УДК 519.216

И.П. АТАМАНЮК

АЛГОРИТМ ОПРЕДЕЛЕНИЯ ОПТИМАЛЬНЫХ ПАРАМЕТРОВ ПОЛИНОМИАЛЬНОГО ФИЛЬТРА-ЭКСТРАПОЛЯТОРА ВИНЕРА ДЛЯ НЕСТАЦИОНАРНЫХ СЛУЧАЙНЫХ ПРОЦЕССОВ, НАБЛЮДАЕМЫХ С ПОГРЕШНОСТЯМИ

Ключевые слова: *случайный процесс, алгоритм оптимальной экстраполяции.*

Пусть исследуемый случайный процесс $X(t)$ в дискретном ряду точек t_i, $i=\overline{1,I}$, измеряется с некоторой погрешностью $Y(i)$, в результате имеет место случайный процесс измерений $Z(t)$:

$$Z(t)=X(t)+Y(t). \tag{1}$$

Положим, что получены $k<1$ первых его значений: $Z(\mu)=z(\mu)$, $\mu=\overline{1,k}$. Задача экстраполяции заключается в том, что на основе этой информации и априорных сведений о процессах $X(t), Y(t)$ требуется получить оптимальную в среднеквадратическом смысле оценку $\hat{X}(i)$, $i=\overline{k+1,I}$, будущих значений соответствующей реализации ненаблюдаемого случайного процесса $X(t)$.

Один из наиболее известных методов решения этой задачи — метод Винера [1, 2], согласно которому оценка дальнейших значений $\hat{X}(i)$, $i=\overline{k+1,I}$, реализации случайного процесса $X(t)$ определяется из соотношения

$$\hat{X}=\sum_{\mu=1}^{k} h_\mu(i)z(\mu), \quad i=\overline{k+1,I}. \tag{2}$$

В (2) $h_\mu(i)$, $\mu=\overline{1,k}$, — дискретизированная импульсная переходная характеристика, оптимальные значения которой определяются из системы уравнений

$$\sum_{\mu=1}^{k} h_\mu(i)R_z(j,\mu)=R_{xz}(j,i), \quad j=\overline{1,k}, \quad i=\overline{k+1,I}. \tag{3}$$

Результат прогноза при использовании метода Винера несмещенный и обеспечивает минимум среднего квадрата ошибки экстраполяции. Однако область применения данного алгоритма существенно ограничена тем, что при его получении использованы предположения о стационарности исследуемого случайного процесса $X(t)$ и процесса погрешностей измерений $Y(t)$. В [3] данное ограничение снято и получено оптимальное в среднеквадратическом смысле решение задачи фильтрации-экстраполяции нестационарного случайного процесса:

$$m_{x/z}^{(\mu)}(i)=\begin{cases} 0, & \mu=0,\ i=\overline{1,I}, \\ m_{x/z}^{(\mu-1)}(i)+[z(\mu)-m_{x/z}^{(\mu-1)}(\mu)]\beta_\mu(i), & \mu=\overline{1,k},\ i=\overline{\mu+1,I}. \end{cases} \tag{4}$$

Алгоритм (4) имеет эквивалентную явную форму записи:

$$m_{x/z}^{(k)}(i)=\sum_{\mu=1}^{k} z(\mu)b_\mu^{(k)}(i), \quad i=\overline{k+1,I}, \tag{5}$$

где

$$b_\mu^{(k)}(i)=\begin{cases} b_\mu^{(k-1)}(i)-b_\mu^{(k-1)}(k)B_k(i), & \mu\le k-1; \\ \beta_k(i), & \mu=k. \end{cases} \tag{6}$$

Параметры алгоритма (4), (5) являются элементами канонического разложения [4, 5] смешанной случайной последовательности $\{X'\} = \{Z(1), Z(2), \ldots \ldots, Z(k), X(k+1), \ldots, X(I)\}$, сочетающей в себе как результаты измерений до $i = k$, так и данные о процессе $X(t)$ для $i = \overline{k+1, I}$:

$$X'(i) = \sum_{\nu=1}^{i} U_\nu \beta_\nu(i), \quad i = \overline{1, I}\,; \tag{7}$$

$$U_i = Z(i) - \sum_{\nu=1}^{i-1} U_\nu \beta_\nu(i), \quad i = \overline{1, k}; \tag{8}$$

