УДК 519.21

Е.Н. ДЕРИЕВА, С.О. ГЕРАСИМЕНКО

О ЗАДАЧЕ УПРАВЛЕНИЯ РЕШЕНИЕМ СТОХАСТИЧЕСКОГО ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОГО УРАВНЕНИЯ НА ПЛОСКОСТИ С АДДИТИВНЫМ ДРОБНЫМ БРОУНОВСКИМ ПОЛЕМ

Ключевые слова: *управление случайным полем, стохастическое дифференциальное уравнение, дробное винеровское поле, параметр Херста.*

В статье изучается проблема управления решением стохастического дифференциального уравнения на плоскости с аддитивным дробным броуновским полем. Аналогичные задачи для дробных винеровских процессов изучались в [1] для случая, когда параметр Херста принадлежит интервалу (1/2, 1), и в [2], когда параметр Херста принадлежит интервалу (0, 1/2).

Пусть $(\Omega, \Im, P)$ — вероятностное пространство с потоком σ-алгебр $(\Im_z)$, $z \in [0, 1]^2$, $z=(s, t)$, (C, B) — измеримое пространство непрерывных на $[0,1]^2$ функций f с потоком σ-алгебр $\mathrm{B}_z = \sigma\{f(z_1), z_1 \le z\}$, $\mathrm{B} = \sigma\{f(z),\ z \in [0, 1]^2\}$, $\| f \| = \sup\{|f(z)|,\ z \in [0, 1]^2\}$, $(\mathfrak{U}, U)$ — метрический компакт. Рассмотрим уравнение

$$\xi(z) = \xi_0 + \int_0^s \int_0^t a((x, y), \xi, u) dydx + B^H(z),\ z = (s, t) \in [0,1]^2, \tag{1}$$

где $B^{(H,H')}(z)$ — дробное броуновское поле с параметром Херста $(H, H') \in (0,1/2)^2$, т.е. непрерывное гауссовское поле с $EB^{(H,H')}(z) = 0$, $z \in [0,1]^2$, и ковариационной функцией

$$R_{H,H'}(z, z') = EB^{(H,H')}(z) B^{(H,H')}(z') =$$

$$= \frac{1}{4}(s^{2H} + (s')^{2H} - |s - s'|^{2H})(t^{2H'} + (t')^{2H'} - |t - t'|^{2H'}),\ z, z' \in [0,1]^2;$$

$a(z, \xi, u)$ — B_z-измеримый функционал, $u{:}[0,1] \to \mathfrak{U}$ — управление, не зависящее от поведения броуновского поля $B^{(H,H')}(z')$ при $z' \in [0,1]^2 \setminus [0, z]^2$.

Под слабым решением уравнения (1) будем понимать [3] совокупность $\Im_z$-подчиненных полей $(B^{(H,H')}, \xi)$ на вероятностном пространстве $(\Omega, \Im, P)$ с потоком σ-алгебр $(\Im_z)$, $z \in [0, 1]^2$, таких, что $B^{(H,H')}(z)$ — $\Im_z$-подчиненное дробное броуновское поле, а $B^{(H,H')}$ и ξ удовлетворяют (1).

Обозначим U класс всех управлений, для которых существует слабое решение уравнения (1). Допустим, что мгновенную стоимость управления определяет действительная ограниченная функция $c(z, x, u)$ такая, что при каждом $u \in \mathfrak{U}$ функция c предсказуема относительно $\{\Im_z\}$, для любой точки $(z, x) \in [0, 1]^2 \times \Omega$ функция $c(z, x, \cdot)$ непрерывна по $u \in \mathfrak{U}$ и $|c(z, x, u)| \le M \|x\|_z$, $\|x\|_z = \sup\limits_{z' \in [0, z]} |x(z')|$. Таким образом, для любого $u \in U$ полная стоимость управления определяется как

$$J(u) = E\left(\int_0^1 \int_0^1 c((x, y), \xi^u(x, y), u((x, y), \xi^u(x, y))) dxdy\right), \tag{2}$$

$\xi^u(z)$ — решение уравнения (1), соответствующее управлению $u = u(z, \xi^u(z))$.

