УДК 330:519 (447)

**Б.Ю. КЫШАКЕВИЧ, А.К. ПРИКАРПАТСКИЙ, И.П. ТВЕРДОХЛИБ**

# АНАЛИЗ ОПТИМАЛЬНЫХ СТРАТЕГИЙ КОНКУРЕНЦИОННОЙ ПОРТФЕЛЬНОЙ МОДЕЛИ РЫНКА АКЦИЙ С ПОЛИВАРИАНТНОЙ ФУНКЦИЕЙ ПОЛЕЗНОСТИ

**Ключевые слова:** *рынок акций, портфель акций, функция полезности, конкуренция, марковский процесс, оптимальная стратегия.*

## 1. АНАЛИЗ ОПТИМАЛЬНЫХ СТРАТЕГИЙ КОНКУРЕНЦИОННОЙ ПОРТФЕЛЬНОЙ МОДЕЛИ РЫНКА АКЦИЙ

Известно, что рынок акций, аккумулированных в банковской среде, влияет на эффективность экономики страны. Эта среда в активе своего портфолио может иметь значительное количество пакетов акций разных бизнес-производственных структур, упорядоченных по финансово-экономическим показателям или ценности для потенциальных клиентов-покупателей. В условиях современного цейтнот-биржевого механизма реализации акций, что подразумевает как фиксированный временной интервал, так и ограничение доступа к полной информации об их финансово-экономической ценности, важной с точки зрения клиента-покупателя есть оптимальная стратегия выбора [1, 2] наиболее ценного пакета акций из предложенного банковского портфолио.

Ситуация существенно усложняется, когда конкурируют между собой несколько покупателей, тогда возникает нетривиальная проблема выбора клиентом-покупателем потенциально наиболее ценного пакета акций в пределах портфолио раньше остальных клиентов-покупателей. При этом, как отмечалось выше, цейтнот-биржевой характер такого типа рыночных операций предлагает покупателю акций только динамическую сравнительную информацию об их ценности в процессе выбора, а именно, если клиент-покупатель выбрал для ознакомления какой-нибудь пакет акций с банковского портфолио, то после ознакомления с его базовыми характеристиками он может приобрести его сразу или возвратить запрос обратно в портфолио и начать ознакомление со следующим пакетом акций. Если его характеристика ценности окажется ниже ценностей ранее рассмотренных пакетов, то он сразу переходит к анализу следующего пакета акций и так далее, пока не будет выбран пакет акций с характеристикой ценности выше всех рассмотренных. В этом случае покупатель должен решить, считает ли он данный пакет акций потенциально наиболее ценным из всех возможных и желает его приобрести, или переходит к анализу характеристик ценностей следующих пакетов, учитывая, что объем портфолио конечен и время на их рассмотрение фиксировано. Если же клиентов-покупателей два или больше, то аналогичную стратегию выбора потенциально наиболее ценного пакета акций на основе анализа их относительных характеристик применяет каждый из них, причем выигрывает торги акций тот, который быстрее, т.е. за меньшее число шагов-запросов к базе данных портфеля акций банка, выберет именно потенциально наиболее ценный пакет. Но на процесс выбора накладываются определенные дополнительные ограничения финансового характера, которые оказывают существенное влияние на число шагов-запросов к базе данных портфеля акций. Так, в условиях цейтнот-биржевой процедуры запросов покупателя к базе данных портфеля акций последний обязан уплатить определенную сумму денег, так называемый «штраф» («fee»), за каждый просмотренный и возвращенный обратно в портфолио пакет акций. Если же клиент-покупатель остановился на потенциально наиболее ценном для него пакете акций и выбрал его, то банк как финансовая институция выплачивает ему определенное вознаграждение, так называемый «gift», за успешную финансовую трансакцию, стимулируя клиентов к активному сотрудничеству. Описанная выше конкуренционная модель рынка акций в среде банковского портфолио в условиях цейтнот-биржевой схемы взаимодействия покупателей представляет собой достаточно стандартную ситуацию [1–3] в современном финансово-экономическом пространстве.

Поскольку весь процесс выбора потенциально наиболее ценного пакета акций почти полностью случайный, для его описания естественно использовать теорию случайных процессов, в частности отдельных ее аспектов, касающихся проблем минимаксных стратегий с управляемыми правилами остановок. Одним из вариантов построения достаточно адекватной математической модели описанного выше рыночного процесса и есть предложенное ниже исследование. При анализе оптимальных стратегий конкуренционной портфельной модели рынка акций в банковской среде важной является цейтнот-биржевая проблема выбора для двух и больше клиентов-покупателей пакетов акций, параметризованных определенной функцией полезности. В первом приближении допускается, что клиенты не имеют финансовых ограничений и обладают достаточным капиталом для приобретения любого пакета акций. Если имеется несколько вариантов функции полезности пакетов акции, распределенных независимо в пределах портфолио, то ее анализ представляет значительный интерес для моделирования оптимального поведения клиентов-покупателей, а тем самым и для обеспечения стабильности финансово-экономических процессов.

В предлагаемом исследовании развивается метод ассоциированных марковских процессов для построения оптимальной стратегии поведения двух клиентов-покупателей описанной выше конкуренционной портфельной модели с *a priori* заданными и распределенными независимо одно- и двухвариантной функциями полезности [1, 4, 5] пакетов акций в банковской среде.

**1.1. Предварительные сведения: элементы теории оптимальных остановок.** Пусть $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ — некоторое вероятностное пространство [6–8] с вероятностной мерой $P$ на $\sigma$-алгебре $\mathcal{F}$ подмножеств с $\Omega$, а $x_t \colon \Omega \to \mathcal{H}$ — марковский процесс для $t \in \mathbb{Z}_+$ или $t \in \mathbb{R}_+$. Для простоты будем предполагать, что $\mathcal{H}$ — некоторое дискретное или конечномерное топологическое пространство. Предположим, что на пространстве $\mathcal{H}$ заданы некоторые две функции: $f \colon \mathcal{H} \to \mathbb{R}$, которая интерпретируется как доход в случае остановки процесса, и $c \colon \mathcal{H} \to \mathbb{R}$, которая интерпретируется как плата (или «fee») за очередное наблюдение над процессом. Так если агент наблюдает за траекторией процесса $x_t \colon \Omega \to \mathcal{H}$ в моменты времени $t = \overline{0, n}$ и при $\tau = n \in \mathbb{Z}_+$ решает прекратить наблюдение, то его доход, очевидно, будет равен выражению

$$f(x_n) - \sum_{j=0}^{n-1} c(x_j). \tag{1}$$

Поскольку величина (1) случайная, необходимо рассмотреть ее математическое ожидание и искать такой момент времени $\tau := \tau^* \in \mathbb{Z}_+$, при котором будет выполнено равенство

$$\tau^* = \arg\sup_{\tau} E_{x_0} \{ f(x_\tau) - \sum_{j=0}^{\tau-1} c(x_j) \}. \tag{2}$$

Введем понятие «момента остановки» $\tau \in \mathbb{Z}_+$, которое является «стратегией» [1, 5, 7] агента-наблюдателя. С этой целью на вероятностном пространстве $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ определим неубывающую последовательность $\sigma$-алгебр

$\mathcal{F}_n := \sigma\{x_1, x_2, ..., x_n\}, n \in \mathbb{Z}_+$, где в роли $\mathcal{F}_n$ выступает наименьшая $\sigma$-алгебра, которая содержит всевозможные множества вида $\{\omega : x_i(\omega) \in B, i \in \overline{0, n}\}$, где $B \subset H$ — произвольное борелевское множество.

**Определение 1.** Марковским моментом называется случайная величина $\tau = \tau(\omega)$, значения которой принадлежат множеству $\mathbb{Z}_+$, и такая, что для всякого $n \in \mathbb{Z}_+$

$$\{\omega : \tau(\omega) = n\} \in \mathcal{F}_n. \tag{3}$$

Это условие означает, что решение о прекращении наблюдений в момент времени $n \in \mathbb{Z}_+$ основывается только на результатах наблюдений $\{x_1, x_2, ..., x_n\}$ марковского процесса к моменту $n \in \mathbb{Z}_+$ включительно.

**Определение 2.** Марковский момент $\tau \in \mathbb{Z}_+$, для которого выполняется условие $P\{\tau < \infty\} = 1$ или когда событие $\{\omega \in \Omega : t < \tau(\omega)\} \subset \mathcal{F}_t$ для всех $t \in \mathbb{Z}_+$, называется моментом остановки.

**Определение 3.** Величина

$$V(x_0) := \sup_{\tau} E_{x_0} \left\{ f(x_0) - \sum_{j=0}^{\tau-1} c(x_j) \right\} \tag{4}$$

называется «ценой» проблемы оптимальной остановки.

Рассмотрим ситуацию, когда функция оплаты $c: \mathcal{H} \to \mathbb{R}$ наблюдения над результатом марковского процесса $x_t : \Omega \to \mathcal{H}$ с матрицей переходов $\mathcal{P} := \{p_{ij} : i, j = \overline{0, N}\}$ нулевая, при этом полагаем, что card $\mathcal{H} = N + 1$. Для удобства функцию $f : \mathcal{H} \to \mathbb{R}$ будем считать неотрицательной на $\mathcal{H}$. Введем также для анализа величины (4) так называемый коэффициент «переоценки» $\alpha \in (0, 1]$, который учитывает изменение стоимости наблюдения во времени. Тогда, если агент-наблюдатель использует в качестве своей стратегии марковский момент $\tau \in \mathbb{Z}_+$, его цена оптимальной остановки будет

$$V(x_0) := \sup_{\tau} E_{x_0} \{\alpha^{\tau} f(x_{\tau})\}, \tag{5}$$

поскольку функция $c = 0$. Определим теперь для $i = \overline{0, N}$ операцию

$$(\mathcal{P}f)_i := \sum_{j=0}^{N} p_{ij} f(j), \tag{6}$$

где по определению $f(j) := f(x_{n_j} = j)$ для некоторых $n_j \in \mathbb{Z}_+$, $j \in \mathcal{H} \simeq \{0, 1, \ldots, N\}$. Приведем полезные для дальнейшего изложения определения.

**Определение 4.** Функция $g : \mathcal{H} \to \mathbb{R}_+$ называется эксцессивной, если для всех $x \in \mathcal{H}$

$$g(x) \geq \alpha(\mathcal{P}g)(x). \tag{7}$$

**Определение 5.** Эксцессивная функция $g: \mathcal{H} \to \mathbb{R}_+$ называется эксцессивной мажорантой функции $f: \mathcal{H} \to \mathbb{R}_+$, если для всех $x \in \mathcal{H}$

$$g(x) \geq f(x). \tag{8}$$

Имеет место [1, 5] следующая лемма.