$$U_i = X(i) - \sum_{\nu=1}^{i-1} U_\nu \beta_\nu(i), \quad i = \overline{k+1, I}; \tag{9}$$

$$D_i = D_z(i) - \sum_{\nu=1}^{i-1} D_\nu \beta_\nu^2(i), \quad i = \overline{1, k}; \tag{10}$$

$$D_i = D_x(i) - \sum_{\nu=1}^{i-1} D_\nu \beta_\nu^2(i), \quad i = \overline{k+1, I}; \tag{11}$$

$$\beta_\nu(i) = \frac{1}{D_\nu}\{R_z(\nu, i) - \sum_{j=1}^{\nu-1} D_j \beta_j(\nu) \beta_j(i)\}, \quad \nu = \overline{1, k}, \quad i = \overline{\nu, k}; \tag{12}$$

$$\beta_\nu(i) = \frac{1}{D_\nu}\{R_{zx}(\nu, i) - \sum_{j=1}^{\nu-1} D_j \beta_j(\nu) \beta_j(i)\}, \quad \nu = \overline{1, k}, \quad i = \overline{k+1, I}; \tag{13}$$

$$\beta_\nu(i) = \frac{1}{D_\nu}\left\{R_x(\nu, i) - \sum_{j=1}^{\nu-1} D_j \beta_j(\nu) \beta_j(i)\right\}, \ \nu = \overline{k+1, I}, \quad i = \overline{k+1, I}. \tag{14}$$

Существенный недостаток алгоритма (4), (5) — предположение о наличии в исследуемом случайном процессе $X(t)$ только корреляционных связей.

Полиномиальный алгоритм Винера позволяет учесть в решении задачи прогноза стохастические связи более высоких порядков:

$$\hat{X}(i) = \sum_{j=1}^{k} \sum_{\nu=1}^{N} h_j^{(\nu)}(i) z^\nu(j), \quad \nu = \overline{1, N}, \quad i = \overline{k+1, I}. \tag{15}$$

Оптимальные значения дискретизированной импульсной переходной характеристики $h_j^{(\nu)}(i)$, $j = \overline{1, k}, \nu = \overline{1, N}, i = \overline{k+1, I}$, определяются из системы уравнений

$$\sum_{j=1}^{k} \sum_{\nu=1}^{N} h_j^{(\nu)}(i)\, M[Z^\nu(j) Z^l(\mu)] = M[Z^l(\mu) X(i)]\,,$$

$$j, \mu = \overline{1, k}, \ \nu, l = \overline{1, N}, \ i = \overline{k+1, I}. \tag{16}$$

Однако метод (15), как и фильтр-экстраполятор (2), применяется только для стационарных случайных процессов. В этой связи возникает задача снятия указанного ограничения для нелинейного случая.

ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ

Пусть исследуемый случайный процесс $X(t)$ полностью задан в дискретном ряду точек t_i, $i = \overline{1, I}$, дискретизированной моментной функцией $M[X^\lambda(\nu) X^h(i)]$, $\lambda, h = \overline{1, N}$, $\nu, i = \overline{1, I}$. Также известны стохастические свойства $M[Y^\lambda(\nu) Y^h(i)]$,

$\lambda, h = \overline{1, N}$, $\nu, i = \overline{1, I}$, случайного процесса $Y(t)$ погрешностей измерений. Без ограничения общности последующего изложения положим $M[X(i)] = 0$, $M[Y(i)] = 0$, $i = \overline{1, I}$. Необходимо получить оптимальный в среднеквадратическом смысле алгоритм экстраполяции дальнейших значений исследуемого процесса $X(t)$ по результатам последовательных измерений $z(\mu)$, $\mu = \overline{1, k}$.

МЕТОД РЕШЕНИЯ

Решение данной задачи можно получить на базе соответствующего полиномиального разложения [6, 7] последовательности $\{X'\}$:

$$X'(i) = \sum_{\nu=1}^{i} \sum_{\lambda=1}^{N} W_{\nu}^{(\lambda)} \beta_{1\nu}^{(\lambda)}(i), \;\; i = \overline{1, I}. \tag{17}$$

