



Н.Д. ПАНКРАТОВА, А.Г. ЗРАЖЕВСКИЙ

УДК 681.518.25

**ВОССТАНОВЛЕНИЕ ФУНКЦИОНАЛЬНОЙ
ЗАВИСИМОСТИ ВРЕМЕННЫХ РЯДОВ В СЛУЧАЕ
ЧАСТИЧНОГО ПОКРЫТИЯ КЛАССА
РЕГРЕССОРОВ КОНЕЧНОЙ ε -СЕТЬЮ**

Ключевые слова: *временной ряд, восстановление функциональной зависимости, размерность Ванника–Червоненкиса, равномерная сходимость.*

ВВЕДЕНИЕ

Задачи восстановления функциональных зависимостей и выявления закономерностей по эмпирическим данным широко распространены на практике, поэтому методы их решения постоянно совершенствуются и адаптируются к специфике конкретной предметной области и к особенностям реальных задач [1, 2]. Потребность выявления закономерностей и восстановления функциональных зависимостей по эмпирическим данным имеется также в ряде других практических приложениях, в частности в автоматизированных системах испытаний летательных аппаратов [3], в системах автоматизированного контроля функционирования сложных динамических объектов в реальном времени [4], в системах технического диагностирования [5, 6].

В настоящей статье рассмотрен подход к восстановлению функциональной зависимости для класса нелинейных регрессоров полиномиального вида применительно к практическим задачам различных финансовых требований банков.

1. ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ

Рассматривается временной ряд $\{Y(t), t \in T\}$, который задается своими наблюдениями в фиксированные моменты времени $(y_1, t_1), \dots, (y_l, t_l)$. Задача состоит в определении стохастической модели, которая наилучшим образом описывает исследуемые данные, отвечает внешним требованиям и может быть использована в условиях ограниченного количества эмпирических данных.

Если предположить, что временной ряд не зависит от своих значений в предыдущие моменты времени (независимость эмпирических данных), то простейшей статистической моделью является регрессионное уравнение вида

$$Y(t) = f(t, \alpha) + \varepsilon_t, \quad (1)$$

где ε_t — независимые, одинаково распределенные случайные величины (погрешность), $f(t, \alpha)$ — функция регрессии определенного, изначально заданного класса F , которая задает зависимость временного ряда от времени.

© Н.Д. Панкратова, А.Г. Зражевский, 2011

В рамках модели (1) задача сводится к выбору функции $f^* \in F$, а в параметрическом случае, когда $F = \{f(\cdot, \alpha), \alpha \in \Lambda\}$, — к выбору $\alpha^* \in \Lambda$, при котором уравнение (1) в определенном смысле наилучшим образом описывает распределение эмпирических данных.

В литературе предложены различные методы решения этой проблемы. Примером стандартных методов регрессионного анализа является метод наименьших квадратов для построения оценки параметра $\alpha \in \Lambda$ [7, 8]. Следует заметить, что погрешность оценки модели (1) может быть представлена в виде суммы трех компонент: погрешности неверного выбора класса регрессоров F , погрешности, которая возникает вследствие ограниченности эмпирических данных, и погрешности, которая возникает при применении того или другого метода оценивания. Для уточнения класса F (т.е. минимизации погрешности, вызванной неверным выбором класса регрессоров) в литературе предложены различные критерии, например критерий, построенный на коэффициенте детерминации, критерий Мелозуа, информационные критерии AIC и SBC [7, 8]. Указанные методы основываются на асимптотических свойствах исследуемых статистик, поэтому требуют большого количества данных, что приводит к росту соответствующей погрешности. Кроме того, использование стандартных методов регрессионного анализа может привести к чрезмерной минимизации погрешности метода оценивания и, как следствие, — к переобучению, т.е. к ситуации, когда выбранная модель будет описывать не только существующую зависимость, но и имеющуюся погрешность. Во избежание указанных проблем при выборе регрессоров необходимо рассмотреть не только качества приближения к эмпирическим данным, но и сложность класса функций и соответственно соотношения между ними. Эта идея была реализована в рамках задачи восстановления функциональной зависимости по эмпирическим данным [9–12].

Рассмотрим задачу восстановления регрессионного уравнения (1) по эмпирическим данным, которая в общем случае может быть сформулирована как задача минимизации функционала среднего риска $I(\alpha)$ по эмпирическим данным z_1, \dots, z_l :

$$I(\alpha) \xrightarrow{\alpha} \min, \\ I(\alpha) = Mq(z, \alpha) = \int q(z, \alpha)P(z)dz, \quad (2)$$

где $q(z, \alpha) \in Q$ — функция риска.