**Лемма 1 .** Если $g: \mathcal{H} \to \mathbb{R}_+$ — эксцессивная функция и $\tau \in \mathbb{Z}_+$ — марковский момент, то для всех $\alpha \in (0, 1]$, $x \in \mathcal{H}$ имеем

$$g(x) \geq \alpha(\mathcal{P}g)(x). \tag{9}$$

**Доказательство.** Пусть $h := g - \alpha \mathcal{P} g$ и $\alpha \in (0,1)$. Тогда $h(x) \geq 0$ для всех $x \in H$, поскольку с условия (7) следует, что

$$g(x) \geq \alpha (\mathcal{P} g)(x). \tag{10}$$

Записывая теперь выражения $h := g - \alpha \mathcal{P} g$ в виде

$$g := h + \alpha \mathcal{P} g, \tag{11}$$

легко получаем, что

$$g := h + \alpha \mathcal{P} h + \alpha^2 \mathcal{P}^2 h + \ldots + \alpha^n \mathcal{P}^n h + ..., \tag{12}$$

$n \in Z_+$, причем ряд (12) сходится при условии $\alpha \in (0,1)$. Кроме того, так как математическое ожидание

$$E_i \{h(x_n)\} = \sum_{j=0}^{N} \overline{p}_{ij}^{(n)} h(j), \tag{13}$$

где $\mathcal{P}^n := \{\overline{p}_{ij}^{(n)} : i, j = \overline{0, N}\}$, выражение (11) можно переписать как

$$g(x) = E_x \left\{ \sum_{n=0}^{\infty} \alpha^n h(x_n) \right\}. \tag{14}$$

Теперь можно вычислить математическое ожидание

$$E_x \alpha^\tau g(x_\tau) = E_x \left\{ \alpha^\tau E_{x_\tau} \left\{ \sum_{n=0}^{\infty} \alpha^n h(x_n) \right\} \right\} = E_x \left\{ \sum_{n=0}^{\infty} \alpha^{\tau+n} h(x_{\tau+n}) \right\}. \tag{15}$$

Сравнивая выражение (15) с (14), делаем вывод, что

$$g(x) \geq \alpha (\mathcal{P} g)(x) \tag{16}$$

для всех $x \in \mathcal{H}$ и $\alpha \in (0,1)$. Переходя к границе $\alpha \to 1$ в (16), получаем, что неравенство (9) справедливо и для $\alpha = 1$, что и доказывает лемму.

Следующее утверждение [5] для дальнейшего анализа определяющее.

**Теорема 1**. Функция цены (5) есть наименьшая эксцессивная мажорантная функция $f : \mathcal{H} \to \mathbb{R}_+$.

**Доказательство**. Заметим, что из определения (5) сразу следует, что цена $V : \mathcal{H} \to \mathbb{R}_+$ — эксцессивная мажоранта функции $f : \mathcal{H} \to \mathbb{R}_+$. Действительно, поскольку $V(x) = \sup_\tau E_x \{\alpha^\tau f(x_\tau)\}$, то для произвольного $\varepsilon > 0$ существует марковский момент $\tau_\varepsilon \in \mathbb{Z}_+$ такой, что

$$E_x \{\alpha^{\tau_\varepsilon} f(x_{\tau_\varepsilon})\} > V(x) - \varepsilon, \tag{17}$$

причем значение $x \in \mathcal{H}$ фиксировано. Так как card $\mathcal{H} = N + 1$ — конечная величина, неравенство (17) имеет место и для всех $x \in \mathcal{H}$. Вычислим теперь математическое ожидание

$$E_x \{\alpha^{\tau'} f(\tau')\} = \sum_{j=1}^{N} p_{x,j} E_j \{\alpha^{1+\tau_\varepsilon} f(x_\tau)\} \geq \alpha \sum_{j=1}^{N} p_{x,j} V(j) - \alpha\varepsilon, \tag{18}$$

где $\tau' := 1 + \tau_\varepsilon \in \mathbb{Z}_+$. Из неравенства (18) следует, что

$$V(x) \geq E_x \{\alpha^{\tau'} f(\tau')\} \geq \alpha (\mathcal{P} V)(x) - \alpha\varepsilon \tag{19}$$

для произвольного $\varepsilon > 0$. Переходя в (19) к границе $\varepsilon \to 0$, получаем, что $V(x) \ge \alpha(\mathcal{P}V)(x)$ для всех $x \in \mathcal{H}$, т.е. эксцессивность функции цены $V: \mathcal{H} \to \mathbb{R}_+$.

Теперь на основании леммы 1 для произвольного марковского момента $\tau \in \mathbb{Z}_+$ имеем такие неравенства:

$$g(x) \ge E_x \{\alpha^\tau g(x_\tau)\} \ge E_x \{\alpha^\tau f(x_\tau)\} \tag{20}$$

для всех $x \in \mathcal{H}$. Применяя к (20) операцию супремум по $\tau \in \mathbb{Z}_+$, получаем, что

$$g(x) \ge \sup_\tau E_x \{\alpha^\tau f(x_\tau)\} = V(x)$$

для всех $x \in \mathcal{H}$, что и доказывает теорему.

Для практического вычисления цены выбора $V: \mathcal{H} \to \mathbb{R}_+$ используется критерий, который сформулируем как следующую теорему.

**Теорема 2.** Цена оптимального выбора $V: \mathcal{H} \to \mathbb{R}_+$ является наименьшим решением уравнения

$$V(x) = \max\{f(x), \alpha(\mathcal{P}V)(x)\} \tag{21}$$

для всех $x \in \mathcal{H}$ и $\alpha \in (0,1]$.

**Доказательство** . Исходя из выражения (21), определим оператор $Q_\alpha$, который для каждого $x \in \mathcal{H}$ действует на функцию $y: \mathcal{H} \to \mathbb{R}_+$ как

$$(Q_\alpha y)(x) := \max\{f(x), \alpha(\mathcal{P}y)(x)\}\,. \tag{22}$$

Легко заметить, что имеют место неравенства

$$y(x) \le (Q_\alpha y)(x) \le \ldots \le (Q_\alpha^n y)(x) \tag{23}$$

для всех $x \in \mathcal{H}$. Рассмотрим предел

$$\widetilde{V}(x) := \lim_{n \to \infty} (Q_\alpha^n f)(x) \tag{24}$$

и покажем, что функция (24) удовлетворяет уравнению (21). Действительно, так как

$$(Q_\alpha^n f)(x) = \max\{f(x), \alpha(\mathcal{P}Q_\alpha^{n-1} f)(x)\} \tag{25}$$

для всех $n \in \mathbb{Z}_+$, то, переходя к границе при $n \to \infty$, получаем результат (21). А поскольку каждое решение уравнения (21) — эксцессивная мажоранта, то и решение (24) является такой же функцией. Осталось показать, что она наименьшая эксцессивная мажоранта функции $f: \mathcal{H} \to \mathbb{R}_+$. Действительно, на основании неравенства (21) и определения операции $Q_\alpha$ легко получить, что для всех $x \in \mathcal{H}$ имеем

$$\lim_{n \to \infty} (Q_\alpha^n g)(x) = g(x)\,. \tag{26}$$

Так как $g(x) \ge f(x)$ для $x \in \mathcal{H}$, то $(Q_\alpha^n g)(x) \ge (Q_\alpha^n f)(x)$ для всех $n \in \mathbb{Z}_+$. Переходя в последнем неравенстве к границе при $n \to \infty$, получаем, что

$$g(x) \ge \lim_{n \to \infty} (Q_\alpha^n f)(x) = \widetilde{V}(x) \tag{27}$$

для всех $x \in \mathcal{H}$, т.е. решение (24) — наименьшая эксцессивная мажоранта функции $f: \mathcal{H} \to \mathbb{R}_+$. Итак, $V(x) = \widetilde{V}(x)$, $x \in \mathcal{H}$, что доказывает теорему.

Основываясь на свойствах решения (24) задачи (21), устанавливается [5, 7, 8] справедливость такого утверждения.

**Теорема 3.** Марковский момент $\tau^* \in H$, определенный условием (2) как момент первого попадания процесса $x_t : \Omega \to \mathcal{H}$, $t \in \mathbb{Z}_+$, во множество $\Gamma_+ := \{x \in \mathcal{H}: V(x) = f(x)\}$, оптимальный. В частности, $\lim\limits_{n \to \infty} P_x\{\tau^* > n\} = 0$, а также $E_x\{\alpha^{\tau_n} V(x_{\tau_n})\} = V(x)$ для всех $x \in \mathcal{H}$, где $\tau_n := \min(\tau^*, n)$, $n \in \mathbb{Z}_+$.

Рассмотрим теперь случай, когда плата за наблюдение $c: \mathcal{H} \to \mathbb{R}_+$ ненулевая. Тогда функция цены выбора имеет вид

$$V_\alpha(x) := \sup_\tau E_x \left\{ \alpha^\tau f(x_\tau) - \sum_{i=0}^{\tau-1} \alpha^i c(x_i) \right\}, \tag{28}$$

где $x \in \mathcal{H}$ и $\alpha \in (0,1]$. По аналогии с определением 4 дадим следующее определение [5].

**Определение 6.** Функция $g: \mathcal{H} \to \mathbb{R}_+$ называется эксцессивной, если

$$g(x) \ge \alpha(\mathcal{P}g)(x) - c(x) \tag{29}$$

для всех $x \in \mathcal{H}$.

Отсюда запишем

$$f_\alpha(x) := E_x \left\{ \sum_{i=0}^{\infty} \alpha^i c(x_i) \right\}, \tag{30}$$

где $\alpha \in (0,1)$ и $x \in \mathcal{H}$. Легко заметить, что цена выбора (28) для всех $x \in \mathcal{H}$ имеет такое представление:

$$V_\alpha(x) := \sup_\tau E_x\{\alpha^\tau [f(x_\tau) + f_\alpha(x_\tau)]\} - f_\alpha(x). \tag{31}$$

Это значит, что задача оптимальной остановки с ненулевой платой $c: \mathcal{H} \to \mathbb{R}_+$ сводится к аналогичной задаче с нулевой платой за наблюдение, а именно к задаче

$$\overline{V}_\alpha(x) = \sup_\tau E_x\{\alpha^\tau [f(x) + f_\alpha(x_\tau)]\} \tag{32}$$

для $x \in \mathcal{H}$, которую решает уравнение

$$\overline{V}_\alpha(x) = \max\{f(x) + f_\alpha(x), \alpha(\mathcal{P}\overline{V}_\alpha)(x)\}. \tag{33}$$

Соответствующим оптимальным марковским моментом является момент $\tau^* \in \mathcal{H}_+$ первого попадания во множество $\Gamma_+ := \{x \in \mathcal{H}: \overline{V}_\alpha(x) = f(x) + f_\alpha(x)\}$, причем очевидно, что $\Gamma_+ = \{x \in \mathcal{H}: V_\alpha(x) = f(x)\}$. Результат, сформулированный выше, имеет место только при $\alpha \in (0,1)$. Если же $\alpha = 1$, функция $f_\alpha: \mathcal{H} \to \mathbb{R}_+$ может быть неопределенной, в связи с чем появляется необходимость поиска иного, более адекватного метода нахождения решения задачи (28).