Элементы разложения (17) определяются следующими рекуррентными соотношениями:

$$W_{\nu}^{(\lambda)} = Z^{\lambda}(\nu) - \sum_{\mu=1}^{\nu-1} \sum_{j=1}^{N} W_{\mu}^{(j)} \beta_{\lambda\mu}^{(j)}(\nu) - \sum_{j=1}^{\lambda-1} W_{\nu}^{(j)} \beta_{\lambda\nu}^{(j)}(\nu), \nu = \overline{1, k}; \tag{18}$$

$$W_{\nu}^{(\lambda)} = X^{\lambda}(\nu) - \sum_{\mu=1}^{\nu-1} \sum_{j=1}^{N-1} W_{\mu}^{(j)} \beta_{\lambda\mu}^{(j)}(\nu) - \sum_{j=1}^{\lambda-1} W_{\nu}^{(j)} \beta_{\lambda\nu}^{(j)}(\nu), \nu = \overline{k+1, I}; \tag{19}$$

$$\begin{gathered} D_{\lambda}(\nu) = M[\{W_{\nu}^{(\lambda)}\}^2] = M[Z^{2\lambda}(\nu)] - \sum_{\mu=1}^{\nu-1} \sum_{j=1}^{N} D_j(\mu) \{\beta_{\lambda\mu}^{(j)}(\nu)\}^2 - \\ - \sum_{j=1}^{\lambda-1} D_j(\nu) \{\beta_{\lambda\nu}^{(j)}(\nu)\}^2, \;\; \nu = \overline{1, k}; \end{gathered} \tag{20}$$

$$\begin{gathered} D_{\lambda}(\nu) = M[\{W_{\nu}^{(\lambda)}\}^2] = \\ = M[X^{2\lambda}(\nu)] - \sum_{\mu=1}^{\nu-1} \sum_{j=1}^{N} D_j(\mu) \{\beta_{\lambda\mu}^{(j)}(\nu)\}^2 - \sum_{j=1}^{\lambda-1} D_j(\nu) \{\beta_{\lambda\nu}^{(j)}(\nu)\}^2, \;\; \nu = \overline{k+1, I}; \end{gathered} \tag{21}$$

$$\begin{gathered} \beta_{h\nu}^{(\lambda)}(i) = \frac{M[W_{\nu}^{(\lambda)} Z^h(i)]}{M[\{W_{\nu}^{(\lambda)}\}^2]} = \frac{1}{D_{\lambda}(\nu)} \Bigg\{ M[Z^{\lambda}(\nu) Z^h(i)] - \\ - \sum_{\mu=1}^{\nu-1} \sum_{j=1}^{N} D_j(\mu) \beta_{\lambda\mu}^{(j)}(\nu) \beta_{h\mu}^{(j)}(i) - \sum_{j=1}^{\lambda-1} D_j(\nu) \beta_{\lambda\nu}^{(j)}(\nu) \beta_{h\nu}^{(j)}(i) \Bigg\}, \end{gathered} \tag{22}$$

$$\lambda = \overline{1, h}, \; 1 \le \nu \le i \le k,$$

$$\begin{gathered} \beta_{h\nu}^{(\lambda)}(i) = \frac{M[W_{\nu}^{(\lambda)} X^h(i)]}{M[\{W_{\nu}^{(\lambda)}\}^2]} = \frac{1}{D_{\lambda}(\nu)} \Bigg\{ M[Z^{\lambda}(\nu) X^h(i)] - \\ - \sum_{\mu=1}^{\nu-1} \sum_{j=1}^{N} D_j(\mu) \beta_{\lambda\mu}^{(j)}(\nu) \beta_{h\mu}^{(j)}(i) - \sum_{j=1}^{\lambda-1} D_j(\nu) \beta_{\lambda\nu}^{(j)}(\nu) \beta_{h\nu}^{(j)}(i) \Bigg\}, \\ \lambda = \overline{1, h}, \nu = \overline{1, k}, i = \overline{k+1}; \end{gathered} \tag{23}$$

$$\beta_{h\nu}^{(\lambda)}(i) = \frac{M[W_{\nu}^{(\lambda)} X^h(i)]}{M[\{W_{\nu}^{(\lambda)}\}^2]} = \frac{1}{D_{\lambda}(\nu)} \Bigg\{ M[X^{\lambda}(\nu) X^h(i)] -$$

$$-\sum_{\mu=1}^{\nu-1}\sum_{j=1}^{N}D_j(\mu)\beta_{\lambda\mu}^{(j)}(\nu)\beta_{h\mu}^{(j)}(i)-\sum_{j=1}^{\lambda-1}D_j(\nu)\beta_{\lambda\nu}^{(j)}(\nu)\beta_{h\nu}^{(j)}(i)\Bigg\}, \qquad (24)$$