В случае восстановления регрессионного уравнения (1) функцией риска можно считать функцию вида $q(z, \alpha) = (Y(t) - f(t, \alpha))^2$. Здесь $z = (Y(t), t)$ — случайная величина с неизвестной плотностью распределения $P(z)$, представленная независимыми реализациями $z_1, \dots, z_l, z_i = (y_i, t_i)$. По этим реализациям необходимо выбрать функцию $f(t, \alpha^*)$ из множества F , которая минимизирует (2). Эту задачу можно решить путем построения эмпирического функционала $I_e(\alpha)$, минимум которого с заданной вероятностью $1 - \eta$ совпадает с минимумом функционала $I(\alpha)$. В качестве такого функционала рассмотрим эмпирический функционал риска

$$I_e(\alpha) = M_l q(z, \alpha) = \frac{1}{l} \sum_{i=1}^l (y_i - f(t_i, \alpha))^2. \quad (3)$$

Из классической теории математической статистики следует, что при достаточно общих условиях, когда $l \rightarrow \infty$, эмпирическое среднее с вероятностью единица совпадает с математическим ожиданием. Однако из этого не следует совпа-

дения минимумов или их близость в некоторой норме. Для решения этой проблемы ставится условие равномерной сходимости по параметру

$$P\left\{\sup_{\alpha} |I(\alpha) - I_e(\alpha)| \geq \kappa\right\} < \eta(l, \kappa), \quad \lim_{l \rightarrow \infty} \eta(l, \kappa) = 0. \quad (4)$$

Легко доказать, что при выполнении условия (4)

$$P\{I(\alpha_e) - I(\alpha_0) \geq 2\kappa\} < \eta,$$

где α_e и α_0 — точки минимумов $I_e(\alpha)$ и $I(\alpha)$ соответственно.

Таким образом, дальнейшее решение задачи восстановления функциональной зависимости связано с определением условий равномерной сходимости (4). Эта задача была решена при различных ограничениях и предположениях относительно класса функций F . В частности, в работе [1] равномерная сходимость исследовалась при условии ограниченности возможных выбросов

$$\sup_{\alpha, z} q(z, \alpha) = \sup_{\alpha, Y, t} (Y(t) - f(t, \alpha))^2 \leq \tau. \quad (5)$$

В работах [1, 9, 11, 12] изучена равномерная сходимость для следующих случаев: множество функций F состоит из конечного числа элементов; F может быть покрыто конечной ε -сетью; F имеет конечную емкость (размерность Вапника-Червоненкиса).

2. УСЛОВИЯ РАВНОМЕРНОЙ СХОДИМОСТИ ЭМПИРИЧЕСКОГО ФУНКЦИОНАЛА РИСКА К ТЕОРЕТИЧЕСКОМУ

2.1. Равномерная сходимость в случае, когда класс функций имеет конечную емкость. Рассмотрим множество разделяющих функций S , т.е. функций, которые отображают X в $\{0, 1\}$. Пусть $\mathbf{x} = (x_1, \dots, x_l)$ — выборка длины l , элементы которой принадлежат X . Обозначим $\Delta_S(\mathbf{x})$ количество классификаций (разделений) \mathbf{x} с помощью S , т.е. количество разных векторов вида $\mathbf{x}^*(s) = (s(x_1), \dots, s(x_l))$ для всех $s \in S$. Очевидно, что для произвольной выборки длины l имеем $\Delta_S(\mathbf{x}) \leq 2^l$. Введем понятие функции роста, как максимально возможного числа классификаций на множестве функций S выборки заданной длины

$$m_S(l) = \max_{\mathbf{x}} \Delta_S(\mathbf{x}), \quad (6)$$

где максимум берется по всем возможным выборкам длины l .

В работе [1] показано, что достаточным условием равномерной сходимости (4) для разделяющих функций является сходимость

$$\lim_{l \rightarrow \infty} \frac{\ln m_S(l)}{l} = 0. \quad (7)$$

Определение 1. Если существует такое h , что при $l > h$ выполняется неравенство $m_S(l) < 1,5 \frac{l^h}{h!}$, то считают, что класс разделяющих функций S имеет конечную емкость h . При выполнении равенства $m_S(l) = 2^l$ емкость является бесконечной.

Очевидно, что для класса разделяющих функций с конечной емкостью условие (7) выполняется.

Эта теория может быть обобщена на случай функций общего вида $Q = \{q(\cdot, \alpha), \alpha \in \Lambda\}$. Для этого вводится класс разделяющих функций

$$\hat{q}(z, \alpha, c) = \theta(q(z, \alpha) + c), \quad q \in Q, \quad c \in R, \quad (8)$$

где $\theta(x) = \begin{cases} 1, & x \geq 0, \\ 0, & x < 0. \end{cases}$

Определение 2. Емкостью класса функций Q называется емкость класса разделяющих функций (8).

Таким образом, чтобы гарантировать равномерную сходимость эмпирического функционала риска (3) к среднему риску (2), достаточно показать, что исследуемый класс функций F имеет конечную емкость. Рассмотрим теорему, которая может быть полезной для решения этой проблемы [10].

Теорема 1. Пусть F — пространство действительных функций, определенных на X . Предположим, что F имеет линейную размерность h . Для произвольной функции $f \in F$ определим $\{0, 1\}$ -значную функцию f_+ на X : $f_+(x) = \theta(f(x))$. Введем класс функций $\text{sgn}(F) = \{f_+, f \in F\}$. Тогда емкость $\text{sgn}(F)$ равна h .

В публикациях известно много результатов, касающихся скорости равномерной сходимости (4) для классов функций F с конечной емкостью при разных дополнительных предположениях [1, 9, 12]. В частности, в работе [1] была доказана следующая теорема.