Пусть тепер $\alpha = 1$, рассмотрим степени $\mathcal{P}^m$ матрицы переходных вероятностей $\mathcal{P}$ при $m \to \infty$. Тогда по эргодической теореме А.А. Маркова [1, 6] имеет место следующее асимптотическое равенство: $\mathcal{P}^m = \mathcal{S} + h^m \mathcal{R}_m$, где $|h| < 1$ и для всех $m \in Z_+$ величина $\sup\limits_{m \in \mathbb{Z}_+} \|R_m\| < \bar{r}$, а матрица $S \in \mathrm{Hom}(\mathbb{R}^{N+1})$ составлена ровно из $N+1 \in \mathbb{Z}_+$ одинаковых вектор-строк $q^{\mathrm{T}} \in \mathbb{R}^{N+1_+}$ граничных вероятностей. Таким образом, цена выбора (28) при $\alpha = 1$ и стратегии выбора $\tau = n \in \mathbb{Z}_+$ составляет

$$E_x\{f(x_\tau)-\sum_{i=0}^{\tau-1}c(x_i)\}=f(x_n)-c(x)-\sum_{j=1}^{N}p_{x,j}c_j-$$
$$-\sum_{j=1}^{N}p_{x,j}^{(n-1)}c_j=f(x_n)-n\langle q,c\rangle-\sum_{j=1}^{N}r_{x,j}c_j\,, \tag{34}$$

где $\langle\cdot,\cdot\rangle$ — обычное скалярное произведение в пространстве $\mathbb{R}^{N+1}$. Как следствие выражения (34), видим, что при $\langle q,c\rangle<0$ цену выбора можно сделать сколь угодно большой, не останавливая процесс наблюдения. Если же $\langle q,c\rangle\ge 0$, то ситуация отличается от предыдущей, и можно показать [4], что величина (30) для $\alpha\in(\alpha_0,1)$ и некоторого $\alpha_0\in(0,1)$ ограниченная и положительная. Согласно монотонности действия оператора (22) вида $Q_{\beta_1}(x)\le Q_{\beta_2}(x)$ для всех $x\in\mathcal{H}$ и $\beta_1\le\beta_2\in(0,1)$ существует последовательность $\{\alpha_n\in(0,1):\ \ n\in\mathbb{Z}_+\}$ такая, что $\lim\limits_{n\to\infty}\alpha_n=1$ и $\lim\limits_{n\to\infty}V_{\alpha_n}(x^*)=f(x^*)$ для некоторого состояния $x^*\in\mathcal{H}$. При условии $\operatorname{card}\mathcal{H}=N+1<\infty$ существует, очевидно, также граница $\lim\limits_{n\to\infty}V_{\alpha_n}(x)=f(x)$ для каждого $x\in\mathcal{H}$. Таким образом, множество

$$\Gamma_+:=\{x\in\mathcal{H}\colon V(x)=f(x)\} \tag{35}$$

непустое при выполнении необходимого условия $\langle q,c\rangle\ge 0$. Последнее означает оптимальность стратегии $\tau^*\in\mathcal{H}$ первого попадания наблюдений агента во множество $\Gamma_+$.

Для того чтобы сформулировать конечное утверждение для случая $\alpha=1$, разобьем предварительно фазовое пространство $\mathcal{H}$ состояний марковского процесса $x_t\colon\Omega\to\mathcal{H}$, $t\in\mathbb{Z}_+$, на подмножество несущественных состояний $\mathcal{H}_0\subset\mathcal{H}$ и на классы $\{\mathcal{H}_i\subset\mathcal{H}\colon i=\overline{1,m_N}\}$ существенных состояний с нетривиальными переходными вероятностями. Тогда каждому существенному классу $\mathcal{H}_i\subset\mathcal{H}$, $i=\overline{1,m_N}$, соответствуют вектор граничных вероятностей $q_i\in\mathbb{R}^{N+1}$ и вектор $c_i\in\mathbb{R}^{N+1}$, для которых имеет место такое утверждение.

**Теорема 4.** Если для некоторого $i\in\{1,m_{\overline{N}}\}$ величина $\langle q_i,c_i\rangle\ge 0$, то оптимальной стратегией будет марковский момент $\tau^*\in\mathcal{H}$ первого попадания во множество $\Gamma_+$ вида (35). Несущественные состояния $x\in\mathcal{H}_0$, с которых достижимо хотя бы одно множество $\mathcal{H}_l\subset\mathcal{H}$, для которого $\langle q_l,c_l\rangle<0$, принадлежат фактически подмножеству $\mathcal{H}_0\setminus\Gamma_+$.

В следующем разделе проанализируем конкуренционную портфельную модель рынка акций с моновариантной функцией полезности, функция цены которой определяется конструктивным методом вместе с ассоциированным марковским процессом.

## 2. МАТЕМАТИЧЕСКОЕ ОПИСАНИЕ КОНКУРЕНЦИОННОЙ ПОРТФЕЛЬНОЙ МОДЕЛИ РЫНКА АКЦИЙ С МОНОВАРИАНТНОЙ ФУНКЦИЕЙ ПОЛЕЗНОСТИ

**2.1. Описание модели.** Пусть $(\Omega,\mathcal{F},\mathcal{P})$ — некоторое вероятностное пространство [1, 9], т.е. множество $\Omega$ элементарных событий с выделенной $\sigma$-алгеброй $\mathcal{F}$ его подмножеств с вероятностной мерой $P$, определенной на подмножествах из $\mathcal{F}$. Зададим на пространстве $\Omega$ определенный дискретный марковский [8, 10] процесс $x\colon\mathbb{Z}_+\times\Omega\to\mathcal{H}$ со значениями в некотором топологическом пространстве $\mathcal{H}$. Для каждого $t\in\mathbb{Z}_+$ величина $x_t(\omega)\in\mathcal{H}$ случайная, а множество $\{x_t(\omega)\in\mathcal{H}\colon t\in\mathbb{Z}_+\}$ представляет собой виртуальную траекторию возможных состояний процесса.

Предположим теперь, что существует возрастающее семейство $\sigma$-алгебр $\{\mathcal{F}_t \subset \mathcal{F} : t \in \mathbb{Z}_+\}$ такое, что

$$\mathcal{F}_s \subset \mathcal{F}_t \subset \mathcal{F} \tag{36}$$

для всех $t > s \in \mathbb{Z}_+$. Тогда процесс $x : \mathbb{Z}_+ \times \Omega \to \mathcal{H}$ назовем адаптированным к семейству $\{\mathcal{F}_t \subset \mathcal{F} : t \in \mathbb{Z}_+\}$, если отображения $x_t : \Omega \to \mathcal{H}$ $\mathcal{F}_t$-измеримы для каждого $t \in \mathbb{Z}_+$. Касательно процесса $x : \mathbb{Z}_+ \times \Omega \to \mathcal{H}$ вводится важное понятие марковского момента остановки [7, 8] как такого отображения $\tau : \Omega \to \mathbb{Z}_+$, при котором событие $\{\omega \in \Omega : t < \tau(\omega)\} \subset \mathcal{F}_t$ для всех $t \in \mathbb{Z}_+$.

Рассмотрим произвольное отображение $f : \mathcal{H} \to \mathbb{R}$ и найдем математическое ожидание [8, 9] процесса $f(x_t) : \Omega \to \mathbb{R}$ относительно $\sigma$-алгебры $\mathcal{F}_s \subset \mathcal{F}$, которое обозначим $E_s(f(x_t)) := E\{(f(x_t) \mid \mathcal{F}_s\}$, $t > s \in \mathbb{Z}_+$. Тогда по определению имеем

$$\int_{A \in \mathcal{F}_s} E_s(f(x_t)) dP_s := \int_{A \in \mathcal{F}_s \subset \mathcal{F}} f(x_t) dP \tag{37}$$

для всех подмножеств $A \in \mathcal{F}_s$, где $dP_s$ на $\mathcal{F}_s$ определяется как индуцированная мера $i_s^* dP$ относительно отображения вложения $i_s : \mathcal{F}_s \to \mathcal{F}$, $s \in \mathbb{Z}_+$. В частности если определить математическое ожидание $E_s(x_t)$ процесса $x_t : \Omega \to \mathcal{H}$ для $t > s \in \mathbb{Z}_+$ и окажется, что $E_s(x_t) = x_s$, то такой процесс называют [1, 9] мартингалом.

Пусть теперь $f : \mathcal{H} \to \mathbb{R}_+$ означает некоторое отображение, характеризующее степень полезности выбора элемента $x \in \mathcal{H}$, который в данном случае моделирует базу пакетов акций банковского портфеля. Тогда функция

$$V(a) := \sup_{\tau} E_a(f(x_t)), \tag{38}$$

где супремум берется по всем возможным марковским моментам остановки процесса $x_t : \Omega \to \mathcal{H}$, $t \in \mathbb{Z}_+$, при условии, что $x_0 = a \in \mathcal{H}$, и называется ценой задачи оптимальной остановки нашего случайного процесса, и в частности, может быть ценой выбора клиентом-покупателем наиболее ценного пакета акций с банковского портфеля в цейтнот-биржевой ситуации рынка акций. Относительно данной конкуренционной модели рынка акций в среде банковского портфолио необходимо сконструировать для каждого клиента-покупателя соответствующую функцию цены оптимального выбора [1, 11] наиболее ценного пакета акций, исходя из описанных выше цейтнот-биржевых условий этого процесса.

Предположим, что есть только два клиента-покупателя, конкурирующих между собой во время процессов выбора наиболее ценного для них пакета акций из предложенного портфолио с конечным числом $N \in \mathbb{Z}_+$ элементов. Все пакеты акций $A_i, i = \overline{1, N}$, пронумеруем так, что

$$W(A_1) < W(A_2) < \ldots < W(A_N), \tag{39}$$

где $W(A_i), i = \overline{1, N}$, — некоторая качественная функция ценности пакетов акций, конкретное выражение которой для нас несущественно. Вероятностное пространство $\Omega$ состоит, очевидно, из всевозможных перестановок $\omega := \{\omega_1, \omega_2, \ldots, \omega_N\}$ набора чисел $\{1, 2, \ldots, N\}$, причем предполагаем, что все они равновероятны, поскольку в условиях цейтнот-биржевой рыночной ситуации предыдущая априорная информация не может играть существенную роль. Таким образом, процесс выбора в $n$-й раз клиентами-покупателями пакета акций $\omega_n$, $n=\overline{1,N}$, обозначим $X_n^{(p)}(\omega)=\omega_n$, $p=\overline{1,2}$, а $\tau_p(\omega)\in\mathcal{H}:=\{0,\ 1,\ 2,\ \ldots$ $\ldots, N\}$, $p=\overline{1,2}$, — моменты остановки процессов, результатом которых будут наибольшие значения математических ожиданий соответствующих функций цены выбора пакета акций. Процесс выбора наиболее ценного пакета акций $A_N$, который неявно несет номер $N$, существенно усложняется тем, что после $n=\overline{1,N}$ выбранных и возвращенных в портфолио пакетов акций $(X_1^{(p)}, X_2^{(p)}, \ldots, X_n^{(p)})$, $p=\overline{1,2}$, клиент-покупатель не обладает информацией касательно их истинных a priori приписанных значений ценности, а может фиксировать в процессе выбора лишь их относительное расположение, т.е. $X_i^{(p)} < X_j^{(p)}$, если $W(A_i)<W(A_j)$, $i\neq j\leq n$, $p=\overline{1,2}$. В связи с этим естественно предложить семейства $\sigma$-алгебр событий $F_n^{(p)}, n=\overline{1,N}$, $p=\overline{1,2}$, порожденных событиями вида $(X_i^{(p)} < X_j^{(p)}, i\neq j\leq n):=\mathcal{F}_n^{(p)}$, причем $\mathcal{F}_1^{(p)}:=\{\varnothing,\ \Omega\}$, $p=\overline{1,2}$, и определить два набора новых характеристических случайных величин, учитывая описанные ранее конкуренционные процессы выбора наиболее ценного пакета акций. А именно, пусть математические ожидания

$$V_{\tau_1}^{(1)}(\tau_2):=c_\alpha E\{1_{\{X_{\tau_1}^{(1)}=N,\, X_{\tau_2}^{(2)}\neq N\}}+1_{\{X_{\tau_1}^{(1)}=N,\, X_{\tau_2}^{(2)}=N,\, \tau_1<\tau_2\}}\}-$$
$$-\alpha\sum_{k=1}^{\tau_1-1}(k/N^2)\,E\{1_{\{X_k^{(1)}\neq N,\, X_{\tau_2}^{(2)}\neq N\}}+1_{\{X_k^{(1)}\neq N,\, X_{\tau_2}^{(2)}=N,\, k<\tau_2\}}\}, \tag{40}$$