$$\lambda=\overline{1,h},\ k\le\nu\le i\le I.$$

В каноническом разложении (17) случайный процесс $X(t)$ представлен в исследуемом ряду точек t_i, $i=\overline{1,I}$, с помощью N массивов $\{W^{(\lambda)}\}$, $\lambda=\overline{1,N}$, некоррелированных центрированных случайных коэффициентов $W_i^{(\lambda)}$, $i=\overline{1,I}$. Данные коэффициенты содержат информацию о значениях $Z^{\lambda}(i)$, $\lambda=\overline{1,N}$, $i=\overline{1,k}$, и $X^{\lambda}(i)$, $\lambda=\overline{1,N}$, $i=\overline{k+1,I}$, а координатные функции $\beta_{h\nu}^{(\lambda)}(i)$ λ, $h=\overline{1,N}$, $\nu, i=\overline{1,I}$, описывают вероятностные связи порядка $\lambda+h$ между сечениями t_ν и t_i, ν, $i=\overline{1,I}$.

Предположим, что в результате измерения известно значение $z(1)$ последовательности $\{X'\}$ в точке t_1. Следовательно, известны значения коэффициентов $W_1^{(\lambda)}$, $\lambda=\overline{1,N}$:

$$w_1^{(\lambda)}=z^{\lambda}(1)-M[Z^{\lambda}(1)]-\sum_{j=1}^{\lambda-1}w_1^{(j)}\beta_{1\nu}^{(j)}(1),\quad \nu=\overline{1,I}. \qquad (25)$$

Подстановка $w_1^{(1)}$ в (17) позволяет получить полиномиальное каноническое разложение апостериорной случайной последовательности $\{X'^{(1,1)}\}=X'(i/z_1(1))$:

$$X'^{(1,1)}(i)=X'(i/z(1))=z(1)\beta_{11}^{(1)}(i)+\sum_{\lambda=2}^{N}W_1^{(\lambda)}\beta_{11}^{(\lambda)}(i)+$$

$$+\sum_{\nu=2}^{i}\sum_{\lambda=1}^{N}W_\nu^{(\lambda)}\beta_{1\nu}^{(\lambda)}(i),\quad i=\overline{1,I}. \qquad (26)$$

Применение к (26) операции математического ожидания дает оптимальную по критерию минимума среднего квадрата ошибки экстраполяции оценку будущих значений последовательности $\{X\}$ при условии, что для определения данной оценки используется одно значение $z(1)$:

$$m_{x/z}^{(1,1)}(i)=M[X'(i/z(1))]=z(1)\beta_{11}^{(1)}(i),\quad i=\overline{1,I}. \qquad (27)$$

Учитывая, что координатные функции $\beta_{h\nu}^{(\lambda)}(i)$, $\lambda, h=\overline{1,N}$, $\nu, i=\overline{1,I}$, определяются из условия минимума среднего квадрата ошибки приближения в промежутках между произвольными значениями $Z^{\lambda}(\nu)$ и $X^{h}(i)$, выражение (27) можно обобщить на случай прогнозирования $x^{h}(i)$, $h=1,\overline{N}$:

$$m_{x/z}^{(1,1)}(h,i)=M[X^{h}(i/z(1))]=z(1)\beta_{h1}^{(1)}(i),\quad i=\overline{k+1,I}. \qquad (28)$$

Конкретизация в (26) второго значения $w_1^{(2)}$ дает каноническое разложение апостериорной последовательности $\{X'^{(1,2)}\}=X(i/\mathrm{z}_1(1),z_1(1)^2)$:

$$X'^{(1,2)}(i)=X(i/z(1),z(1)^2)=z(1)\beta_{11}^{(1)}(i)+[z^2(1)-z(1)\beta_{21}^{(1)}(1)]\beta_{11}^{(2)}(1)+$$

$$+\sum_{\lambda=3}^{N-1}W_1^{(\lambda)}\beta_{11}^{(\lambda)}(i)+\sum_{\nu=2}^{i}\sum_{\lambda=1}^{N-1}W_\nu^{(\lambda)}\beta_{1\nu}^{(\lambda)}(i),\quad i=\overline{1,I}. \qquad (29)$$