Теорема 2. Если класс функций $F = \{f(\cdot, \alpha), \alpha \in \Lambda\}$ имеет конечную емкость $h < l$ и выполняется условие (5), то имеет место неравенство

$$P\left\{\sup_{\alpha} |I(\alpha) - I_e(\alpha)| > \tau\kappa\right\} < 9 \frac{(2l)^h}{h!} e^{-\frac{\kappa^2 l}{4}}. \quad (9)$$

Приравнивая правую часть неравенства (9) к η и решая это уравнение относительно κ , получаем двухсторонние оценки функционала (2), т.е. с вероятностью $1 - \eta$ одновременно для всего класса функций $F = \{f(\cdot, \alpha), \alpha \in \Lambda\}$ выполняется неравенство

$$I_e(\alpha) - 2\tau\sqrt{\frac{h\left(\ln\frac{2l}{h} + 1\right) - \ln\frac{\eta}{9}}{l}} < I(\alpha) < I_e(\alpha) + 2\tau\sqrt{\frac{h\left(\ln\frac{2l}{h} + 1\right) - \ln\frac{\eta}{9}}{l}}. \quad (10)$$

2.2. Равномерная сходимость в случае покрытия класса функций конечной ε -сетью. Обоснование равномерной сходимости (4) и задание оценки для функционала среднего риска (2) в случае покрытия класса F конечной ε -сетью рассматривается в следующей теореме [1].

Теорема 3. Пусть множество функций $F = \{f(\cdot, \alpha), \alpha \in \Lambda\}$ покрыто конечной ε -сетью $\{f(\cdot, \alpha_1), f(\cdot, \alpha_2), \dots, f(\cdot, \alpha_{N(\varepsilon)})\}$ и выполняется условие (5). Тогда с вероятностью $1 - \eta$ имеем

$$I(\alpha_e) < I_e(\alpha_i(\alpha_e)) + 2\tau\sqrt{\frac{\ln N(\varepsilon) + \ln l - \ln\frac{\eta}{18}}{l}} + 2\varepsilon\sqrt{\tau}, \quad (11)$$

где $f(t, \alpha_e)$ — функция, которая минимизирует эмпирический риск, $f(t, \alpha_i(\alpha_e))$ — ближайший к функции $f(t, \alpha_e)$ элемент ε -сети.

2.3. Равномерная сходимость в случае частичного покрытия класса функций конечной ε -сетью. В теореме 3 обосновано существование равномерной сходимости, если класс функций F покрыт конечной ε -сетью по параметру α , который в общем случае является вектором. Рассмотрим задачу восстановления

функциональной зависимости в случае частичного покрытия F ε -сетью. Предположим, что $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2)$ и при фиксированном значении α_1 существует конечная ε -сеть для F . В этом случае можно доказать равномерную сходимость и получить оценки для среднего риска, аналогичные тем, которые были получены в теоремах 2 и 3. Докажем следующую теорему.

Теорема 4. Пусть множество функций $F = \{f(t, a, \alpha), t \in (0, 1], a \in \Lambda_a, \alpha \in \Lambda_\alpha\}$ покрыто конечной ε -сетью по параметру $\alpha : \{f(t, a, \alpha_1), f(t, a, \alpha_2), \dots, f(t, a, \alpha_{N(\varepsilon_\alpha)})\}$, а по параметру a (при произвольном фиксированном значении $\alpha \in \Lambda_\alpha$) имеет конечную емкость h . Пусть выполняется условие (5). Тогда имеет место равномерная сходимость (4) и с вероятностью $1 - \eta$ выполняется неравенство

$$I(a_e, \alpha_e) < I_e(a_e, \alpha_i(\alpha_e)) + 2\tau \sqrt{\frac{h \left(\ln \frac{2l}{h} + 1 \right) + \ln n(\varepsilon_\alpha) - \ln \frac{\eta}{9}}{l}} + 2\varepsilon_\alpha \sqrt{\tau}, \quad (12)$$

где функционал $I(a_e, \alpha_e)$ получен на основании (2), $f(t, a_e, \alpha_e)$ — функция, минимизирующая эмпирический функционал (3), $f(t, a_e, \alpha_i(\alpha_e))$ — ближайший к $f(t, a_e, \alpha_e)$ элемент ε -сети.

Доказательство. Поскольку F покрыто конечной ε -сетью по параметру α , то по определению $\forall \alpha \in \Lambda$ существует i^* такое, что $\sup_{a, t} |f(t, a, \alpha) - f(t, a, \alpha_{i^*})| < \varepsilon_\alpha$. Докажем равномерную сходимость в предположении, что параметр α принимает свои значения лишь в вершинах ε -сети. Тогда при условии конечности ε -сети

$$\begin{aligned} P \left\{ \sup_{\alpha, i} |I(a, \alpha_i) - I_e(a, \alpha_i)| > \kappa \right\} &\leq \sum_{i=1}^{n(\varepsilon_\alpha)} P \left\{ \sup_a |I(a, \alpha_i) - I_e(a, \alpha_i)| > \kappa \right\} \leq \\ &\leq n(\varepsilon_\alpha) \sup_i P \left\{ \sup_a |I(a, \alpha_i) - I_e(a, \alpha_i)| > \kappa \right\}. \end{aligned} \quad (13)$$

Предположим, что $F = \{f(t, a, \alpha), t \in (0, 1], a \in \Lambda_a\}$ имеет конечную емкость h при фиксированном значении $\alpha \in \Lambda_\alpha$. Тогда по теореме 2 имеет место равномерная сходимость по параметру a и выполняется неравенство (9). Оценим второй множитель правой части неравенства (13) при некотором фиксированном $\alpha_i, i \in \{1, \dots, n(\varepsilon_\alpha)\}$:

$$P \left\{ \sup_a |I(a, \alpha_i) - I_e(a, \alpha_i)| > \kappa \right\} < 9 \frac{(2l)^h}{h!} e^{-\kappa^2 l / 4\tau^2}.$$