а также

$$V_{\tau_2}^{(1)}(\tau_1):=c_\alpha E\{1_{\{X_{\tau_2}^{(2)}=N,\, X_{\tau_1}^{(1)}\neq N\}}+1_{\{X_{\tau_2}^{(2)}=N,\, X_{\tau_1}^{(1)}=N,\, \tau_2<\tau_1\}}\}-$$
$$-\alpha\sum_{k=1}^{\tau_2-1}(k/N^2)\,E\{1_{\{X_k^{(2)}\neq N,\, X_{\tau_1}^{(1)}\neq N\}}+1_{\{X_k^{(2)}\neq N,\, X_{\tau_1}^{(1)}=N,\, k<\tau_1\}}\} \tag{41}$$

означают соответствующие функции цены процесса выбора наиболее желанного пакета акций для обоих клиентов-покупателей, где $c_\alpha>0$ — фиксированный параметр банковского поощрения («gift») клиента-покупателя за выполненную трансакцию покупки пакета акций из портфолио, $\alpha\in(0,1)$ — соответствующий коэффициент «штрафа» («fee») за каждый отказ от покупки предварительно выбранного для просмотра пакета акций, а $\tau_1,\tau_2\in\mathcal{H}$ — соответствующие марковские моменты остановки процессов. Заметим, что в предыдущих выражениях конкретизировано наказание клиентов за отказ покупки рассмотренного пакета акций: штраф за $k$-е возвращение пакета в портфель равен $k\alpha/N^2$. Поскольку процессы выбора для каждого клиента-покупателя аналогичны, достаточно рассмотреть детальнее только первую проблему выбора наиболее ценного пакета акций из следующих двух:

$$\arg\sup\nolimits_{\tau_1} V_{\tau_1}^{(1)}(\tau_2)=\tau_1^*,$$
$$\arg\sup\nolimits_{\tau_2} V_{\tau_2}^{(2)}(\tau_1)=\tau_2^*. \tag{42}$$

Для решения экстремальных проблем (42) применим метод ассоциированных марковских процессов для нахождения марковских моментов остановки процесса выбора.

**2.2. Ассоциированный марковский процесс.** Рассмотрим последовательность функций цены выбора наиболее ценного пакета акций первым клиентом-покупателем:

$$V_n^{(1)}(\tau_2) := c_\alpha(P\{X_n^{(1)} = N, X_{\tau_2}^{(2)} \neq N\} + P\{X_n^{(1)} = N,\ X_{\tau_2}^{(2)} = N, n < \tau_2\}) -$$

$$-\alpha \sum_{k=1}^{n-1} (k / N^2)(P\{X_k^{(1)} \neq N, X_{\tau_2}^{(2)} \neq N\} + P\{X_k^{(1)} \neq N, X_{\tau_2}^{(2)} = N,\ k < \tau_2\}), \quad (43)$$

где $n = \overline{1, \tau_1}$, $\alpha \in (0,1), c_\alpha > 0$. При этом предполагается, что второй клиент-покупатель при выборе наиболее ценного пакета акций тоже придерживается наиболее оптимальной (так называемой «пороговой») стратегии с марковским моментом остановки $\tau_2(l) > l$ при условии, что марковский момент остановки первого покупателя — $\tau_1(l) = l \in \mathcal{H}$. Для конкретизации стратегии выбора наиболее ценного пакета акций первым клиентом-покупателем вычислим соответствующие вероятности (43), учитывая семейства ассоциированных $\sigma$-алгебр $\mathcal{F}_n^{(p)}$, $n = \overline{1, \tau_1}$, $p = \overline{1,2}$:

$$V_n^{(1)}(\tau_2) = c_\alpha P\{X_n^{(1)} = N \mid F_n^{(1)}\}[P\{X_{\tau_2}^{(2)} \neq N\} + P\{X_{\tau_2}^{(2)} = N, n < \tau_2\}] -$$

$$-\alpha \sum_{k=1}^{n-1} \frac{k}{N^2} P\{X_k^{(1)} \neq N\}[P\{X_{\tau_2}^{(2)} \neq N\} + P\{X_{\tau_2}^{(2)} = N, k < \tau_2\}]. \quad (44)$$

Отметим, что для $n = \overline{1, \tau_1}$ условной вероятностью будет

$$P\{X_n^{(1)} = N \mid F_n^{(1)}\} = P\{X_n^{(1)} = N \colon X_n^{(1)} > \max(X_1^{(1)},\ X_2^{(1)}, .., X_{n-1}^{(1)})\} =$$

$$= P\{X_n^{(1)} = N\} \,/\, P\{X_n^{(1)} > \max(X_1^{(1)}, X_2^{(1)}, .., X_{n-1}^{(1)})\} =$$

$$= \frac{1}{N} \,/\, (\frac{(n-1)!}{n!}) 1_{\{X_n^{(1)} > \max(X_1^{(1)},\ X_2^{(1)},\ ...,\ X_{n-1}^{(1)})\}}, \quad (45)$$

а для каждого $k = \overline{1, n}$ имеем

$$P\{X_{\tau_2}^{(2)} = N, k < \tau_2\} + P\{X_{\tau_2}^{(2)} \neq N, n < \tau_2\} =$$

$$= 1 - P\{X_{\tau_2}^{(2)} = N, \tau_2 \leq k\}. \quad (46)$$

Таким образом, функция цены выбора (44) для первого клиента-покупателя принимает для $n = \overline{1, \tau_1}$ такой вид:

$$V_n^{(1)}(\tau_2) = \frac{c_\alpha n}{N}(1 - P\{X_{\tau_2}^{(2)} = N, \tau_2 \leq n\}) -$$

$$- \frac{\alpha(N-1)}{N} \sum_{k=1}^{n-1} \frac{k}{N^2}(1 - P\{X_{\tau_2}^{(2)} = N, \tau_2 \leq k\}). \quad (47)$$

Для вычисления вероятностей $P\{X_{\tau_2}^{(2)} = N, \tau_2 \leq k\}$, $k = \overline{1, n}$, в выражении (47) необходимо рассмотреть ассоциированные с процессами выбора клиентами-покупателями наиболее ценного пакета акций такие случайные последовательности марковских моментов остановки:

$$x_n^{(s)} := \min\{t > x_{n-1}^{(s)} \colon X_t > \max(X_{t-1}, ..., X_1)\}, \quad (48)$$

где $x_n^{(s)} \in \mathcal{H},\ s = \overline{1, 2}$, — момент выбора очередного кандидата на покупку наиболее ценного пакета акций соответствующим покупателем.

Случайные последовательности (48) являются определяющими для функции цены (47). Их основные свойства характеризуются [12] следующей леммой.

**Лемма 2.** Последовательности $x_n^{(s)} \in \mathcal{H}$, $n=\overline{1,N}$, $s=\overline{1,2}$, вида (48) являются дискретными цепями Маркова на фазовом пространстве $\mathcal{H}$ с переходными вероятностями

$$p_{ij}^{(s)} = \begin{cases} \dfrac{i}{j(j-1)}, & 0 \le i < j; \quad 0, \quad i \ge j \ge 0; \\ 1, & i=0, j=1; \quad 0, \quad i=0, j>1; \\ \dfrac{i}{N}, & j=0; \quad 0, \quad i \ge j > 0, \end{cases} \tag{49}$$

для всех $i, j=\overline{0,N}$, $s=\overline{1,2}$, где введено дополнительное состояние $\{0\}$ обрыва последовательностей, в которое попадает процесс после окончательного выбора наиболее ценного пакета акций.

Пусть $\hat{\tau}_s \in \mathcal{H}$, $s=\overline{1,2}$, — оптимальные моменты остановки последовательностей (48). Тогда имеют место следующие соотношения согласованности:

$$\tau_s = x_{\hat{\tau}_s}, \tag{50}$$

где $s=\overline{1,2}$. Рассмотрим теперь марковскую последовательность вида (48) и ассоциированное с последовательностью функции цены (47) следующее разложение фазового пространства $\mathcal{H}=\mathcal{H}_+ \oplus \mathcal{H}_-$ в прямую сумму подпространств:

$$\mathcal{H}_+ := \{j \in \mathcal{H} : (\mathcal{P}V^{(1)}(\tau_2))_j > V_j^{(1)}(\tau_2)\}, \tag{51}$$
$$\mathcal{H}_- := \{j \in \mathcal{H} : (\mathcal{P}V^{(1)}(\tau_2))_j \le V_j^{(1)}(\tau_2)\},$$

где $\mathcal{P} := \{p_{ij}^{(1)} : i, j=\overline{0,N}\}$ — матрица переходных вероятностей (49) первого клиента-покупателя. Тогда справедлива [4] следующая теорема.

**Теорема 5.** Пусть матрица $\mathcal{P}$ переходных вероятностей (49) такая, что $p_{ij}^{(1)}=0$ для всех $i \in \mathcal{H}_+$ и $j \in \mathcal{H}_-$. Тогда момент $\hat{\tau}_1 \in \mathcal{H}$ первого попадания случайной последовательности $\{x_n^{(1)} : n=\overline{0,N}\}$ во множество $\mathcal{H}_-$ оптимальный для последовательности функции цены $\{V_n^{(1)}(\tau_2) : n=\overline{0,N}\}$.

Для дальнейшего использования теоремы 5 найдем в выражении (47) вероятности $P\{X_{\tau_2}^2=N, \tau_2 \le k\}$ для всех $k=\overline{0,N}$ при условии, что $\tau_1(l) = x_{\hat{\tau}_1}^{(1)}(l) := l \in \mathcal{H}$. Тогда если $k=\overline{1,l-1}$, вероятность

$$P\{X_{\tau_2}^{(2)}=N, \tau_2 \le k\} = P\{X_{\tau_2(l)}^{(2)}=N, \tau_2(l) \le k\} = 0, \tag{52}$$

поскольку $\tau_2(l) \ge l$, и если $k=\overline{l,N}$, то

$$P\{X_{\tau_2(l)}^{(2)}=N, \tau_2(l) \le k\} = \sum_{j=l}^{k} P\{X_{\tau_2(l)}^{(2)}=N, \tau_2(l) \le j\} =$$
$$= \sum_{j=l}^{k} P\{X_{\tau_2(l)}^{(2)}=N \mid \tau_2(l)=j\} P\{\tau_2(l)=j\} =$$
$$= \sum_{j=l}^{k} P\{X_j^{(2)}=N : X_j^{(1)} > \max(X_1^{(2)}, X_2^{(2)}, \ldots, X_{j-1}^{(2)})\} P\{\tau_2(l)=j\} = \tag{53}$$
$$= \sum_{j=l}^{k} P\{\tau_2(l)=j\} \frac{j}{N}.$$

Для определения вероятности $P\{\tau_2(l)=j : j\in H\}$ воспользуемся [2, 5, 6] прямым уравнением Колмогорова:

$$P\{\tau_2(l)=j\}=\begin{cases}1, & j=1;\\ \sum_{i=1}^{j-1}P\{x^{(2)}_{\hat{\tau}_2(l)}=i\}\,p^{(2)}_{ij}, & j=\overline{2,l-1};\\ \sum_{i=1}^{l-1}P\{x^{(2)}_{\hat{\tau}_2(l)}=i\}\,p^{(2)}_{ij}, & j=\overline{l,N}.\end{cases} \tag{54}$$

Из (54) можно получить

$$P\{\tau_2(l)=j\}=\begin{cases}\frac{1}{j}, & j=\overline{1,l-1},\\ \dfrac{l-1}{j(j-1)}, & j=\overline{l,N}.\end{cases} \tag{55}$$

