}^{\varepsilon}(\theta_0)]dt. \tag{12}$$

Из [13] следует, что функция $U^{\varepsilon}(\theta_0, x)$ 1-периодическая. Нетрудно заметить, что

$$|U^{\varepsilon}(\theta_0, x)| \le \frac{Kc}{\gamma} = D_U. \tag{13}$$

Пусть $U^{\varepsilon}(\theta_0, x)$ — решение задачи (7); тогда, применяя формулу Ито к процессу $U^{\varepsilon}(\theta_0, \xi^{\varepsilon}_{\theta_0}(t))$, имеем

$$\varepsilon^2 \int_0^{t/\varepsilon^2} [f(\xi_{\theta_0}^\varepsilon(s)) - \overline{f}^\varepsilon(\theta_0)]ds = \varepsilon^2 [U^\varepsilon(\theta_0, \xi_{\theta_0}^\varepsilon(t/\varepsilon^2)) - U^\varepsilon(\theta_0, \xi_0)] -$$

$$-\varepsilon^2 \int_0^{t/\varepsilon^2} \beta(\xi_{\theta_0}^\varepsilon(s))\psi^\varepsilon(\theta_0, \xi_{\theta_0}^\varepsilon(s))dW(s).$$

Резюмируя выкладки, приходим к следующим утверждениям, доказательство которых аналогично доказательству соответствующих утверждений из [13].

Лемма 1. Пусть диффузионный процесс задан как решение уравнения (1) и выполнены условия 1, 2 ; тогда для любой 1-периодической дважды непрерывно дифференцируемой функции $f(x)$ $(|f(x)| \le K < +\infty)$ с вероятностью единица справедлива оценка

$$\sup_{0 \le t \le T} \left| \varepsilon^2 \int_0^{t/\varepsilon^2} [f(\xi_{\theta_0}^\varepsilon(s)) - \overline{f}^\varepsilon(\theta_0)]ds + \varepsilon^2 \int_0^{t/\varepsilon^2} \beta(\xi_{\theta_0}^\varepsilon(s))\psi^\varepsilon(\theta_0, \xi_{\theta_0}^\varepsilon(s))dW(s) \right| \le$$

$$\le \varepsilon^2 2 \frac{Kc}{\gamma}, \qquad (14)$$

где постоянные $c > 0$, $\gamma > 0$ следуют из оценки (8), а $\rho_\varepsilon(x, \theta_0)$ задается формулой (5).

Следствие 1. Для любой 1-периодической дважды непрерывно дифференцируемой функции $\beta^2(x)$ $(\beta^2(x) \le K < +\infty)$ справедлива оценка

$$M \sup_{0 \le t \le T} \left| \varepsilon^2 \int_0^{t/\varepsilon^2} \beta^2(\xi^\varepsilon(s))ds - t\overline{\beta}_\varepsilon^2(\theta_0) \right| \le \varepsilon^2 \frac{2Kc}{\gamma} + \varepsilon\sqrt{T}\, \frac{4C^2}{\lambda} K\sqrt{K}, \qquad (15)$$

где $\overline{\beta}_\varepsilon^2(\theta_0) = \int_0^1 \beta^2(x)\rho^\varepsilon(\theta_0, x)dx.$

Следствие 2. Для 1-периодической дважды непрерывно дифференцируемой по x функции $\alpha(\theta_0, x)$ $(|\alpha(\theta_0, x)| \le K < +\infty)$ справедливы оценки

$$\sup_{0 \le t \le T} M \left| \varepsilon^2 \int_0^{t/\varepsilon^2} \alpha(\theta_0, \xi^\varepsilon(s))ds - t\overline{\alpha}_\varepsilon(\theta_0) \right|^2 \le 8\varepsilon^4 \frac{K^2c^2}{\gamma^2} + \frac{32\varepsilon^2 K^3 TC^4}{\lambda^2}, \qquad (16)$$

где $\overline{\alpha}_\varepsilon(\theta_0) = \int_0^1 \alpha(\theta_0, x)\rho_\varepsilon(\theta_0, x)dx.$