Поскольку правая часть неравенства не зависит от i , то

$$\begin{aligned} P \left\{ \sup_{a, i} |I(a, \alpha_i) - I_e(a, \alpha_i)| > \kappa \right\} &\leq \\ &\leq n(\varepsilon_\alpha) \sup_i P \left\{ \sup_a |I(a, \alpha_i) - I_e(a, \alpha_i)| > \kappa \right\} < n(\varepsilon_\alpha) 9 \frac{(2l)^h}{h!} e^{-\kappa^2 l / 4\tau^2}. \end{aligned}$$

Таким образом, имеет место равномерная сходимость (4). Приравняв правую часть неравенства к η и решив полученное уравнение относительно κ , получим

$$\kappa = 2\tau \sqrt{\frac{h \left(\ln \frac{2l}{h} + 1 \right) + \ln n(\varepsilon_\alpha) - \ln \frac{\eta}{9}}{l}}. \quad (14)$$

Для $\alpha \in \Lambda$ обозначим через $f(t, a, \alpha_i(\alpha))$ ближайший к $f(t, a, \alpha)$ элемент ε -сети.

Используя свойство математического ожидания, выпуклость $(Y(t) - f(t, a, \alpha_i))^2$ и условие (5), получаем

$$\begin{aligned} & |I(a, \alpha) - I(a, \alpha_i(\alpha))| \leq \\ & \leq |M(f(t, a, \alpha) - f(t, a, \alpha_i(\alpha)))(2Y(t) - f(t, a, \alpha) - f(t, a, \alpha_i(\alpha)))| \leq \\ & \leq \varepsilon_\alpha M \sqrt{(2Y(t) - f(t, a, \alpha) - f(t, a, \alpha_i(\alpha)))^2} \leq \varepsilon_\alpha \sqrt{2I(a, \alpha) + 2I(a, \alpha_i(\alpha))} \leq 2\varepsilon_\alpha \sqrt{\tau}. \end{aligned}$$

Тогда с вероятностью $1 - \eta$ качество функции $f(t, a_e, \alpha_e)$, минимизирующей эмпирический риск $I(a_e, \alpha_e)$, оценивается величиной

$$I(a_e, \alpha_e) < I(a_e, \alpha_i(\alpha_e)) + 2\varepsilon_\alpha \sqrt{\tau} < I_e(a_e, \alpha_i(\alpha_e)) + \kappa + 2\varepsilon_\alpha \sqrt{\tau}. \quad (15)$$

Таким образом, имеет место неравенство (12).

Из теоремы 4 вытекает, что задача восстановления функциональной зависимости проводится по следующему алгоритму:

- 1) находим значения параметров функции, которые минимизируют эмпирический риск $(a_e, \alpha_e) = \arg \min I_e(a, \alpha)$;
- 2) определяем $f(t, a_e, \alpha_i(\alpha_e))$ — ближайший к $f(t, a_e, \alpha_e)$ элемента ε -сети;
- 3) вычисляем оценку для среднего риска $I(a_e, \alpha_e)$, используя неравенство (12).

Заметим, что задача минимизации эмпирического риска не всегда является тривиальной; в частности, когда параметр α входит в функцию $f(t, a, \alpha)$ нелинейно. Покажем, что при условиях теоремы 4 эта задача может быть сведена к минимизации риска $I_e(a, \alpha)$ лишь по параметру a , а значение параметра α может быть заменено узловыми значениями ε -сети.

Следствие. При выполнении условий теоремы 4 с вероятностью $1 - \eta$ выполняется неравенство

$$I(a_e, \alpha_e) < \min_{j \in \{1, \dots, n(\varepsilon_\alpha)\}} I_e(a_e(j), \alpha_j) + \kappa + 4\varepsilon_\alpha \sqrt{\tau}, \quad (16)$$

где $a_e(j) = \arg \min_a I_e(a, \alpha_j)$.

Доказательство. Пусть выполняются условия теоремы 4 и имеет место неравенство (12). Обозначим $a_e(j)$ значение параметра $a \in \Lambda_a$, которое минимизирует эмпирический функционал $I_e(a, \alpha_j) \rightarrow \min$ при фиксированном значении α_j , $j \in \{1, \dots, n(\varepsilon_\alpha)\}$. Очевидно, что $\forall j \in \{1, \dots, n(\varepsilon_\alpha)\}$ в силу построения $I_e(a_e, \alpha_e) \leq I_e(a_e(j), \alpha_j)$. Как и ранее, обозначим $f(t, a_e, \alpha_i(\alpha_e))$ ближайший к $f(t, a_e, \alpha_e)$ элемент ε -сети. Тогда

$$\begin{aligned} I_e(a_e, \alpha_i(\alpha_e)) &= I_e(a_e, \alpha_i(\alpha_e)) - I_e(a_e(j), \alpha_j) + I_e(a_e(j), \alpha_j) \leq \\ &\leq I_e(a_e, \alpha_i(\alpha_e)) - I_e(a_e, \alpha_e) + I_e(a_e(j), \alpha_j) \leq 2\varepsilon_\alpha \sqrt{\tau} + I_e(a_e(j), \alpha_j). \end{aligned}$$

Подставив полученную оценку в неравенство (15), получим

$$I(a_e, \alpha_e) < I_e(a_e(j), \alpha_j) + \kappa + 4\varepsilon_\alpha \sqrt{\tau} \quad \forall j \in \{1, \dots, n(\varepsilon_\alpha)\}.$$

Поскольку левая часть полученного неравенства не зависит от j , то имеет место и неравенство (16).