Используя результаты (55) и (53), для $k=\overline{l,N}$ находим, что

$$P\{X^{(2)}_{\tau_2(l)}=N,\tau_2(l)\le k\}=\sum_{j=l}^{k}\frac{l-1}{N(j-1)}\,. \tag{56}$$

Подставляя результат (56) в (47), получаем окончательное выражение для функции цены выбора для первого клиента-покупателя:

$$V_n^{(1)}(\tau_2)=c_\alpha n(1-\frac{l-1}{N}\sum_{j=l}^{n}\frac{1}{j-1})-\frac{\alpha(N-1)}{N}\sum_{k=1}^{l-1}\frac{k}{N^2}-$$

$$-\frac{\alpha(N-1)}{N}\sum_{k=l}^{n-1}\frac{k}{N^2}-\frac{\alpha(N-1)}{N}\sum_{k=l}^{n}\frac{k}{N^2}\left(1-\frac{l-1}{N}\sum_{j=l}^{k}\frac{1}{j-1}\right)=$$

$$=c_\alpha n\left(1-\frac{l-1}{N}\sum_{j=l}^{n}\frac{1}{j-1}\right)-\frac{\alpha(N-1)\,n\,(n+1)}{2N^3}+\frac{\alpha(N-1)(l-1)}{N^2}\sum_{k=l}^{n}\frac{k}{N^2}\sum_{j=l}^{k}\frac{1}{j-1} \tag{57}$$

для всех $n=\overline{1,N}$. Теперь для решения первого уравнения в (42) достаточно найти $\tau_1^*=\arg V^{(1)}_{\tau_1}(\tau_2)\in\mathcal{H}$, воспользовавшись теоремой 5. Таким образом, полученная последовательность (57) оптимального выбора наиболее ценного пакета акций первым клиентом-покупателем должна быть остановлена в момент $\tau_1(l)=l=x^{(1)}_{\hat{\tau}_1(l)}\in\mathcal{H}$, который можно найти, решив определяющие неравенства

$$(\mathcal{P}V^{(1)}(\tau_2))_{l-1}>V_{l-1}(\tau_2)\,, \tag{58}$$

$$(\mathcal{P}V^{(1)}(\tau_2))_{l}\le V_l^{(1)}(\tau_2)\,.$$

Пусть теперь $l\in\mathcal{H}$ удовлетворяет неравенствам (58). Тогда имеет место следующая лемма.

**Лемма 3.** Последовательность (57) при условии, что поощрительный коэффициент $c_\alpha\ge\alpha/2>0$ допускает следущее разложение фазового пространства $\mathcal{H}=\mathcal{H}_+\oplus\mathcal{H}_-$, где

$$\mathcal{H}_+=\{\overline{1,l-1}\}\,,\ \mathcal{H}_-=\{\overline{l,N}\}\,. \tag{59}$$

Как следствие из утверждений леммы 3, получаем, что величина $\tau_1(l) = l \in \mathcal{H}$, которая решает неравенства (58), представляет собой оптимальную стратегию выбора наиболее ценного пакета акций первым клиентом-покупателем. Очевидно также, что согласно симметрии нашей конкуренционной проблемы выбора такой же должна быть и стратегия поведения второго клиента-покупателя при выборе наиболее ценного пакета акций из банковского портфолио.

**2.3. Асимптотический анализ.** Определяющее уравнение процесса выбора наиболее ценного пакета акций первым клиентом-покупателем согласно оптимальной стратегии (58) имеет вид

$$c_\alpha - \frac{\alpha(N-1)(l+1)}{2N^3} + \frac{\alpha(N-1)}{N^2} = c_\alpha\left(\sum_{j=l-1}^{N-1}\frac{i}{j} - \frac{(l-1)}{N}\sum_{j=l}^{N-1}\frac{1}{j}\sum_{k=l-1}^{j}\frac{1}{k}\right) -$$

$$-\frac{\alpha l(N-1)}{2N^3}\sum_{j=l+1}^{N}\frac{j+1}{j-1} + \frac{\alpha(N-1)l(l-1)}{N^2}\sum_{j=l+1}^{N}\frac{1}{j(j-1)}\sum_{k=l}^{j}\frac{k}{N^2}\sum_{j=1}^{k}\frac{1}{j-1}. \tag{60}$$

Для упрощения и более эффективного анализа алгебраического уравнения (60) допустим, что портфолио банка содержит достаточно большое число $N \in \mathbb{Z}_+$ пакетов акций. Тем самым касательно оптимальной стратегии выбора первым клиентом-покупателем его момент остановки $\tau_1(l) := l(N) \in \mathcal{H}$ будет удовлетворять асимптотическому условию $\lim\limits_{N\to\infty} l(N)/N := z \in (0,1)$. Учитывая это условие, с помощью асимптотического анализа [13, 14] находим, что алгебраическое соотношение (60) при $N \to \infty$ переходит в следующее трансцендентное уравнение для определения параметра остановки $z^* \in (0,1)$:

$$c_\alpha(1 + \ln z + \frac{z}{2}\ln^2 z) + \frac{\alpha}{2} z(1-z) = \frac{\alpha}{2} z^2[\ln z + \frac{1}{2}(1-z)(3-z)]. \tag{61}$$

Решение $z^* \in (0,1)$ существенно зависит от выбора банковских параметров $\alpha, c_\alpha \in \mathbb{R}_+$, значения которых имеют естественное ограничение, исходя из априорной положительности функции цены (57), а именно, легко заметить, что должно выполняться неравенство

$$c_\alpha - \alpha/2 \geq 0. \tag{62}$$

Если принять условие наименьшего риска для потерь банком-продавцом акций, то самым оптимальным будет выбор $c_\alpha = \alpha/2$. В этом случае определяющее уравнение (61) приобретает инвариантный вид относительно ставки «штрафа» $\alpha > 0$ за неосуществленную трансакцию покупки потенциально наилучшего пакета акций клиентом-покупателем:

$$1 + \ln z + \frac{z}{2}\ln^2 z + z(1-z) = z^2[\ln z + \frac{1}{2}(1-z)(3-z)). \tag{63}$$

Трансцендентное уравнение (63), как легко убедиться [15], имеет только один действительный корень $z^* \simeq 0{,}2375 \in (0,1)$. Следовательно, можно сформулировать следующую стратегию поведения: при достаточно больших значеннях числа $N \in \mathbb{Z}_+$ пакетов акций в портфолио банка оптимальной стратегией поведения первого клиента-покупателя при выборе наиболее ценного пакета акций будет просмотр на относительную сравнительную ценность $l = z^* N \in \mathbb{Z}_+$ акций, а затем выбор первого из последующего ряда отобранных пакетов акций, ценность которого превышает все ранее просмотренные.

Отметим, что исследованная модель — несколько упрощенная версия цейтнот-биржевого конкуренционного поведения клиентов-покупателей пакетов акций при условии отсутствия априорной информации о качественных характеристиках банковского портфолио. Кроме того, мы также сознательно допускали, что каждый клиент-покупатель владеет достаточным финансовым капиталом для приобретения любого пакета акций из предложенного банковского портфолио. Если же имеются явные ограничения на финансовые средства покупателей относительно цены предлагаемых банком пакетов акций, или же несколько параметров их качества, то соответствующие оптимальные стратегии поведения клиентов-покупателей существенно усложняются, что анализируется в следующем разделе.

## 3. МАТЕМАТИЧЕСКИЙ АНАЛИЗ КОНКУРЕНЦИОННОЙ МОДЕЛИ РЫНКА АКЦИЙ С БИВАРИАНТНОЙ ФУНКЦИЕЙ ПОЛЕЗНОСТИ

**3.1. Описание модели.** За основу берем математическую модель банковского портфеля и процесса выбора клиентом-покупателем пакета акций, рассмотренную выше и описанную в работе [15]. Будем считать, что два клиента-покупателя конкурируют между собой при выборе наиболее ценного пакета акций с конечным, но достаточно большим объемом $N \in \mathbb{Z}_+$ портфолио. Все пакеты акций $A_i, u = \overline{1, n}$, a priori пронумерованы так [16], что

$$W_1(A_1) < W_1(A_2) < \ldots < W_1(A_N), \; W_2(A_{\sigma(1)}) < W_2(A_{\sigma(2)}) < \ldots < W_2(A_{\sigma(N)}), \tag{64}$$

где $\{W_i(A_j): j = \overline{1, N}\}$, $i = \overline{1, 2}$, — соответствующие наборы качественных величин полезности пакетов акций, значения которых распределены независимо в пределах заданного портфолио, т.е. перестановка $\sigma \in S_N$ упорядоченного набора чисел $\{1, 2 \ldots, N\}$ полностью случайная. Вероятностное пространство $\Omega$ состоит из всевозможных пар перестановок $\{\omega_1, \ldots, \omega_N\} \times \{\sigma(\omega_1), \ldots, \sigma(\omega_N)\}$ набора чисел $\{1, 2 \; \ldots, N\}$, причем считается, что все они равновероятны. Таким образом, событие $n$-го просмотра-запроса клиентами-покупателями пакета акций из портфолио $\{A_k : k = \overline{1, N}\}$ обозначим $\Omega_n^{(s)} := (X_n^{(s)}(\omega), Y_n^{(s)}(\omega)) \in \{1, 2, \ldots, N^{(x)} := N\} \times$ $\times \{\sigma(1), \sigma(2), \ldots, \sigma(N^{(y)}) := N\}$, $s = \overline{1, 2}$, а $\tau_s(\omega) \in \mathcal{H} := \{0, 1, 2, .., N\}, s = \overline{1, 2}$, — моменты остановки марковского процесса выбора самого ценного пакета акций клиентами-покупателями, при которых значения математических ожиданий соответствующих функций цены выбора наибольшие. Функцию цены выбора для первого клиента-покупателя принимают в следующей форме:

$$\begin{aligned}
&V_{\tau_1}^{(1)}(\tau_2) \\
&= c_\alpha [E\{1_{\{\Omega_{\tau_1}^{(1)} = (N^{(x)}, N^{(y)}), \Omega_{\tau_2}^{(2)} \neq (N^{(x)}, N^{(y)}) \vee \Omega_{\tau_1}^{(1)} = (\sigma^{-1}(N^{(x)}), N^{(y)}), \Omega_{\tau_2}^{(2)} \neq (\sigma^{-1}(N^{(x)}), N^{(y)})\}}\} + \\
&+ E\{1_{\{\Omega_{\tau_1}^{(1)} = (N^{(x)}, N^{(y)}), \Omega_{\tau_2}^{(2)} = (N^{(x)}, N^{(y)}), \tau_1 < \tau_2 \vee \Omega_{\tau_1}^{(1)} = (\sigma^{-1}(N^{(x)}), N^{(y)}), \Omega_{\tau_2}^{(2)} = (\sigma^{-1}(N^{(x)}), N^{(y)}), \tau_1 < \tau_2\}}\}] - \\
&- \alpha \sum_{k=1}^{\tau_1 - 1} \frac{k}{N^2} [E\{1_{\{\Omega_{\tau_1}^{(1)} \neq (N^{(x)}, N^{(y)}), \Omega_{\tau_2}^{(2)} \neq (N^{(x)}, N^{(y)}) \vee \Omega_k^{(1)} \neq (\sigma^{-1}(N^{(x)}), N^{(y)}), \Omega_{\tau_2}^{(2)} \neq (\sigma^{-1}(N^{(x)}), N^{(y)})\}}\} + \\
&+ E\{1_{\{\Omega_k^{(1)} \neq (N^{(x)}, N^{(y)}), \Omega_{\tau_2}^{(2)} \neq (N^{(x)}, N^{(y)}), k < \tau_2 \vee \Omega_k^{(1)} \neq (\sigma^{-1}(N^x), N^y), \Omega_{\tau_2}^{(2)} = (\sigma^{-1}(N^{(x)}), N^{(y)}), k < \tau_2\}}\}],
\end{aligned} \tag{65}$$