Покажем, что существует $u^* \in U$ такое, что $J(u^*) = \inf\limits_{u \in U} J(u)$.

Теорема 1 [3]. Пусть функционал $a(z, x, u)$ удовлетворяет условию $|a(z, x, u)| \le L(1+||x||)$. Тогда уравнение (1) имеет, причем единственное, слабое решение.

Применим к дробному броуновскому полю интегральное выражение [4]

$$B^{(H,H')}(z) = \int\limits_{[0,z]} K_{(H,H')}(z, z')dW(z'),$$

где ядро $K_{(H,H')}(z, z') = K_H(s, s')K_{H'}(t, t')$,

$$K_H(s, s') = \Gamma\left(H + \frac{1}{2}\right)^{-1} (s' - s)^{H - \frac{1}{2}} F\left(H - \frac{1}{2}, \frac{1}{2} - H, H + \frac{1}{2}, 1 - \frac{s'}{s}\right),$$

$$K_{H'}(t, t') = \Gamma\left(H' + \frac{1}{2}\right)^{-1} (t' - t)^{H' - \frac{1}{2}} F\left(H' - \frac{1}{2}, \frac{1}{2} - H', H + \frac{1}{2}, 1 - \frac{t'}{t}\right),$$

$F(a, b, c, z)$ — гипергеометрическая функция Гаусса, определяемая уравнением

$$F(a, b, c, x) = \frac{\Gamma(c)}{\Gamma(b)\Gamma(c-b)} \int\limits_0^1 y^{b-1}(1-y)^{c-b-1}(1-yx)^{-a} dy.$$

Далее, обозначим $\mathrm{E} \subset \mathrm{H}$ множество кусочно-постоянных функций на $[0,1]^2$, где H — гильбертово пространство, определяемое как замыкание E по отношению к скалярному произведению $\langle 1_{[0,z]}, 1_{[0,z']} \rangle_H = R_{H,H'}(z, z')$, $L[0,1]^2$ — пространство $\Im_z$-измеримых полей $\phi = \{\phi(z),\ z \in [0,1]^2\}$ таких, что $P\left\{ \int\limits_{z \in [0,1]^2} |\phi(z,\omega)|^2\, dz < \infty \right\} = 1$ и $L_2[0,1]^2$ — пространство $\Im_z$-измеримых полей ϕ, для которых $\int\limits_{z \in [0,1]^2} E|\phi(z,\omega)|^2\, dz < \infty$. Линейный оператор $K^*_{H,H'}$ из E в $L_2[0,1]^2$, определяемый как

$$(K^*_{H,H'}, \varphi) = K_{H,H'}((1,1), z)\varphi(z) + \int\limits_{[s,1]\times[t,1]} (\varphi(\zeta) - \varphi(z)) \frac{\partial^2 K_{H,H'}}{\partial \zeta^2}(\zeta, z)d\zeta,$$

для любых кусочно-постоянных функций ϕ и ψ из пространства E дает $\langle K^*_{H,H'}\phi, K^*_{H,H'}\psi \rangle_{L^2[0,1]^2} = \langle \phi, \psi \rangle_H$, т.е. задает изометрию между гильбертовым пространством H и $L_2[0,1]^2$.

Будем также считать, что поток σ-алгебр $\Im_z^W$, генерируемый винеровским полем W, удовлетворяет условиям (F1)–(F4) из работы [5].

Определим дробный интеграл Римана–Лиувилля для функции $f \in L_1[0,1]^2$ порядка $\alpha, \beta > 0$:

$$I^{\alpha,\beta} f(s, t) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)} \int\limits_0^s \int\limits_0^t (s-x)^{\alpha-1}(t-y)^{\beta-1} f(x, y)dxdy.$$

Обозначим $I^{\alpha,\beta}(L^p[0,1]^2)$ образ пространства $L_p[0,1]^2$, применяя оператор $I^{\alpha,\beta}$. Ядро $K_{H,H'}$ определяет изоморфизм пространства $L_2[0,1]^2$ в $I^{H+\frac{1}{2},H'+\frac{1}{2}}(L_2[0,1]^2)$ следующим образом:

$$(K_{H,H'}f)(s,t) = I^{2H,2H'}s^{1/2-H}t^{1/2-H'}I^{1/2-H,\,1/2-H'}s^{H-1/2}t^{H'-1/2}f\,,$$

где $f \in L_2[0,1]^2$.