3. МЕТОД УПОРЯДОЧЕННОЙ МИНИМИЗАЦИИ РИСКА

Предположим, что выполняются условия теоремы 4 и соответственно имеет место неравенство (12) (или (16)). Запишем его в следующем виде:

$$I(a_e, \alpha_e) < I_e(a_e, \alpha_i(\alpha_e)) + \Omega_1\left(\frac{l}{h}, -\frac{\ln \eta}{h}, \frac{\ln n(\varepsilon_\alpha)}{l}\right) + \Omega_2(\varepsilon_\alpha). \quad (17)$$

При больших объемах выборок малая величина эмпирического риска (3) гарантирует (с вероятностью $1-\eta$) малую величину среднего риска (2), поскольку второе слагаемое (17) близко к нулю для больших значений l/h , а третье слагаемое можно минимизировать выбором $n(\varepsilon_\alpha)$. Тем не менее, в случаях, когда объем выборки незначителен в сравнении с h , второе слагаемое может существенно отличаться от нуля и поэтому должно учитываться при минимизации правой части (17). Для этого целесообразно использовать метод упорядоченной минимизации риска [1, 12]. Введем на классе функций F структуру вида

$$F_1 \subset F_2 \subset \dots \subset F_\nu, \quad (18)$$

упорядоченную по возрастанию емкостей (при произвольном фиксированном значении $\alpha_i(\alpha_e^j)$): $h_1 < h_2 < \dots < h_\nu$.

Для каждого подкласса функций F_i выполняются условия теоремы 4, а следовательно, с вероятностью $1-\eta$ имеет место неравенство (17)

$$I(a_e^j, \alpha_e^j) < I_e(a_e^j, \alpha_i(\alpha_e^j)) + \Omega_1\left(\frac{l}{h_i}, -\frac{\ln \eta}{h_i}, \frac{\ln n(\varepsilon_\alpha)}{l}\right) + \Omega_2(\varepsilon_\alpha), \quad (19)$$

$$j = 1, \dots, \nu.$$

Отметим, что $f(t, a_e^j, \alpha_e^j)$ — элемент, который минимизирует эмпирический риск в подклассе F_i , $f(t, a_e^j, \alpha_i(\alpha_e^j))$ — ближайший к нему элемент ε -сети.

При фиксированном значении $n(\varepsilon_\alpha)$ первое слагаемое правой части неравенства (19) уменьшается, а второе возрастает с ростом i . Если зафиксировать i (соответственно F_i), то с увеличением $n(\varepsilon_\alpha)$ второе слагаемое возрастает, а третье убывает. Метод упорядоченной минимизации риска состоит в следующем: найти подкласс функций F_i из (18) и шаг ε -сети такие, чтобы функция $f(t, a_e, \alpha_i(\alpha_e))$ (являющаяся ближайшим элементом ε -сети к функции $f(t, a_e, \alpha_e) \in F$ и минимизирующая эмпирический риск) доставляла минимум оценки среднего риска.

4. ПРИМЕР ПРИМЕНЕНИЯ УПОРЯДОЧЕННОЙ МИНИМИЗАЦИИ РИСКА В СЛУЧАЕ ЧАСТИЧНОГО ПОКРЫТИЯ ε -СЕТЬЮ

Рассмотрим задачу восстановления функциональной зависимости (1) в случае, когда класс регрессионных функций F задается следующим образом:

$$F = \{f(t, a, \alpha), t \in [t_0, 1], a \in \Lambda_a, \alpha \in [\underline{\alpha}, \bar{\alpha}]\},$$

$$f(t, a, \alpha) = a_0 + t^\alpha P_n(t) \equiv a_0 + t^\alpha (a_1 + \dots + a_{n+1} t^n),$$

$$a = (a_0, a_1, \dots, a_{n+1}) \in \Lambda_a, n \in \mathbb{N} \cup \{0\}. \quad (20)$$

Введем конечную ε -сеть по параметру α следующим образом: $\alpha_i = \underline{\alpha} + i\Delta$, $i = 0, \dots, n(\varepsilon_\alpha) - 1$, $n(\varepsilon_\alpha) = (\bar{\alpha} - \underline{\alpha}) / \Delta + 1$. Для определения ε_α найдем максимальное расстояние между двумя ближайшими элементами ε -сети:

$$\begin{aligned} & \sup_{\substack{t \in [t_0, 1], a \in \Lambda_a, \\ i=1, \dots, n(\varepsilon_\alpha)}} |f(t, a, \alpha_i) - f(t, a, \alpha_{i-1})| \leq \\ & \leq \sup_{\substack{t \in [t_0, 1], a \in \Lambda_a, \\ i=1, \dots, n(\varepsilon_\alpha)}} \sum_{k=0}^n |a_{k+1}| |t^{\alpha_i+k} - t^{\alpha_{i-1}+k}| \leq A \sup_{\substack{t \in [t_0, 1], \\ i=1, \dots, n(\varepsilon_\alpha)}} \sum_{k=0}^n |t^{\alpha_i+k} - t^{\alpha_{i-1}+k}|, \end{aligned}$$

где $A = \max \left\{ \sup_{a \in \Lambda_a} |a_1|, \dots, \sup_{a \in \Lambda_a} |a_{n+1}| \right\}$.