где $c_\alpha > 0$ — соответствующий банковский «gift»-коэффициент, а $\alpha > 0$ — соответствующий коэффициент «штрафа» («fee») за невыполненную трансакцию покупки-продажи пакета акций. Функцию цены выбора для второго клиента получаем аналогично. Чтобы вычислить, например, величину

$$\tau_1^* := \arg \sup_{\tau_1 \in \mathcal{H}} V_{\tau_1}^{(1)}(\tau_2), \tag{66}$$

характеризующую самую оптимальную стратегию выбора наиболее ценного пакета акций первым клиентом-покупателем, необходимо построить [1, 5, 15] базисные ассоциированные марковские последовательности

$$x_{n+1}^{(s)} := \min\{t > x_n^{(s)} : X_t^{(s)} > \max(X_{t-1}^{(s)}, \ldots, X_1^{(s)}) \vee (Y_t^{(s)} > \max(Y_{t-1}^{(s)}, \ldots, Y_1^{(s)})\}, \tag{67}$$

где величины $x_n^{(s)} \in \mathcal{H}$, $n = \overline{1, N}$, $s = \overline{1, 2}$, обозначают моменты выбора наиболее ценного пакета акций соответствующими клиентами-покупателями. Марковские последовательности (67) описываются с помощью [1, 4, 5] следующей леммы, результат которой получается на основе прямых вычислений.

**Лемма 4.** Целочисленные последовательности (67) являются дискретными цепями Маркова на фазовом пространстве $\mathcal{H}$ с переходными вероятностями

$$p_{ij}^{(s)} = \begin{cases} \dfrac{[2j(j-1) - i]i^2}{j^2(j-1)^2(2i-1)}, \ 1 \le i < j; \ 0, \ i \ge j \ge 0; \\ 1, \ i = 0, \ j = 1; \ 0, \ i = 0, \ j > 1; \\ 1 - \displaystyle\sum_{k=i+1}^{N} \dfrac{[2k(k-1) - i]i^2}{k^2(k-1)^2(2i-1)}, \ j = 0, \end{cases} \tag{68}$$

для $s = \overline{1, 2}$ и $i, j \in \mathcal{H}$.

Следовательно, сконструировано две марковские последовательности (67), ассоциированные с процессом выбора клиентами-покупателями наиболее ценного пакета акций, и с помощью которых можно вычислить величину параметра стратегии (66), используя соответствующий критерий, а именно, имеет место [4] следующая теорема.

**Теорема 6.** Пусть матрица $\mathcal{P} := \{p_{ij}^{(1)} : i, j \in \mathcal{H}\}$ переходных вероятностей такая, что $p_{ij}^{(1)} = 0$ для всех $i \in \mathcal{H}_+, j \in \mathcal{H}_-$, где

$$\mathcal{H}_+ := \{j \in \mathcal{H} : (\mathcal{P}V^{(1)}(\tau_2))_j > V_j^{(1)}(\tau_2)\},$$
$$\mathcal{H}_- := \{j \in \mathcal{H} : (\mathcal{P}V^{(1)}(\tau_2))_j \le V_j^{(1)}(\tau_2)\}. \tag{69}$$

Тогда соответствующая марковская последовательность (67) для оптимального выбора наиболее ценного пакета акций первым клиентом-покупателем должна быть остановлена в момент $\tau_1(l) = l = x_{\hat{\tau}_{1(l)}}^{(1)} \in \mathcal{H}$, который можно найти, решив определяющие неравенства (69).

Соответствующая функция цены выбора пакета акций в (69) описывается таким выражением:

$$V_n^{(1)}(\tau_2) = c_\alpha [P\{X_n^{(1)} = N^{(x)}, X_{\tau_2}^{(2)} \ne N^{(x)} \vee Y_n^{(1)} = N^{(y)}, Y_{\tau_2}^{(2)} \ne N^{(y)}\} +$$

$$+ P\{X_n^{(1)} = N^{(x)}, X_{\tau_2}^{(2)} = N^{(x)}, n < \tau_2 \vee Y_n^{(1)} = N^{(y)}, Y^{(2)} \ne N^{(y)}\} +$$

$$+P\{X_n^{(1)}=N^{(x)},\, X_{\tau_2}^{(2)}\ne N^{(x)},\, n<\tau_2 \vee Y_n^{(1)}=N^{(y)},\, Y_{\tau_2}^{(2)}=N^{(y)},\, n<\tau_2\}+$$

$$+P\{X_n^{(1)}=N^{(x)},\, X_{\tau_2}^{(2)}=N^{(x)},\, n<\tau_2 \vee Y_n^{(1)}=N^{(y)}, Y_{\tau_2}^{(2)}=N^{(y)},\, n<\tau_2\}]-$$

$$-\alpha\sum_{k=1}^{n-1}\frac{k}{N^2}[P\{X_k^{(1)}\ne N^{(x)},\, X_{\tau_2}^{(2)}\ne N^{(x)} \wedge Y_k^{(1)}\ne N^{(y)}, Y_{\tau_2}^{(2)}\ne N^{(y)},\, n<\tau_2\}+$$

$$+P\{X_k^{(1)}\ne N^{(x)},\, X_{\tau_2}^{(2)}\ne N^{(x)} \wedge Y_k^{(1)}\ne N^{(y)}, Y_{\tau_2}^{(2)}=N^{(y)},\, k<\tau_2\}]+$$

$$+P\{X_k^{(1)}\ne N^{(x)},\, X_{\tau_2}^{(2)}=N^{(x)},\, k<\tau_2 \wedge Y_k^{(1)}\ne N^{(y)}, Y_{\tau_2}^{(2)}\ne N^{(y)}\}+$$

$$+P\{X_k^{(1)}\ne N^{(x)},\, X_{\tau_2}^{(2)}=N^{(x)},\, k<\tau_2 \wedge Y_k^{(1)}\ne N^{(y)}, Y_{\tau_2}^{(2)}=N^{(y)},\, k<\tau_2\}], \quad (70)$$

при этом банковский gift-параметр $c_\alpha>0$ выбирается из необходимого условия $V_n^{(1)}(\tau_2)>0$ для всех $n=\overline{1,n}$. Таким образом, вычислив величину функции (70) цены выбора наиболее ценного пакета акций первым клиентом-покупателем на основе теоремы 6, необходимо исследовать структуру множеств чисел $\mathcal{H}_+$ и $\mathcal{H}_-$ по отношению к переходным вероятностям (68), что составляет предмет исследования следующего подраздела.

**3.2. Ассоциированные марковские процессы и структурный анализ модели.** Учитывая структуру семейств независимых ассоциированных $\sigma$-алгебр $\{F_n^{(s)}, n=\overline{1,\tau_1}\}, s=\overline{1,2}$, перепишем выражение (70) в такой форме:

$$V_n^{(1)}(\tau_2)=c_\alpha[P\{X_n^{(1)}=N^{(x)},\, X_{\tau_2}^{(2)}\ne N^{(x)}\}+P\{Y_n^{(1)}=N^{(y)}, Y_{\tau_2}^{(2)}\ne N^{(y)}\}-$$

$$-P\{X_n^{(1)}=N^{(x)},\, X_{\tau_2}^{(2)}\ne N^{(x)}\}\, P\{Y_n^{(1)}=N^{(y)}, Y_{\tau_2}^{(2)}\ne N^{(y)}\}+$$

$$+P\{X_n^{(1)}=N^{(x)},\, X_{\tau_2}^{(2)}=N^{(x)},\, n<\tau_2\}+P\{Y_n^{(1)}=N^{(y)}, Y^{(2)}\ne N^{(y)}\}-$$

$$-P\{X_n^{(1)}=N^{(x)}, X_{\tau_2}^{(2)}=N^{(x)},\, n<\tau_2\}\, P\{Y_n^{(1)}=N^{(y)}, Y^{(2)}\ne N^{(y)}\}+$$

$$+P\{X_n^{(1)}=N^{(x)},\, X_{\tau_2}^{(2)}\ne N^{(x)}\}+P\{Y_n^{(1)}=N^{(y)},\, Y_{\tau_2}^{(2)}=N^{(y)},\, n<\tau_2\}-$$

$$-P\{X_n^{(1)}=N^{(x)},\, X_{\tau_2}^{(2)}\ne N^{(x)}\}P\{Y_n^{(1)}=N^{(y)}, Y_{\tau_2}^{(2)}=N^{(y)},\, n<\tau_2\}+$$

$$+P\{X_n^{(1)}=N^{(x)},\, X_{\tau_2}^{(2)}=N^{(x)},\, n<\tau_2\}+P\{Y_n^{(1)}=N^{(y)}, Y_{\tau_2}^{(2)}=N^{(y)},\, n<\tau_2\}-$$

$$-P\{X_n^{(1)}=N^{(x)},\, X_{\tau_2}^{(2)}=N^{(x)},\, n<\tau_2\}\, P\{Y_n^{(1)}=N^{(y)}, Y_{\tau_2}^{(2)}=N^{(y)},\, n<\tau_2\}]-$$

$$-\alpha\sum_{k=1}^{n-1}\frac{k}{N^2}[P\{X_k^{(1)}\ne N^{(x)}, X_{\tau_2}^{(2)}\ne N^{(x)}\}\, P\{Y_k^{(1)}\ne N^{(y)}, Y_{\tau_2}^{(2)}\ne N^{(y)}\}+ \quad (71)$$

$$+P\{X_k^{(1)}\ne N^{(x)},\, X_{\tau_2}^{(2)}\ne N^{(x)}\}\, P\{Y_k^{(1)}\ne N^{(y)}, Y_{\tau_2}^{(2)}=N^{(y)},\, k<\tau_2\}+$$

$$+P\{X_k^{(1)}\ne N^{(x)},\, X_{\tau_2}^{(2)}=N^{(x)},\, k<\tau_2\}\, P\{Y_k^{(1)}\ne N^{(y)}, Y_{\tau_2}^{(2)}\ne N^{(y)}\}+$$

$$+P\{X_k^{(1)}\ne N^{(x)},\, X_{\tau_2}^{(2)}=N^{(x)},\, k<\tau_2\}\, P\{Y_k^{(1)}\ne N^{(y)}, Y_{\tau_2}^{(2)}=N^{(y)},\, k<\tau_2\}].$$