Лемма 2. Для любой 1-периодической дважды непрерывно дифференцируемой функции $\beta^2(x)$ $(\beta^2(x) \le K < +\infty)$ справедлива оценка

$$\sup_{0 \le t \le T} M \left| \varepsilon \int_0^{t/\varepsilon^2} \beta(\xi_{\theta_0}^\varepsilon(s))dW(s) - \overline{\beta}_\varepsilon(\theta_0)\widetilde{W}_\varepsilon(t) \right|^2 \le$$

$$\le \sup_{0 \le t \le T} M \left| \varepsilon^2 \int_0^{t/\varepsilon} \beta^2(\xi_{\theta_0}^\varepsilon(s))ds - \overline{\beta}_\varepsilon^2(\theta_0)t \right| \le \varepsilon^2 \frac{2Kc}{\gamma} + \varepsilon 2\sqrt{\mathrm{T}}\, \frac{4C^2}{\lambda} K\sqrt{K}. \qquad (17)$$

Лемма 3. Справедливы оценки

$$|\overline{\alpha}_\varepsilon(\theta_0)-\overline{\alpha}(\theta_0)|^2 \le \varepsilon^2 \frac{K^6}{\lambda^4}\left(4\frac{K}{\lambda}+1\right)^2 \exp\{20\varepsilon K/\lambda\}, \tag{18}$$

$$\left|\overline{\beta}_\varepsilon^2(\theta_0)-\overline{\beta}^2\right| \le \varepsilon \frac{K^3}{\lambda^2}\left(4\frac{K}{\lambda}+1\right)\exp\{10\varepsilon K/\lambda\},$$

$$\left|\overline{\beta}_\varepsilon(\theta_0)-\overline{\beta}\right|^2 \le \varepsilon^2 \frac{K^5}{\lambda^4}\left(4\frac{K}{\lambda}+1\right)^4 \exp\{20\varepsilon K/\lambda\},$$

где

$$\overline{\alpha}(\theta_0)=\int_0^1 \alpha(\theta_0,x)\rho(x)dx,\ \ \rho(x)=\frac{1}{\beta^2(x)}\left[\int_0^1 \frac{dy}{\beta^2(y)}\right]^{-1},$$

$$\overline{\beta}^2=\int_0^1 \beta^2(x)\rho(x)dx=\left[\int_0^1 \frac{dy}{\beta^2(y)}\right]^{-1}. \tag{19}$$

Из оценок (15), (16) и (18) следуют оценки

$$M\sup_{0\le t\le T}\left|\varepsilon^2\int_0^{t/\varepsilon^2}\beta^2(\xi^\varepsilon(s))ds-t\overline{\beta}^2\right| \le \varepsilon^2\frac{2Kc}{\gamma}+\varepsilon\sqrt{\mathrm{T}}\frac{4C^2}{\lambda}K\sqrt{K}+$$

$$+\varepsilon\frac{K^3}{\lambda^2}\left(4\frac{K}{\lambda}+1\right)\exp\{10\varepsilon K/\lambda\},$$

$$\sup_{0\le t\le T}M\left|\varepsilon^2\int_0^{t/\varepsilon^2}\alpha(\theta_0,\xi^\varepsilon(s))ds-t\overline{\alpha}(\theta_0)\right|^2 \le 8\varepsilon^4\frac{K^2c^2}{\gamma^2}+\frac{32\varepsilon^2K^3TC^4}{\lambda^2}+$$

$$+\varepsilon^2\frac{K^6}{\lambda^4}\left(4\frac{K}{\lambda}+1\right)^2\exp\{20\varepsilon K/\lambda\},$$

$$\sup_{0\le t\le T}M\left|\varepsilon\int_0^{t/\varepsilon^2}\beta(\xi_{\theta_0}^\varepsilon(s))dW(s)-\overline{\beta}\widetilde{W}_\varepsilon(t)\right|^2 \le 2\sup_{0\le t\le T}M\left|\varepsilon\int_0^{t/\varepsilon^2}\beta(\xi_{\theta_0}^\varepsilon(s))dW(s)-\overline{\beta}_\varepsilon(\theta_0)\widetilde{W}_\varepsilon(t)\right|^2+$$