Применеяя к (29) операцию математического ожидания и используя выражение (28), получаем алгоритм экстраполяции по двум значениям $z_1(1)$, $z_1(1)^2$:

$$m_{x/z}^{(1,2)}(h,i) = M[X^h(i / z(1), z(1)^2)] = m_{x/z}^{(1,1)}(h,i) +$$

$$+ [z^2(1) - m_{x/z}^{(1,1)}(2,i)]\beta_{11}^{(2)}(1), \quad i = \overline{k+1, I}. \qquad (30)$$

Обобщение полученной закономерности позволяет записать алгоритм прогноза для произвольного числа известных значений:

$$m_x^{(\mu,l)}(h,i) = \begin{cases} m_x^{(\mu,l-1)}(h,i) + (z^h(\mu) - m_x^{(\mu,l-1)}(l,\mu))\beta_{h\mu}^{(l)}(i), & l \neq 1, \\ m_x^{(\mu,N-1)}(h,i) + (z^h(\mu) - m_x^{(\mu-1,N-1)}(l,\mu))\beta_{h\mu}^{(1)}(i), & l = 1. \end{cases} \qquad (31)$$

Выражение $m_{x/z}^{(\mu,l)}(h,i) = M[X^h(i) / z^\nu(j), \ j = \overline{1,\mu-1}, \ \nu = \overline{1,N}; \ z^\nu(\mu), \ \nu = \overline{1,l}]$ для $h = 1$, $l = N$, $\mu = k$ является несмещенной оптимальной оценкой $m_{x/z}^{(k,N-1)}(1,i)$ будущего значения $x(i)$, $i = \overline{k+1, I}$, при условии, что для вычисления данной оценки используются значения $z^\nu(j)$, $\nu = \overline{1,N}$, $j = \overline{1,k}$, т.е. известны результаты измерений последовательности $\{X'\}$ в точках t_j, $j = \overline{1,k}$.

Выражение для искомой оценки $m_{x/z}^{(k,N)}(1,i)$ можно записать в следующем виде:

$$m_{x/z}^{(k,N)}(1,i) = \sum_{j=1}^{k}\sum_{\nu=1}^{N} z^\nu(j)\, S_{(j-1)N+\nu}^{(kN)}((i-1)N+1), \quad i = \overline{k+1, I}, \qquad (32)$$

где

$$S_{(j-1)N+\nu}^{(\alpha)}(\xi) = \begin{cases} S_{(j-1)N+\nu}^{(\alpha-1)}(\xi) - S_{(j-1)N+\nu}^{(\alpha-1)}(\alpha)\beta_{\mathrm{mod}_N(\xi),j}^{(\nu)}(i), & \alpha - 1 \le (j-1)N+\nu; \\ \beta_{\mathrm{mod}_N(\xi),j}^{(\nu)}([\xi / N]+1), & \alpha = (j-1)N+\nu, \ \{\xi / N\} \neq 0; \\ \beta_{\mathrm{mod}_N(\xi),j}^{(\nu)}(i)([\xi / N]), & \alpha = (j-1)N+\nu, \ \{\xi / N\} = 0. \end{cases} \qquad (33)$$

При этом средний квадрат погрешности экстраполяции определяется выражением

$$M[X(i / z^\nu(j), \ \nu = \overline{1,N}, \ j = \overline{1,k}) - m_x^{(k,N)}(1,i)] =$$

$$= M[X^2(i)] - \sum_{j=1}^{k}\sum_{\nu=1}^{N} M[(W_j^{(\nu)})^2](\beta_{1j}^{(\nu)}(i))^2, \ i = \overline{k+1, I}. \qquad (34)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ЭКВИВАЛЕНТНОСТИ

В случае, когда прогнозируемый процесс $X(t)$ и процесс погрешностей измерений $Y(t)$ стационарны, алгоритм прогноза (15) и (32) совпадают.

Для установления связи между $h_j^{(\nu)}(i)$ и $S_{(j-1)N+\nu}^{(kN)}((i-1)N+1)$ рассмотрим подробнее механизм формирования оптимальных значений $h_j^{(\nu)}(i)$.

При использовании для прогноза одного измерения $z(1)$ оптимальное значение коэффициента $h_1^{(1)}(i)$ согласно (16) определяется из выражения

$$h_1^{(1)}(i) = \frac{M[Z(1)X(i)]}{M[Z^2(1)]}.$$

С учетом свойств элементов канонического разложения (17) и соотношения (33) для поиска значений весовых коэффициентов имеем $h_1^{(1)}(i) = \beta_{11}^{(1)}(i) = S_1^{(1)}(i)$.