При получении (71) мы воспользовались тем, что соответствующие результаты наблюдений по двум параметрам полезности распределены независимо. Основываясь теперь на результатах работы [15], перепишем выражение (71):

$$
\begin{aligned}
V_n^{(1)}(\tau_2) \; &= c_\alpha \{2P\{X_n^{(1)} = N^{(x)} | \mathcal{F}_n^{(1)} \vee \mathcal{F}_n^{(2)}\} [P\{X_{\tau_2}^{(2)} \neq N^{(x)}\} + \\
&+ P\{X_{\tau_2}^{(2)} = N^{(x)}, n < \tau_2\}] + 2P\{Y_n^{(1)} = N^{(y)} | \mathcal{F}_n^{(1)} \vee \mathcal{F}_n^{(2)}\} \times \\
&\times [P\{Y_{\tau_2}^{(2)} \neq N^{(y)}\} + P\{Y_{\tau_2}^{(2)} = N^{(y)}, n < \tau_2\}] - \\
&- P\{X_n^{(1)} = N^{(x)} | \mathcal{F}_n^{(1)} \vee \mathcal{F}_n^{(2)}\} P\{Y_n^{(1)} = N^{(y)} | \mathcal{F}_n^{(1)} \vee \mathcal{F}_n^{(2)}\} \times \\
&\times [P\{X_{\tau_2}^{(2)} \neq N^{(x)}\} + P\{X_{\tau_2}^{(2)} = N^{(x)}, n < \tau_2\}] \times \\
&\times [P\{Y_{\tau_2}^{(2)} \neq N^{(y)}\} + P\{Y_{\tau_2}^{(2)} = N^{(y)}, n < \tau_2\}]\} - \qquad (72) \\
&- \alpha \sum_{k=1}^{n-1} \frac{k}{N^2} P\{X_k^{(1)} \neq N^{(x)}\} P\{Y_k^{(1)} \neq N^{(y)}\} [P\{X_{\tau_2}^{(2)} \neq N^{(x)}) + \\
&+ P\{X_k^{(1)} \neq N^{(x)}, X_{\tau_2}^{(2)} = N^{(x)}, k < \tau_2\}] \times \\
&\times [P\{Y_{\tau_2}^{(2)} \neq N^{(y)}\} + P\{Y_{\tau_2}^{(2)} = N^{(y)}, k < \tau_2\}],
\end{aligned}
$$

или в эквивалентной форме:

$$
\begin{aligned}
V_n^{(1)}(\tau_2) &= c_\alpha \{2P\{X_n^{(1)} = N^{(x)} | \mathcal{F}_n^{(1)} \vee \mathcal{F}_n^{(2)}\} [P\{X_{\tau_2}^{(2)} \neq N^{(x)}\} + \\
&+ P\{X_{\tau_2}^{(2)} = N^{(x)}, n < \tau_2\}] + 2P\{Y_n^{(1)} = N^{(y)} | \mathcal{F}_n^{(1)} \vee \mathcal{F}_n^{(2)}\} \times \\
&\times [P\{Y_{\tau_2}^{(2)} \neq N^{(y)}\} + P\{Y_{\tau_2}^{(2)} = N^{(y)}, n < \tau_2\}] - \\
&- P\{X_n^{(1)} = N^{(x)} | \mathcal{F}_n^{(1)} \vee \mathcal{F}_n^{(2)}\} P\{Y_n^{(1)} = N^{(y)} | \mathcal{F}_n^{(1)} \vee \mathcal{F}_n^{(2)}\} \times \\
&\times [P\{X_{\tau_2}^{(2)} \neq N^{(x)}\} + P\{X_{\tau_2}^{(2)} = N^{(x)}, n < \tau_2\}] \times \\
&\times [P\{Y_{\tau_2}^{(2)} \neq N^{(y)}\} + P\{Y_{\tau_2}^{(2)} = N^{(y)}, n < \tau_2\}]\} - \qquad (73) \\
&- \alpha \sum_{k=1}^{n-1} \frac{k}{N^2} P\{X_k^{(1)} \neq N^{(x)}\} P\{Y_k^{(1)} \neq N^{(y)}\} [P\{X_{\tau_2}^{(2)} \neq N^{(x)}) + \\
&+ P\{X_k^{(1)} \neq N^{(x)}, X_{\tau_2}^{(2)} = N^{(x)}, k < \tau_2\}] \times \\
&\times [P\{Y_{\tau_2}^{(2)} \neq N^{(y)}\} + P\{Y_{\tau_2}^{(2)} = N^{(y)}, k < \tau_2\}].
\end{aligned}
$$

Заметим, что для $n = \overline{1, \tau_1}$ условные вероятности имеют вид

$$
\begin{aligned}
P\{X_n^{(1)} = N^{(x)} | \mathcal{F}_n^{(1)} \vee \mathcal{F}_n^{(2)}\} &= P\{X_n^{(1)} \colon X_n^{(1)} > \max(X_{n-1}^{(1)}, \ldots, X_1^{(1)})\} = \\
&= P\{X_n^{(1)} = N^{(x)}\} \, / \, P\{X_n^{(1)} > \max(X_{n-1}^{(1)}, \ldots, X_1^{(1)})\} = \\
&= \frac{1}{N} \Big/ \left(\frac{(n-1)!}{n!}\right) = \frac{n}{N} 1_{\{X_n^{(1)} > \max(X_{n-1}^{(1)}, \ldots, X_1^{(1)})\}} \qquad (74)
\end{aligned}
$$

и аналогично

$$
P\{Y_n^{(1)} = N^{(x)} | \mathcal{F}_n^{(1)} \vee \mathcal{F}_n^{(2)}\} = \frac{n}{N} 1_{\{X_n^{(1)} > \max(X_{n-1}^{(1)}, \ldots, X_1^{(1)})\}} \, . \qquad (75)
$$

Легко вычислить также, что для каждого $k=\overline{1,n}$ условные вероятности имеют вид

$$P\{X^{(2)}_{\tau_2}\neq N^{(x)}\}+P\{X^{(2)}_{\tau_2}=N^{(x)},k<\tau_2\}=1-P\{X^{(2)}_{\tau_2}=N^{(x)},\tau_2\leq k\},$$

$$P\{Y^{(2)}_{\tau_2}\neq N^{(y)}\}+P\{Y^{(2)}_{\tau_2}=N^{(y)},k<\tau_2\}=1-P\{X^{(2)}_{\tau_2}=N^{(x)},\tau_2\leq k\}. \qquad (76)$$

Таким образом, подставляя выражения (74)–(76) в (73), для всех $n=\overline{1,\tau_1}$ получаем:

$$V_n^{(1)}(\tau_2)=c_\alpha[\frac{2n}{N}(1-P\{X^{(2)}_{\tau_2}=N^{(x)},\tau_2\leq n\})+$$
$$+\frac{2n}{N}(1-P\{Y^{(2)}_{\tau_2}=N^{(y)},\tau_2\leq n\})-$$
$$-\frac{n^2}{N^2}(1-P\{X^{(2)}_{\tau_2}=N^{(x)},\tau_2\leq n\})(1-P\{Y^{(2)}_{\tau_2}=N^{(y)},\tau_2\leq n\})]-$$
$$-\frac{\alpha(N-1)^2}{N^2}\sum_{k=1}^{n-1}\frac{k}{N^2}(1-P\{X^{(2)}_{\tau_2}=N^{(x)},\tau_2\leq k\})(1-P\{Y^{(2)}_{\tau_2}=N^{(y)},\tau_2\leq k\}). \qquad (77)$$

Для того чтобы вычислить выражение (77), необходимо предварительно найти условные вероятности $P\{X^{(2)}_{\tau_2}=N^{(x)},\tau_2\leq k\}$ и $P\{Y^{(2)}_{\tau_2}=N^{(y)},\tau_2\leq k\}$ для каждого $k=\overline{1,n}$, основываясь на базовых марковских последовательностях (67), согласованных с переходными вероятностями (68). Аналогично методу работ [15, 16] получаем, что вероятности

$$P\{X^{(2)}_{\tau_2}=N^{(x)},\tau_2\leq k\}:=P\{X^{(2)}_{\tau_2(l)}=N^{(x)},\tau_2(l)\leq k\}=0, \qquad (78)$$

для $k=\overline{1,l-1}$ с пороговой стратегией $\hat{\tau}_2(l)\in\mathcal{H}$ при условии оптимального выбора, когда $\tau_1(l)=x^{(1)}_{\hat{\tau}_1(l)}=l$, а $\tau_2:=\tau_2(l)>l\in\mathcal{H}$. Если же $k=\overline{l,N}$, то

$$P\{X^{(2)}_{\tau_2(l)}=N^{(x)},\tau_2(l)\leq k\}=\sum_{j=l}^{k}P\{X^{(2)}_{\tau_2(l)}=N^{(x)},\tau_2(l)\leq j\}=$$
$$=\sum_{j=l}^{k}P\{X^{(2)}_{\tau_2(l)}=N^{(x)}|\tau_2(l)=j\}\,P\{\tau_2(l)=j\}=$$
$$=\sum_{j=l}^{k}P\{X^{(2)}_{\tau_2(l)}=N^{(x)}|\mathcal{F}^{(1)}_j\vee\mathcal{F}^{(2)}_j\}P\{\tau_2(l)=j\}=$$
$$=\sum_{j=l}^{k}P\{X^{(2)}_{j}=N^{(x)}|\mathcal{F}^{(1)}_j\vee\mathcal{F}^{(2)}_j\}\,P\{\tau_2(l)=j\}=$$
$$=\sum_{j=l}^{k}\frac{j}{N}\,P\{\tau_2(l)=j\} \qquad (79)$$

и аналогично для $k=\overline{l,N}$

$$P\{Y^{(2)}_{\tau_2(l)}=N^{(y)},\tau_2(l)\leq k\}=\sum_{j=l}^{k}\frac{j}{N}\,P\{\tau_2(l)=j\}. \qquad (80)$$

Для вычисления вероятностей $P\{\tau_2(l)=j\}, j\in\mathcal{H}$, заметим, что согласно теореме 6 и в соответствии с пороговой стратегией $\hat{\tau}_2(l)\in\mathcal{H}$ с помощью соотношений прямого уравнения Колмогорова

$$P\{x_{\hat{\tau}_2}^{(2)}=j\}=\begin{cases}1, & j=1,\\ \sum\limits_{i=1}^{j-1}P\{x_{\hat{\tau}_2}^{(2)}=i\}\,p_{ij}^{(1)}, & j=\overline{2,l-1},\\ \sum\limits_{i=1}^{l-1}P\{x_{\hat{\tau}_2}^{(2)}=i\}\,p_{ij}^{(1)}, & j=\overline{l,N},\end{cases} \tag{81}$$

из (81) легко получить, что

$$P\{x_{\hat{\tau}_2}^{(2)}=j\}=\begin{cases}\sum\limits_{k=1}^{j-1}(\mathcal{P}^k)_{1,j}, & j=\overline{2,l-1},\\ \sum\limits_{s=1}^{l}\sum\limits_{k=1}^{s-1}(\mathcal{P}^k)_{1,s}\,p_{s,j}^{(2)}, & j=\overline{l,N},\end{cases} \tag{82}$$

где $\mathcal{P}:=\{p_{ij}^{(2)}: i,\, j=0,n\}$ — матрица переходных вероятностей (68) ассоциированного марковского процесса выбора самого желательного пакета акций первым клиентом-покупателем. Обозначив для удобства величину $P\{\tau_2(l)=j\}:=h_j$, $j=\overline{0,N}$, определенную (82), поскольку $P\{\tau_2(l)=j\}=0$ для всех $j=\overline{1,l-1}$, для функции цены оптимального выбора (77) находим выражение

$$V_n^{(1)}=c_\alpha\left[\frac{4n}{N}\left(1-\sum_{j=l}^{n}\frac{j}{N}h_j\right)-\frac{n^2}{N^2}\left(1-\sum_{j=l}^{n}\frac{j}{N}h_j\right)^2\right]-$$

$$-\frac{\alpha(N-1)^2}{N^2}\sum_{k=1}^{n-1}\frac{k}{N^2}\left(1-\sum_{j=l}^{n}\frac{j}{N}h_j\right)^2 \tag{83}$$

для всех $n=\overline{1,\tau_1}$. Основываясь на утверждении теоремы 6, определим величину $l\in\mathcal{H}$, удовлетворяющую неравенствам (69), которые перепишем в такой удобной для вычисления форме:

$$V_{l-1}^{(1)}<(\mathcal{P}V^{(1)})_{l-1},\ (\mathcal{P}V^{(1)})_l\le V_l^{(1)}. \tag{84}$$