$$+2\sup_{0\le t\le T}M\left|\overline{\beta}_\varepsilon(\theta_0)-\overline{\beta}\right|^2\widetilde{W}_\varepsilon^2(t)^2 \le$$

$$\le 2\sup_{0\le t\le T}M\left|\varepsilon^2\int_0^{t/\varepsilon^2}\beta^2(\xi_{\theta_0}^\varepsilon(s))ds-\overline{\beta}_\varepsilon^2(\theta_0)t\right|+2T\sup_{0\le t\le T}M\left|\overline{\beta}_\varepsilon(\theta_0)-\overline{\beta}\right|^2 \le$$

$$\le 2\varepsilon^2\frac{2Kc}{\gamma}+2\varepsilon\sqrt{T}\frac{4C^2}{\lambda}K\sqrt{K}+2\varepsilon\frac{K^3}{\lambda^2}\left(4\frac{K}{\lambda}+1\right)\exp\{10\varepsilon K/\lambda\}+$$

$$+2T\varepsilon^2\frac{K^5}{\lambda^4}\left(4\frac{K}{\lambda}+1\right)^4\exp\{20\varepsilon K/\lambda\}. \tag{20}$$

ОСНОВНОЙ РЕЗУЛЬТАТ

Теорема 1. Пусть выполнены условия 1, 2 и $M|\xi_0|^2 < +\infty$, тогда справедлива оценка

$$\sup_{0\le t\le T} M\left|\varepsilon\xi^{\varepsilon}_{\theta_0}(t/\varepsilon^2)-\eta^{\varepsilon}_{\theta_0}(t)\right|^2 \le 3\sup_{0\le t\le T} M\varepsilon|\xi_0|^2+$$

$$+3\sup_{0\le t\le T} M\left|\varepsilon^2\int_0^{t/\varepsilon^2}\alpha(\theta_0,\xi^{\varepsilon}(s))ds-t\overline{\alpha}(\theta_0)\right|^2+$$

$$+\sup_{0\le t\le T} M\left|\varepsilon\int_0^{t/\varepsilon^2}\beta(\xi^{\varepsilon}_{\theta_0}(s))dW(s)-\overline{\beta}\widetilde{W}_{\varepsilon}(t)\right|^2 \le 3\varepsilon M|\xi_0|^2+24\varepsilon^4\frac{K^2c^2}{\gamma^2}+\frac{32\varepsilon^2K^3TC^4}{\lambda^2}+$$

$$+3\varepsilon^2\frac{K^6}{\lambda^4}\left(4\frac{K}{\lambda}+1\right)^2\exp\{20\varepsilon K/\lambda\}+6\varepsilon^2\frac{2Kc}{\gamma}+6\varepsilon\sqrt{T}\frac{4C^2}{\lambda}K\sqrt{K}+ \tag{21}$$

$$+6\varepsilon\frac{K^3}{\lambda^2}\left(4\frac{K}{\lambda}+1\right)\exp\{10\varepsilon K/\lambda\}+6T\varepsilon^2\frac{K^5}{\lambda^4}\left(4\frac{K}{\lambda}+1\right)^4\exp\{20\varepsilon K/\lambda\}=\varepsilon TC(\varepsilon),$$

где

$$C(\varepsilon)=3M|\xi_0|^2+24\frac{K^2c^2}{\gamma^2}+\frac{32K^3C^4}{\lambda^2}+$$

$$+3\frac{K^6}{\lambda^4}\left(4\frac{K}{\lambda}+1\right)^2\exp\{20\varepsilon K/\lambda\}+6\frac{2Kc}{\gamma}+6\varepsilon\frac{4C^2}{\lambda}K\sqrt{K}+ \tag{22}$$

$$+6\frac{K^3}{\lambda^2}\left(4\frac{K}{\lambda}+1\right)\exp\{10\varepsilon K/\lambda\}+6\frac{K^5}{\lambda^4}\left(4\frac{K}{\lambda}+1\right)^4\exp\{20\varepsilon K/\lambda\},$$

$$\overline{\alpha}(\theta_0)=\int_0^1\alpha(\theta_0,x)\frac{1}{\beta^2(x)}\left[\int_0^1\frac{dy}{\beta^2(y)}\right]^{-1}dx,\quad \overline{\beta}^2=\left[\int_0^1\frac{dy}{\beta^2(y)}\right]^{-1}.$$

Доказательство следует из оценок (20).