Если $f \in I^{\alpha,\beta}(L^p[0,1]^2)$, функция ϕ такая, что $f = I^{\alpha,\beta}\phi$ — единственная в $L^p[0,1]^2$, то ϕ будем называть производной Римана–Лиувилля порядка α, β для функции f. Прямая дробная производная функции f порядка α, β задается с помощью представления Вейла [4]

$$D^{\alpha,\beta}f(s,t) = \frac{1_{[0,1]^2}(s,t)}{\Gamma(1-\alpha)\Gamma(1-\beta)}\left(\frac{f(s,t)}{s^\alpha t^\beta} + \frac{\alpha}{t^\beta}\int_0^s \frac{f(s,t)-f(u,t)}{(s-u)^{1+\alpha}}du + \right.$$

$$\left. + \frac{\beta}{s^\alpha}\int_0^s \frac{f(s,t)-f(s,v)}{(t-v)^{1+\beta}}dv + \alpha\beta\int_0^s\int_0^t \frac{f(s,t)-f(s,v)-f(u,t)+f(u,v)}{(s-u)^{1+\alpha}(t-v)^{1+\beta}}dudv\right).$$

Оператор, обратный $K_{H,H'}$, определяется как

$$(K_{H,H'}^{-1}f)(s,t) = s^{1/2-H}t^{1/2-H'}D^{1/2-H,\,1/2-H'}s^{H-1/2}t^{H'-1/2}D^{2H,2H'}f$$

для любой $f \in I^{H+1/2,H'+1/2}(L_2[0,1]^2)$.

Пусть имеем случайное поле $\psi = \{\psi(z),\ z \in [0,1]^2\}$ с непрерывными траекториями и рассмотрим преобразование $\widetilde{B}^{H,H'}(z) = B^{H,H'}(z) + \int_{z' \in [0,z]}\psi(z')dz'$. Тогда можно записать

$$B^{(H,H')}(z) = \int_{[0,z]} K_{(H,H')}(z,z')dW(z') + \int_{z'\in[0,z]}\psi(z')dz' = \int_{[0,z]}K_{(H,H')}(z,z')d\widetilde{W}(z')\,,$$

где

$$\widetilde{W}(z) = W(z) + \int_{\zeta\in[0,z]}\left(K_{H,H'}^{-1}\Big(\int_{[0,\zeta]}\psi(\eta)d\eta\Big)(\zeta)\right)d\zeta\,.$$

Отметим, что $K_{H,H'}^{-1}\big(\int_{[0,\zeta]}\psi(\eta)d\eta\big)$ принадлежит $L_2[0,1]^2$ тогда и только тогда, когда $\int_{[0,\zeta]}\psi(\eta)d\eta$ принадлежит $I^{H+1/2,H'+1/2}L_2[0,1]^2$.

Теорема 2 [3, 6] (теорема Гирсанова). Пусть случайное поле $\psi = \{\psi(z),\ z \in [0,1]^2\}$ является $\Im_z$-подчиненным, имеет интегрируемые траектории, $\int_{[0,\zeta]}\psi(\eta)d\eta \in I^{H+1/2,H'+1/2}L_2[0,1]^2$ почти наверное и $E\exp\{\zeta((1,1)\psi)\}=1$, где

$$\zeta(z,\psi)=\int_{\zeta\in[0,z]} K^{-1}_{H,H'}\left(\int_{[0,z']}\psi(\eta)d\eta\right)(z')dW(z')-$$

$$-\frac{1}{2}\int_{\zeta\in[0,z]}\left(K^{-1}_{H,H'}\left(\int_{[0,z']}\psi(\eta)d\eta\right)\right)^2(z')dz'.$$

Тогда поле $\widetilde{B}^{H,H'}(z)$ является $\Im_z$-подчиненным дробным броуновским полем с параметром Херста (H,H') в вероятностном пространстве $(\Omega,\Im,\widetilde{P})$, причем $\frac{d\widetilde{P}}{dP}=\zeta((1,1),\psi)$.