Для оценки второго слагаемого рассмотрим функцию $g(t) = t^{\alpha_{i-1}+k} - t^{\alpha_i+k}$. Легко показать, что

$$t^* = \left(\frac{\alpha + (i-1)\Delta + k}{\alpha + i\Delta + k} \right)^\Delta = \left(1 - \frac{\Delta}{\alpha + i\Delta + k} \right)^\Delta \in [t_0, 1]$$

является точкой максимума $g(t)$, а следовательно,

$$\begin{aligned} & \sup_{\substack{t \in [t_0, 1] \\ i=1, \dots, n(\varepsilon_\alpha)}} \sum_{k=0}^n |t^{\alpha_i+k} - t^{\alpha_{i-1}+k}| \leq \\ & \leq \sup_{i=1, \dots, n(\varepsilon_\alpha)} \sum_{k=0}^n \left(1 - \frac{\Delta}{\alpha + i\Delta + k} \right)^{\frac{\alpha+i\Delta+k}{\Delta}} \frac{\Delta}{\alpha + (i-1)\Delta + k}. \end{aligned}$$

Каждое слагаемое в правой части неравенства является убывающей функцией по i при фиксированном k , т.е. максимальное значение достигается при $i=1$. Тогда

$$\begin{aligned} & \sup_{i=1, \dots, n(\varepsilon_\alpha)} \sum_{k=0}^n \left(1 - \frac{\Delta}{\alpha + i\Delta + k} \right)^{\frac{\alpha+i\Delta+k}{\Delta}} \frac{\Delta}{\alpha + (i-1)\Delta + k} \leq \\ & < \sum_{k=0}^n \left(1 - \frac{\Delta}{\alpha + \Delta + k} \right)^{\frac{\alpha+\Delta+k}{\Delta}} \frac{\Delta}{\alpha + k}. \end{aligned}$$

Заметим, что $\frac{\alpha + \Delta + k}{\Delta} > 1$ и $\lim_{x \rightarrow \infty} (1 - 1/x)^x = 1/e$. Тогда

$$\sum_{k=0}^n \left(1 - \frac{\Delta}{\alpha + \Delta + k} \right)^{\frac{\alpha+\Delta+k}{\Delta}} \frac{\Delta}{\alpha + k} \leq \frac{\Delta}{e} \sum_{k=0}^n \frac{1}{\alpha + k} = \frac{\Delta}{e} (\psi(\alpha + n + 1) - \psi(\alpha)),$$

где $\psi(z)$ является ψ -функцией.

Положим $\varepsilon_\alpha := A \frac{\Delta}{e} \sum_{k=0}^n \frac{1}{\alpha + k}$. Тогда

$$\sup_{\substack{t \in [t_0, 1], a \in \Lambda_a, \\ i=1, \dots, n(\varepsilon_\alpha)}} |f(t, a, \alpha_i) - f(t, a, \alpha_{i-1})| \leq \varepsilon_\alpha.$$

Для всех $\alpha \in [\underline{\alpha}, \bar{\alpha}]$ положим $i = [(\alpha - \underline{\alpha}) / \Delta]$. Тогда выполняется условие покрытия множества функций F ε -сетью, т.е. $\sup_{t \in [t_0, 1], a \in \Lambda_a} |f(t, a, \alpha) - f(t, a, \alpha_i)| \leq \varepsilon_\alpha$.

Согласно теореме 1 класс функций F , определенных в (20), при фиксированном значении параметра $\alpha \in [\underline{\alpha}, \bar{\alpha}]$ имеет конечную емкость, равную $n+2$. Тогда выполняются условия теоремы 4 и имеет место равномерная сходимость эмпирического функционала риска к среднему. Применим метод упорядоченной минимизации риска для нахождения оценки среднего риска. Как и в разд. 3, введем структуру на классе функций F следующим образом:

$$F_i = \{a_0 + t^\alpha P_j(t), j \in \{0, \dots, i\}, t \in [t_0, 1]\}, i = 1, \dots, \nu.$$

Очевидно, что при фиксированном значении $\alpha \in [\underline{\alpha}, \bar{\alpha}]$ емкость класса F_i равна $i+2$ и имеет место неравенство (16)

$$I(a_e, \alpha_e) < \min_{j \in \{0, \dots, n(\varepsilon_\alpha)-1\}} I_e(a_e(j), \alpha_j) + 2\tau \sqrt{\frac{(i+2)(\ln \frac{2l}{i+2} + 1) + \ln n(\varepsilon_\alpha) - \ln \frac{\eta}{9}}{l}} + 4\varepsilon_\alpha \sqrt{\tau}. \quad (21)$$

Оптимальные значения параметров (a, α) и оценку среднего риска будем находить по следующему алгоритму.