Пусть $(G_T,\mathfrak{R}_T)$ — измеримое пространство непрерывных функций $\{x_t,\ 0\le t\le T\}$ на $[0,T]$ с σ-алгеброй $\mathfrak{R}_T$. Обозначим μ^T_θ вероятностную меру на $(G_T,\mathfrak{R}_T)$, порожденную процессом $\eta^{\varepsilon}_{\theta}(t): 0\le t\le T$, где

$$d\eta^{\varepsilon}_{\theta}(t)=\overline{\alpha}(\theta)dt+\overline{\beta}d\widetilde{W}_{\varepsilon}(t),\ \ \eta^{\varepsilon}_{\theta}(0)=0.$$

Предположим, что $\eta^{\varepsilon,T}_{\theta_0}=\{\eta^{\varepsilon}_{\theta_0}(t): 0\le t\le T\}$ — траектория решения (2) на промежутке времени $[0,T]$. Известно (например, [1]), что при $\theta\in Q$, $\theta_0\in Q$ логарифм отношения правдоподобия имеет вид

$$\Lambda_T(\theta,\theta_0,\eta^{\varepsilon,T}_{\theta_0})=\ln\frac{d\mu^T_\theta}{d\mu^T_{\theta_0}}(\eta^{\varepsilon,T}_{\theta_0})=$$

$$=\int_0^T\frac{\overline{\alpha}(\theta)-\overline{\alpha}(\theta_0)}{\overline{\beta}}d\widetilde{W}_{\varepsilon}(t)-\frac{1}{2}\int_0^T\left[\frac{\overline{\alpha}(\theta)-\overline{\alpha}(\theta_0)}{\overline{\beta}}\right]^2dt.$$

Здесь
$$d\widetilde{W}_\varepsilon(t)=\frac{d\eta_\theta^\varepsilon(t)-\overline{\alpha}(\theta_0)dt}{\overline{\beta}},$$
т.е.
$$\Lambda_T(\theta,\theta_0,\eta_{\theta_0}^{\varepsilon,T})=\int_0^T\frac{\overline{\alpha}(\theta)-\overline{\alpha}(\theta_0)}{\overline{\beta}}\,dW_\varepsilon(t)-\frac{1}{2}\int_0^T\left[\frac{\overline{\alpha}(\theta)-\overline{\alpha}(\theta_0)}{\overline{\beta}}\right]^2dt=$$
$$=\int_0^T\frac{\overline{\alpha}(\theta)-\overline{\alpha}(\theta_0)}{\overline{\beta}}\,\frac{d\eta_\theta^\varepsilon(t)-\overline{\alpha}(\theta_0)dt}{\overline{\beta}}-\frac{1}{2}\int_0^T\left[\frac{\overline{\alpha}(\theta)-\overline{\alpha}(\theta_0)}{\overline{\beta}}\right]^2dt=$$
$$=\frac{\overline{\alpha}(\theta)-\overline{\alpha}(\theta_0)}{\overline{\beta}^2}\eta_\theta^\varepsilon(T)+\frac{\overline{\alpha}^2(\theta_0)}{2\overline{\beta}^2}T-\frac{\overline{\alpha}^2(\theta)}{2\overline{\beta}^2}T. \qquad (23)$$