При использовании для прогноза двух значений: $z(1)$, $z^2(1)$ система уравнений (16) принимает вид

$$\begin{cases} h_1^{(1)}(i)M[Z(1)Z(1)] + h_1^{(2)}(i)M[Z^2(1)Z(1)] = M[Z(1)X(i)], \\ h_1^{(1)}(i)M[Z(1)Z^2(1)] + h_1^{(2)}(i)M[Z^2(1)Z^2(1)] = M[Z^2(1)X(i)]. \end{cases}$$

Используя метод Гаусса, получаем

$$\begin{cases} h_1^{(1)}(i) + h_1^{(2)}(i)\dfrac{M[Z^3(1)]}{M[Z^2(1)]} = \dfrac{M[Z(1)X(i)]}{M[Z^2(1)]}, \\ h_1^{(2)}(i)(M[Z^4(1) - \dfrac{M^2[Z^3(1)]}{M[Z^2(1)]}) = M[Z^2(1)X(i)] - \dfrac{M[Z(1)X(i)]M[Z^3(1)]}{M[Z^2(1)]}. \end{cases} \tag{35}$$

С учетом свойств элементов канонического разложения (17) систему уравнений (35) запишем так:

$$\begin{cases} h_1^{(1)}(i) + h_1^{(2)}(i)\beta_{21}^{(1)}(1) = \beta_{11}^{(1)}(i), \\ h_1^{(2)}(i) = \beta_{11}^{(2)}(i). \end{cases}$$

Из системы вытекают выражения для определения оптимальных значений $h_1^{(1)}(i)$ и $h_1^{(2)}(i)$:

$$h_1^{(1)}(i) = \beta_{11}^{(1)}(i) - \beta_{11}^{(2)}(i)\beta_{21}^{(1)}(1),\ h_1^{(2)}(i) = \beta_{11}^{(2)}(i).$$

Данные выражения, как и в случае использования одного значения $z(1)$ для прогноза, совпадают с выражениями для определения весовых коэффициентов алгоритма (32).

Итак, для $N = 2,\ k = 1,\ h_1^{(1)}(i) = S_1^{(2)}(2i-1),\ h_1^{(2)}(i) = S_2^{(2)}(2i-1)$.

Продолжая рассуждения для возрастающих номеров N и k, несложно убедиться, что для стационарных случайных процессов алгоритм (32) и алгоритм Винера совпадают.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Получен алгоритм определения оптимальных значений полиномиального винеровсого фильтра-экстраполятора для нестационарных случайных процессов, наблюдаемых с погрешностями. Универсальность полученного решения определяется тем, что каноническое разложение (17) существует и точно описывает в точках дискретности любой случайный процесс с конечной дисперсией. Определение оптимальных импульсных переходных функций на основе выражения (33) существенно проще по сравнению с процедурой формирования и решения систем уравнений (16) для большого числа измерений и порядка нелинейности.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Винер Н. Экстраполяция, интерполяция и сглаживание стационарных временных последовательностей с инженерными приложениями. — Нью-Йорк: Дж. Вилей, 1949. — 250 с.
2. Драган Я.П. Модели сигналов в линейных системах. — Киев: Наук. думка, 1972. — 302 с.
3. Кудрицкий В.Д. Атаманюк И.П. Алгоритм определения оптимальных параметров фильтра-экстраполятора Винера для нестационарных случайных процессов, наблюдаемых с погрешностями // Кибернетика и системный анализ. — 1996. — № 3. — С. 183–186.
4. Пугачев В.С. Теория случайных функций и ее применение. — М.: Физматгиз, 1962. — 720 с.
5. Кудрицкий В.Д. Прогнозирование надежности радиоэлектронных устройств. — Киев: Техніка, 1982. — 168 с.
6. Атаманюк И.П. Векторное полиноминальное каноническое разложение случайного процесса // Техническая диагностика и неразрушающий контроль. — 2003. — № 1. — С. 40–43.
7. Атаманюк И.П. Алгоритм экстраполяции нелинейного случайного процесса на базе его канонического разложения // Кибернетика и системный анализ. — 2005. — № 2. — С. 267–273.

Поступила 27.04.2009