1. Для каждого значения $i = 1, \dots, \nu$ и $n(\varepsilon_\alpha) = \underline{n}, \underline{n}+1, \dots, \bar{n}$ находим следующие функционалы:

$$I_1(i, n(\varepsilon_\alpha)) = \min_{j \in \{0, \dots, n(\varepsilon_\alpha)-1\}} I_e(a_e(j), \alpha_j) = I_e(a_e(j^*(i, n(\varepsilon_\alpha))), \alpha_{j^*(i, n(\varepsilon_\alpha))}),$$

$$I_2(i, n(\varepsilon_\alpha)) = 2\tau \sqrt{\frac{(i+2)(\ln \frac{2l}{i+2} + 1) + \ln n(\varepsilon_\alpha) - \ln \frac{\eta}{9}}{l}},$$

$$I_3(i, n(\varepsilon_\alpha)) = 4\sqrt{\tau} A \frac{\bar{\alpha} - \alpha}{e n(\varepsilon_\alpha)} \sum_{k=0}^i \frac{1}{\underline{\alpha} + k}.$$

2. Выбираем $f(t, a_e(j^*(i^*, n^*)), \alpha_{j^*(i^*, n^*)})$ из условия

$$(i^*, n^*) = \arg \min (I_1(i, n(\varepsilon_\alpha)) + I_2(i, n(\varepsilon_\alpha)) + I_3(i, n(\varepsilon_\alpha))).$$

5. ВОССТАНОВЛЕНИЕ ФУНКЦИОНАЛЬНОЙ ЗАВИСИМОСТИ ВРЕМЕННОГО РЯДА ТРЕБОВАНИЙ БАНКОВ ПО ПРЕДОСТАВЛЕННЫМ КРЕДИТАМ

Рассмотрим восстановление функциональной зависимости временного ряда требований банков по кредитам, предоставленным юридическим лицам в Ивано-Франковской области. В качестве эмпирических данных используем значения этого временного ряда за 12 месяцев 2007 года: 2414.5981, 2561.231, 2784.8212, 3245.1509, 3305.1364, 3707.0809, 3992.2139, 4228.5949, 4291.3338, 4062.083, 3813.1825, 3908.7165 (млн. грн). Будем предполагать, что зависимость временного ряда от времени может быть описана функциями из класса (20). Применим алгоритм разд. 4 для отыскания оценок параметров (a, α) . Пусть $\underline{\alpha} = 0.1$, $\bar{\alpha} = 0.9$, $\underline{n} = 20$, $\bar{n} = 50$, $\nu = 4$. Для всех значений i и $n(\varepsilon_\alpha)$, изменяющихся в указанных пределах, найдем оптимальный (в смысле минимальности эмпирического функционала) узел ε -сети $j^*(i, n(\varepsilon_\alpha))$ и вычислим значения функционалов $I_1(i, n(\varepsilon_\alpha))$, $I_2(i, n(\varepsilon_\alpha))$, $I_3(i, n(\varepsilon_\alpha))$. С помощью метода упорядоченной минимизации риска (разд. 3) определим подкласс F_i (в данном при-

мере i — степень полинома) и размер ε -сети $n(\varepsilon_\alpha)$ (соответственно элемент ε -сети $\alpha_{j^*}^*(i, n(\varepsilon_\alpha))$) такие, чтобы функция $f(t, a_e(j^*(i, n(\varepsilon_\alpha))), \alpha_{j^*}^*(i, n(\varepsilon_\alpha)))$ обеспечивала минимум оценки среднего риска (21). Зависимость суммарной оценки среднего риска $I_1(i, n(\varepsilon_\alpha)) + I_2(i, n(\varepsilon_\alpha)) + I_3(i, n(\varepsilon_\alpha))$ от параметра $m = (\bar{n} - \underline{n} + 1)i + (n - 19)$ приведена на рис. 1, а. Минимум достигается при $m = 81$, что соответствует значениям $i^* = 2$, $n^* = 38$. Узел ε -сети, на котором достигался минимум эмпирического функционала, равен $j^*(i^*, n^*) = 6$.

Как замечено в разд. 3, при фиксированном i с увеличением $n(\varepsilon_\alpha)$ функционал $I_2(i, n(\varepsilon_\alpha))$ возрастает, а $I_3(i, n(\varepsilon_\alpha))$ убывает. При этом их сумма может иметь минимум при некотором $n(\varepsilon_\alpha)$. Функциональная зависимость $I_2(i, n(\varepsilon_\alpha)) + I_3(i, n(\varepsilon_\alpha))$ от $n(\varepsilon_\alpha) \in \{20, \dots, 50\}$ при фиксированном значении $i = 2$ (емкость $h = 4$) приведена на рис. 1, б. Эта функция — выпуклая с аргументом минимума $n^* = 38$. При фиксированном $n(\varepsilon_\alpha)$ функционал $I_1(i, n(\varepsilon_\alpha))$ убывает, а $I_2(i, n(\varepsilon_\alpha))$ возрастает с увеличением i . Функциональная зависимость $I_1(i, n(\varepsilon_\alpha)) + I_2(i, n(\varepsilon_\alpha))$ от емкости класса функций $h = i + 2 \in \{2, \dots, 6\}$ при фиксированном значении размера ε -сети $n(\varepsilon_\alpha) = 38$ приведена на рис. 1, в. Функция является выпуклой с аргументом минимума $i^* = 2$. Таким образом, данные, приведенные на рис. 1, б, в, демонстрируют возможность использования метода упорядоченной минимизации эмпирического риска для отыскания оптимальной функциональной зависимости рассматриваемого временного ряда от времени.