Будем считать, что имеет место траектория процесса $\xi_{\theta_0}^\varepsilon(t)$ на промежутке времени $0\le t\le T/\varepsilon^2$, т.е. $\xi_{\theta_0}^{\varepsilon,T/\varepsilon^2}=\{\xi_{\theta_0}^\varepsilon(t):0\le t\le T/\varepsilon^2\}$. Подставим в (23) вместо $\eta_\theta^\varepsilon(T)$ величину $\varepsilon\xi_{\theta_0}^\varepsilon(T/\varepsilon^2)$. Пусть θ_ε^T — оценка, доставляющая максимум функции
$$\Lambda(\theta,\theta_0,\varepsilon\xi_{\theta_0}^\varepsilon(./\varepsilon^2))=\frac{\overline{\alpha}(\theta)-\overline{\alpha}(\theta_0)}{\overline{\beta}^2}\varepsilon\xi_{\theta_0}^\varepsilon(T/\varepsilon^2)+\frac{\overline{\alpha}^2(\theta_0)}{2\overline{\beta}^2}T-\frac{\overline{\alpha}^2(\theta)}{2\overline{\beta}^2}T,$$
т.е. $\Lambda(\theta_\varepsilon^T,\theta_0,\varepsilon\xi_{\theta_0}^\varepsilon(./\varepsilon^2))=\max\limits_{\theta\in Q}\Lambda(\theta,\theta_0,\varepsilon\xi_{\theta_0}^\varepsilon(./\varepsilon^2))$.

Теорема 2. Пусть выполняются условия 1, 2 и для $\overline{\alpha}(\theta)$ справедливо неравенство
$$|\overline{\alpha}(\theta_1)-\overline{\alpha}(\theta_2)|\ge C|\theta_1-\theta_2|^\delta,\ 0<\delta\le 1,\ C>0,\ \theta_1\in Q,\ \theta_2\in Q.$$
Тогда для достаточно малого $\varepsilon>0$ имеем
$$P\{\sqrt{T}|\theta_\varepsilon^T-\theta_0|>R\}\le 2\exp\left\{-\frac{1}{8}\left[\frac{CR^\delta T^{(1-\delta)/2}-2\gamma(\varepsilon)}{\sqrt{K}}\right]^2\right\}+\frac{\varepsilon C(\varepsilon)}{\gamma^2(\varepsilon)}, \qquad (24)$$
где $C(\varepsilon)$ определено в (21), $0<2\gamma(\varepsilon)<CR^\delta T^{(1-\delta)/2}$.

Доказательство. Пусть $\sqrt{T}(\theta_\varepsilon^T-\theta_0)=u$, т.е. $\theta_\varepsilon^T=\theta_0+u/\sqrt{T}$, тогда
$$P\{\sqrt{T}|\theta_\varepsilon^T-\theta_0|>R\}\le$$
$$\le P\{\max_{|u|>R}\Lambda(\theta_0+u/\sqrt{T},\ \theta_0,\varepsilon\xi_{\theta_0}^\varepsilon(./\varepsilon^2))\ge\Lambda(\theta_0,\theta_0,\varepsilon\xi_{\theta_0}^\varepsilon(./\varepsilon^2))\}=$$
$$=P\{\max_{|u|>R}\Lambda(\theta_0+u/\sqrt{T},\theta_0,\varepsilon\xi_{\theta_0}^\varepsilon(./\varepsilon^2))\ge 0\}\le$$
$$\le P\left\{\sup_{|u|\ge R}\left|\frac{\overline{\alpha}(\theta_0+u/\sqrt{T})-\overline{\alpha}(\theta_0)}{\overline{\beta}^2}\right|\left|\varepsilon\xi_{\theta_0}^\varepsilon(T/\varepsilon^2)-\eta_\theta^\varepsilon(T)\right|+\right.$$
$$\left.+\sup_{|u|\ge R}\left(\frac{\overline{\alpha}(\theta_0+u/\sqrt{T})-\overline{\alpha}(\theta_0)}{\overline{\beta}^2}\eta_\theta^\varepsilon(T)+\frac{\overline{\alpha}^2(\theta_0)}{2\overline{\beta}^2}T-\frac{\overline{\alpha}^2(\theta_0+u/\sqrt{T})}{2\overline{\beta}^2}T\right)\ge 0\right\}\le$$

$$\le P\left\{\sup_{|u|\ge R}\left|\frac{\overline{\alpha}(\theta_0+u/\sqrt{T})-\overline{\alpha}(\theta_0)}{\overline{\beta}^2}\right|\sqrt{T}\gamma(\varepsilon)+\right.$$