Соответствующие неравенства определяются следующими аналитическими выражениями:

$$c_\alpha\sum_{k=l}^{N}\frac{(l-1)^2[2k(k-1)-1]}{(2l-3)k^2(k-1)^2}\left[\frac{4k}{N}\left(1-\sum_{j=l}^{k}\frac{j}{N}h_j\right)-\frac{k^2}{N^2}\left(1-\sum_{j=l}^{k}\frac{j}{N}h_j\right)^2\right]-$$

$$-\frac{\alpha(N-1)^2}{N^2}\sum_{k=l}^{N}\frac{(l-1)^2[2k(k-1)-1]}{(2l-3)k^2(k-1)^2}\sum_{s=1}^{k-1}\frac{s}{N^2}\left(1-\sum_{j=l}^{s}\frac{j}{N}h_j\right)^2>$$

$$>c_\alpha\left(\frac{4(l-1)}{N}-\frac{(l-1)^2}{N^2}\right)-\frac{\alpha(N-1)^2}{N^2}\sum_{k=1}^{l-1}\frac{k}{N^2}\left(1-\sum_{j=l}^{k}\frac{j}{N}h_j\right)^2; \tag{85}$$

$$c_\alpha \sum_{k=l}^{N} \frac{l^2[2k(k-1)-1]}{(2l-1)k^2(k-1)^2} \left[ \frac{4k}{N}\left(1-\sum_{j=l}^{k} \frac{j}{N} h_j\right) - \frac{k^2}{N^2}\left(1-\sum_{j=l}^{k} \frac{j}{N} h_j\right)^2 \right] -$$

$$-\frac{\alpha(N-1)^2}{N^2} \sum_{k=l}^{N} \frac{l^2[2k(k-1)-1]}{(2l-1)k^2(k-1)^2} \sum_{s=1}^{k-1} \frac{s}{N^2}\left(1-\sum_{j=l}^{s} \frac{j}{N} h_j\right)^2 \le$$

$$\le c_\alpha \left(\frac{4l}{N} - \frac{l^2}{N^2}\right) - \frac{\alpha(N-1)^2}{N^2} \sum_{k=1}^{l-1} \frac{k}{N^2}\left(1-\sum_{j=l}^{k} \frac{j}{N} h_j\right)^2 . \qquad (86)$$

Пусть теперь величина $l \in \mathcal{H}$ удовлетворяет неравенствам (85) и (86). Как следствие, получаем алгебраическое уравнение

$$\frac{2c_\alpha l}{2l-1} \left[ 4\frac{l}{N} \ln\frac{N}{l} - \frac{2l^2}{N^2} \ln^2 \frac{N}{l} - \frac{(N-l)l}{N^2} + \frac{2l^3}{N^3}\left( \frac{N}{l} \ln\frac{N}{l} - \frac{N}{l} + 1\right) - \right.$$

$$\left. - \frac{l^4}{N^4}\left( \frac{N}{l} \ln^2 \frac{N}{l} - \frac{2N}{l} \ln\frac{N}{l} + \frac{N}{l} - 1\right) \right] -$$

$$-\alpha \left[ \frac{l^2(N-l)}{2N^3} + \frac{l(N-l)^2}{2N^3} - \frac{l^2}{N^2} \ln\frac{N}{l} + \frac{l^2(N-l)}{N^3} + \frac{l^2(N-l)^2}{2N^4} + \right. \qquad (87)$$

$$\left. + \frac{l^4}{2N^4}\left( \frac{N}{l} \ln^2 \frac{N}{l} - \frac{3N}{l} \ln\frac{N}{l} + \frac{7N}{2l} - 4 + \frac{l}{2N}\right) \right] =$$

$$= c_\alpha \left(\frac{4l}{N} - \frac{l^2}{N^2}\right) - \frac{\alpha(N-1)^2(l-1)l}{2N^4} ,$$

где при выводе учтено, что согласно (83) величина $h_j = (j-1)p_{1j}^{(2)}$ , $j = \overline{l, n}$ .

Тогда с помощью обычной проверки устанавливается справедливость следующего утверждения.

**Теорема 7.** Для прогрессивно-линейной и согласованной с объемом портфеля акций шкалы штрафования покупателя марковские последовательности (67) допускают разбиение фазового пространства $\mathcal{H}$ в прямую сумму подпространств $\mathcal{H}_+ = \{\overline{0, l-1}\}$ и $\mathcal{H}_- = \{\overline{l, N}\}$ при необходимом условии, что параметр поощрения $c_\alpha \ge \alpha/8 > 0$ .

Поскольку полученное алгебраическое уравнение (87) достаточно сложное, если величина $N \in \mathbb{Z}_+$ конечна, ниже проведем его асимптотический анализ при условии существования границы $\lim\limits_{N\to\infty} l(N)/n := z \in (0,1)$ , где $l(N) \in \mathcal{H}$ — соответствующее решение данного алгебраического уравнения.

**3.3. Асимптотический анализ оптимальной стратегии выбора пакета акций.** При выполнении условия $\lim\limits_{N \to \infty} l(N) / n = z \in (0,1)$ из алгебраического выражения (87) получаем [13, 14] следующее трансцендентное уравнение:

$$\beta(4z \ln z + 2z^2 \ln^2 z + 2z^2 \ln z + z^3 \ln^2 z + 2z^3 \ln z + 5z - z^3 - z^4) +$$
$$+ (2z + 2z^2 \ln z + 2z^2 (1-z)^2 + 2z^3 \ln^2 z + 3z^3 \ln z + 10z^3 - z^4 + z^5) = 0\,, \quad (88)$$

где $4c_\alpha / \alpha := \beta \geq 1/2$. Оно допускает только одно действительное решение на отрезке $(0,1)$, которое можно найти числовыми методами. Запишем приближенные значения решений уравнения (88) на интервале $(0, 1)$ для ряда значений величины $\beta \in [0.5, 1.5]$:

1) для $\beta$ — 0.5, 0.6, 0.7, 0.8, 0.9, 1.0, 1.1, 1.2, 1.3, 1.4, 1.5;
2) для $z^*$ — 0.155, 0.171, 0.186, 0.199, 0.210, 0.220, 0.228, 0.236, 0.243, 0.249, 0.254.

Как следствие, приходим к формулировке следующей оптимальной конкуренционной стратегии поведения первого клиента-покупателя на рынке акций при условии их бивариантной полезности: при достаточно значительном объеме $N \in \mathbb{Z}_+$ пакетов акций в портфеле банка оптимальной стратегией поведения первого покупателя при выборе самого ценного пакета акций будет просмотр на относительно сравнительную ценность $l = z^* N \in \mathbb{Z}_+$ пакетов акций, а затем выбор первого из отобранных пакетов акций, бивариантная полезность которого превышает все ранее просмотренные.

В настоящем исследовании установлено, что конкуренционная модель рынка акций в среде банковского портфолио в условиях цейтнот-биржевого процесса как с моно-, так и с бивариантной функциями цены выбора клиентами-покупателями наиболее ценного пакета акций математически адекватно описывается специальными дискретными марковскими процессами на фазовом пространстве $\mathcal{H} = \{0, 1 \ldots, N\}$.

Как было показано, оптимальная стратегия покупателя при выборе им наиболее ценного пакета акций определяется при достаточном большом объеме портфолио универсальными трансцендентными уравнениями (61) и (88), зависящими от соотношения банковских параметров поощрения и штрафа. Условием наименьшего риска потерь банком-продавцом акций являются равенства $c_\alpha = \alpha / 2$ или $c_\alpha = \alpha / 8$, ведущие к инвариантной форме уравнений соответствующего (63) и (88) с $\beta = 1/2$. В этом случае покупателю достаточно просмотреть соответственно $\simeq 23{,}75\,\%$ или $\simeq 15{,}54\,\%$ пакетов акций из портфолио для оптимального выбора наиболее ценного пакета акций, т.е. увеличение количества наборов характеристик полезности пакетов акций приводит к уменьшению обязательного количества просматриваемых пакетов.

Необходимо также отметить, что исследованная модель цейтнот-биржевого поведения клиентов-покупателей акций с бивариантной функцией полезности при условии отсутствия априорной информации о качественных характеристиках портфолио — несколько упрощенная версия реальной ситуации. Авторы сознательно допускали, что каждый клиент имеет достаточный финансовый капитал для приобретения любого пакета акций из банковского портфолио. Если же финансовые возможности клиентов-покупателей ограничены или же имеется значительное число конкурирующих клиентов-покупателей, а также параметров полезности пакетов акций, то соответствующие оптимальные стратегии таких покупателей существенно усложняются, что требует отдельного анализа и дальнейшего развития предложенного метода исследования.

Авторы выражают благодарность чл.-кор. НАН Украины, профессору А.А. Чикрию и чл.-кор. НАН Украины, профессору С.И. Ляшко за полезное обсуждение работы, а также за ценные комментарии и замечания.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Березовский Б.А., Гнедин А.В. Задача наилучшего выбора. — М.: Наука, 1984. — 197 с.
2. Davis M.H.A., Panas V.G. and Zariphopoulou T. European option pricing with transaction costs // SIAM J. Contr. Optimiz. — 1993. — **31.** — P. 470–493.
3. Davis M.H.A., Norman A.R. Portfolio selection with transaction costs // Mathemat. of Oper. Res. — 1990. — **15.** — P. 676–713.
4. Пресман Є.Л., Сонин И.М. Игровые задачи оптимальной остановки. Существование и единственность точек равновесия // Вероятностные проблемы управления в экономике. — М.: Наука, 1977. — С. 115–144.
5. Мазалов В.В., Винниченко С.В. Моменты остановки и управляемые случайные блуждания. — Новосибирск: Наука, 1992. — 112 с.
6. Феллер В. Введение в теорию вероятностей и ее приложения: В 2-х т. Т. 1. — М.: Мир, 1984. –- 528 с.
7. Morette de Witt C. and Elworthy K.D. A stepping stone in stochastic analysis // Physics Rep. — 1981. — **77/3.** — P. 125–167.
8. Arnold L. Qualitive theory of stochastic systems and its application in physics // Там же. — 1981. — 77/**3.** — P. 215–219.
9. Дуб Дж.Л. Вероятностные процессы. — М.: Мир, 1956. — 606 с.
10. Merton R.C. Optimization consumption and portfolio rules in a continuous-time model // J. Econom. Theory. — 1971. — **3**. — P. 373–413.
11. Беллман Р. Динамическое программирование. — М.: Изд-во иностр. лит., 1960. — 400 с.
12. Gilbert J. and Mosteller F. Recognizing the maximum of a sequence // J. American Stat. Ass. — 1966. — **61**. — P. 35–73.
13. Гельфонд А.О. Теория конечных разностей. — М.: Гостехиздат, 1957. — 400 с.
14. Федорюк М. В. Асимптотические методы. — М.: Наука, 1985. — 270 с.
15. Кышакевич Б.Ю., Прикарпатский А.К., Твердохлиб И.П. Анализ оптимальных стратегий портфельной конкуренционной модели рынка акций // Докл. НАН Украины. — 2009. — № 1. — С. 40–47.
16. Кышакевич Б.Ю., Прикарпатский А.К., Твердохлиб И.П. Исследование оптимальных стратегий конкуренционной портфельной модели рынка акций с бивариантной функцией полезности // Там же. — 2009. — № 8. — С. 35–41.

*Поступила 24.02.2009*