Восстановленная на основании предложенного подхода функциональная зависимость имеет следующий вид:

$$f(t) = 4956.05 - 3052 t^{0.229} + 550.74 t^{1.229} - 2931 t^{2.229}.$$

На рис. 1, г дан график исходных значений временного ряда (сплошная

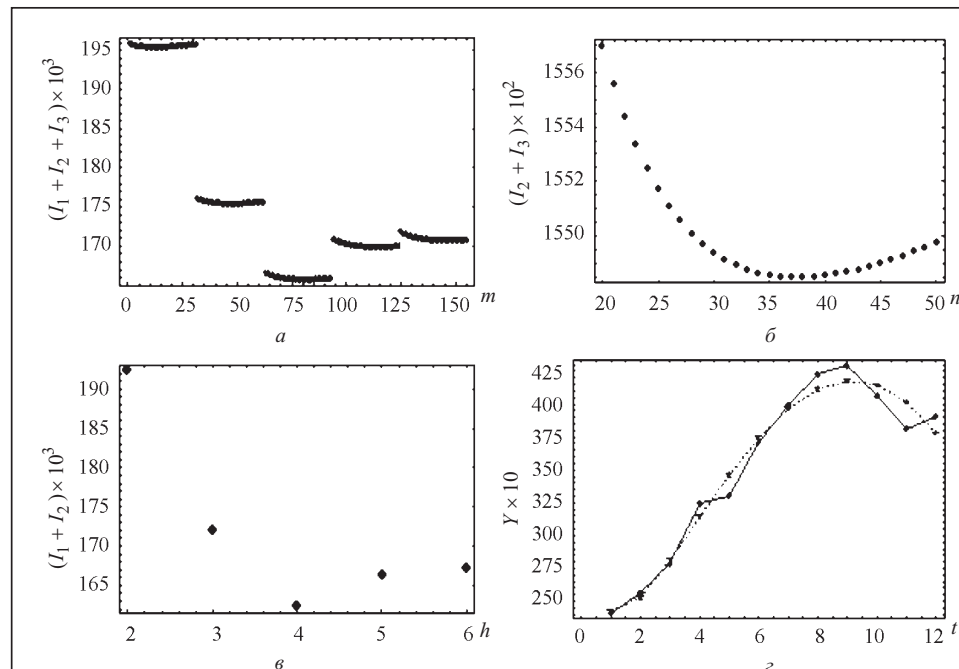


Рис. 1. График восстановления функциональной зависимости временного ряда

кривая), а также восстановленная функциональная зависимость Y (пунктирная кривая) за 12 месяцев. Значение эмпирического функционала риска равно 10928.9. Относительные погрешности (в процентах) смоделированного временного ряда по месяцам: -0.42 , 1.19 , -1.04 , 3.15 , -4.76 , -0.97 , 0.68 , 2.73 , 2.67 , -2.08 , -5.32 , 3.32 .

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Рассмотрена задача восстановления функциональной зависимости по эмпирическим данным. Приведены основные результаты относительно равномерной сходимости эмпирического функционала риска к теоретическому при условии, что класс регрессионных функций имеет конечную емкость или может быть покрыт конечной ε -сетью. Указанные результаты обобщены на случай, когда класс функций по одному из параметров может быть покрыт конечной ε -сетью, а по другим параметрам имеет конечную емкость. Для минимизации погрешности не рационального выбора модели предложено использовать метод упорядоченной минимизации риска. Рассмотрен пример восстановления функциональной зависимости для класса регрессоров полиномиального вида. Разработанная теория применена к временному ряду требований банков по кредитам, предоставленным юридическим лицам в Ивано-Франковской области.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Vapnik V.N. Estimation of dependences based on empirical data. — New York: Springer Verlag, 1982. — 399 p.
2. Васильев В.И., Суворцев И.В. Индуктивные методы обнаружения закономерностей, основанные на теории редукции // Упр. системы и машины. — 1998. — № 5. — С. 3–13.
3. Вертьев С., Егоров А., Золотов А. и др. Семейство систем автоматизации испытаний летательных аппаратов // Мир компьютерной автоматизации. — 1995. — № 1. — С. 68–71.
4. Калашников Ю.В. Представление и использование знаний для автоматизированного контроля функционирования сложных динамических объектов // Зарубеж. радиоэлектроника. — 1992. — № 7. — С. 3–23.
5. Панкратова Н.Д. Рациональный компромисс в системной задаче концептуальной неопределенности // Кибернетика и системный анализ. — 2002. — № 4. — С. 162–180.
6. Панкратова Н.Д. Системная стратегия гарантированной безопасности функционирования сложных технических систем // Там же. — 2010. — № 2. — С. 81–91.
7. Cryer J.D., Chan K. Time series analysis with applications in R. Second edition. — New York: Springer, 2008. — 491 p.
8. Rawlings J., Pantula S., Dickey D. Applied regression analysis — a research too. Second Edition. — New York: Springer Verlag, 1998. — 671 p.
9. Anthony M., Shawe-Taylor J. A result of Vapnik with applications // Discrete Applied Mathematics. — 1993. — N 47(3). — P. 207–217.
10. Anthony M. Discrete mathematics of neural networks: selected topics. — New York: SIAM, 2001. — 131 p.
11. Pollard D. Convergence of stochastic processes. — New York: Springer, 1984. — 215 p.
12. Vapnik V. The nature of statistical learning theory. Second Edition. — New York: Springer Verlag, 2000. — 314 p.

Поступила 15.02.2010