$$\left.+\sup_{|u|\ge R}\left(\frac{\overline{\alpha}(\theta_0+u/\sqrt{T})-\overline{\alpha}(\theta_0)}{\overline{\beta}^2}\eta_\theta^\varepsilon(T)+\frac{\overline{\alpha}^2(\theta_0)}{2\overline{\beta}^2}T-\frac{\overline{\alpha}^2(\theta_0+u/\sqrt{T})}{2\overline{\beta}^2}T\right)\ge 0\right\}+$$

$$+P\{|\varepsilon\xi_{\theta_0}^\varepsilon(T/\varepsilon^2)-\eta_\theta^\varepsilon(T)|>\sqrt{T}\gamma(\varepsilon)\}\le$$

$$\le P\left\{\sup_{|u|\ge R}\left(\left|\frac{\overline{\alpha}(\theta_0+u/\sqrt{T})-\overline{\alpha}(\theta_0)}{\overline{\beta}^2}\right|\sqrt{T}\gamma(\varepsilon)+\right.\right.$$

$$\left.\left.+\frac{\overline{\alpha}(\theta_0+u/\sqrt{T})-\overline{\alpha}(\theta_0)}{\overline{\beta}}W^\varepsilon(T)-\frac{[\overline{\alpha}(\theta_0+u/\sqrt{T})-\overline{\alpha}(\theta_0)]^2}{2\overline{\beta}^2}T\right)\ge 0\right\}+\frac{\varepsilon C(\varepsilon)}{\gamma^2(\varepsilon)}\le$$

$$\le P\left\{\sup_{|u|\ge R}\left|\frac{\overline{\alpha}(\theta_0+u/\sqrt{T})-\overline{\alpha}(\theta_0)}{\overline{\beta}^2}\right|\sqrt{T}\sup_{|u|\ge R}\left[\gamma(\varepsilon)+\sup_{|u|\ge R}(\overline{\beta}|W^\varepsilon(T)/\sqrt{T}|+\right.\right.$$

$$\left.\left.+\frac{|\overline{\alpha}(\theta_0+u/\sqrt{T})-\overline{\alpha}(\theta_0)|}{2}\sqrt{T}\right]\ge 0\right\}+\frac{\varepsilon C(\varepsilon)}{\gamma^2(\varepsilon)}\le$$

$$\le P\left\{\sup_{|u|\ge R}\left(\gamma(\varepsilon)+\overline{\beta}|W^\varepsilon(T)/\sqrt{T}|-\frac{|\overline{\alpha}(\theta_0+u/\sqrt{T})-\overline{\alpha}(\theta_0)|}{2}\sqrt{T}\right)\ge 0\right\}+\frac{\varepsilon C(\varepsilon)}{\gamma^2(\varepsilon)}\le$$

$$\le P\left\{\left(\gamma(\varepsilon)+\overline{\beta}|\xi|-\inf_{|u|\ge R}\frac{|\overline{\alpha}(\theta_0+u/\sqrt{T})-\overline{\alpha}(\theta_0)|}{2}\sqrt{T}\right)\ge 0\right\}+\frac{\varepsilon C(\varepsilon)}{\gamma^2(\varepsilon)}\le$$

$$\le P\left\{\gamma(\varepsilon)+\overline{\beta}|\xi|-C\frac{|R/\sqrt{T}|^\delta}{2}\sqrt{T}\ge 0\right\}+\frac{\varepsilon C(\varepsilon)}{\gamma^2(\varepsilon)}\le$$

$$\le P\left\{|\xi|\ge\frac{C|R/\sqrt{T}|^\delta\sqrt{T}-2\gamma(\varepsilon)}{2\sqrt{K}}\right\}+\frac{\varepsilon C(\varepsilon)}{\gamma^2(\varepsilon)}\le$$

$$\le 2\exp\left\{-\frac{1}{8}\left[\frac{CR^\delta T^{(1-\delta)/2}-2\gamma(\varepsilon)}{\sqrt{K}}\right]^2\right\}+\frac{\varepsilon C(\varepsilon)}{\gamma^2(\varepsilon)}.$$

Здесь ξ — $N(0,1)$-распределенная случайная величина.

Теорема 2 доказана.

Следствие. Выбирая в (24) T и R как функции параметра $\varepsilon>0$ такими, что

$$\gamma(\varepsilon)\to 0,\ R=R(\varepsilon)\to+\infty,\ T=T(\varepsilon)\to+\infty,\ \frac{R(\varepsilon)}{\sqrt{T(\varepsilon)}}\to 0,\ T(\varepsilon)\gamma^2(\varepsilon)\to 0,$$

$$R(\varepsilon)^\delta T(\varepsilon)^{(1-\delta)/2}\to+\infty,\ \frac{\varepsilon}{\gamma^2(\varepsilon)}\to 0$$

при $\varepsilon\to 0$, для достаточно малого $\varepsilon>0$ для произвольных достаточно малых χ,γ будем иметь

$$\frac{R(\varepsilon)}{\sqrt{T(\varepsilon)}}\le\gamma,\ 2\exp\left\{-\frac{1}{8}\left[\frac{CR(\varepsilon)^\delta T(\varepsilon)^{(1-\delta)/2}-2\gamma(\varepsilon)}{\sqrt{K}}\right]^2\right\}+\frac{\varepsilon C(\varepsilon)}{\gamma^2(\varepsilon)}\le\chi.$$

Отсюда и из (24) следует

$$P\{|\theta_{\varepsilon}^{T(\varepsilon)}-\theta_0|\le\gamma\}\ge 1-\chi\,,$$

т.е. интервал накрытия построен.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В статье рассмотрена задача оценки неизвестного параметра, входящего в коэффициент сноса стохастического дифференциального уравнения с 1-периодическими коэффициентами. Малый параметр при коэффициенте сноса делает такую модель пригодной для описания слабых сигналов, зашумленных диффузионным процессом. Наблюдая такой процесс решения продолжительное время, удается построить достаточно узкий интервал накрытия параметра, границы которого зависят от величины параметра и длительности наблюдения.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Ибрагимов И.А., Хасьминский Р.З. Асимптотическая теория оценивания. — М.: Наука, 1979. — 528 с.
2. Линьков Ю.Н. Асимптотические методы статистики случайных процессов. — Киев: Наук. думка, 1993. — 254 с.
3. Липцер Р.Ш., Ширяев А.Н. Статистика случайных процессов. — М.: Наука, 1974. – 696 с.
4. Дороговцев А.Я. Теория оценок параметров случайных процессов. — Киев: Вища шк., 1982. — 192 с.
5. Кнопов П.С. Оптимальные оценки параметров стохастических систем. — К.: Наук. думка, 1981. — 152 с.
6. Кутоянц Ю.А. Оценивание параметров случайных процессов. — Ереван: Изд-во АН АрмССР, 1980. — 254 с.
7. Bhattacharya R. A central limit theorem for diffusions with periodic coefficients // Ann. Probab. — 1985. — **13**, N 2. — P. 385–396.
8. Сафонова О.А. Об асимптотическом поведении интегральных функционалов от диффузионных процессов с периодическими коэффициентами // Укр. мат. журн. — 1992. — **44**, № 2. — С. 245–252.
9. Бондарев Б.В., Симогин А.А. Неравенства больших уклонений для оценок неизвестных параметров в стохастических системах // Кибернетика и системный анализ. — 1994. — № 2. — С. 95–112.
10. Кнопов П.С., Пепеляев В.А. О непараметрической оценке почти периодического сигнала // Там же. — 2007. — № 3. — С. 57–63.
11. Бондарев Б.В., Ковтун Е.Е. Оценка скорости сходимости в обыкновенных дифференциальных уравнениях, находящихся под воздействием случайных процессов с быстрым временем // Укр. мат. журн. — 2005. — **57**, № 4. — С. 435–457.
12. Bensoussan A., Lions J.-L, Papanicolaou G. Asymptotic analysis for periodic structures. — Amsterdam: North-Holland Publ. Com., 1978. — 700 p.
13. Бондарев Б.В., Козырь С.М. О задаче Р. Мертона при периодических быстро осциллирующих случайных коэффициентах // Проблемы управлеия и информатики. — 2009. — № 6. — С. 1–19.

Поступила 16.06.2010