Возвратимся к рассмотрению задачи управления решением уравнения (1) с функцией стоимости (2). Пусть:

1) функция $a(z,\xi,u)$ является $\Im\times\mathrm{B}\times\mathrm{U}$-измеримой;

2) для любого $z\in[0,1]^2$ функция $a(z,\cdot,\cdot)$ $\mathrm{B}\times\mathrm{U}$-измерима;

3) для любых $z\in[0,1]^2$, $x\in C$ функция $a(z,x,\cdot)$ непрерывна на $\mathfrak{U}$;

4) $|K^{-1}_{H,H'}(\int_{[0,z]}a(\eta,x,u)d\eta)|^2\le M(1+\|x\|^2)$ для некоторого M;

5) существует L такое, что $|a(z,x,u)|^2\le L(1+\|x\|^2)$;

6) для любых $z\in[0,1]^2$, $x\in C$ множество $a(z,x,\mathfrak{U})$ выпукло и замкнуто.

Лемма 1. Пусть выполнены условия 1–4. Тогда $E\exp\{\zeta((1,1),a(z,x,u))\}=1$.

Доказательство. Положим

$$T_a(x)(z)=x(z)-\int_{[0,z]}\left(K^{-1}_{H,H'}\left(\int_{[0,z']}a(\eta,x,u)d\eta\right)\right)(z')dz'. \qquad (3)$$

Достаточно [7] показать, что для любого $N>0$ существует $K>0$ такое, что из $\|T_a(x)\|\le N$ следует $\|x\|\le K$. Положим $y(z)=T_a(x)(z)$ и $\gamma(z)=\max_{z'\in[0,z]}|x(z')|$. Тогда из (3) непосредственно вытекает неравенство

$$\gamma(z)\le|y(z)|+\int_{[0,z]}M(1+\gamma(z'))dz'\le(\|T_a(x)\|+M)+\int_{[0,z]}M\gamma(z')dz'.$$

Отсюда по лемме Гронуолла [8]

$$\|x\|=T_a(x)(1)\le e^M\gamma((0,0))+e^M(\|T_a(x)\|+M)\le e^M(2\|T_a(x)\|+M).$$

Лемма доказана.

Зафиксируем вероятностное пространство $(\Omega,\Im,P)$ с винеровским полем $W=\{W(z),\Im_z,P\}$. Обозначим $a_u(z,x)=a(z,x,u(z,x))$, $x\in C$, $u\in U$, и определим множество плотностей D следующим образом: $D=\exp\{\zeta(z,a_u(z,W)),u\in U\}$. Покажем, что D слабо компактно в $L_1(\Omega,\Im,P)$.

Лемма 2. В условиях 1–5 существует такая константа $\gamma^*>1$, что $\sup_{u\in U}E\exp\{\gamma^*\zeta((1,1)a_u(z,W))\}<\infty$.

Доказательство. Легко увидеть, что

$$\exp\{\gamma\zeta((1,1),a_u(z,W))\}=\exp\left\{\gamma\int_{[0,1]^2}\left(K^{-1}_{H,H'}\left(\int_{[0,z]}a_u(z',W)dz'\right)\right)(z)dW(z)-\right.$$

$$-\frac{1}{2}\gamma \int\limits_{[0,1]^2} \left(K_{H,H'}^{-1} \left(\int\limits_{[0,z]} a_u(z',W)dz' \right) \right)^2 (z)dz \Bigg\} \le$$

$$\le \exp\left\{ \zeta((1,1),\gamma a_u(z,W)) + \frac{\gamma^2-\gamma}{2} \int\limits_0^1 \left(K_{H,H'}^{-1} \left(\int\limits_{[0,z]} a_u(z',W)dz' \right) \right)^2 (z)dz \right\} \le$$

$$\le \exp\left\{ \zeta((1,1),\gamma a_u(z,W)) + \frac{\gamma^2-\gamma}{2} M \int\limits_0^1 (1+|W(z)|)^2 dz \right\}.$$

Положим $\phi(z) = W(z) - \gamma \int\limits_{[0,z]} \left(K_{H,H'}^{-1} \left(\int\limits_{[0,z']} a_u(\zeta,W)d\zeta \right) \right)(z')dz'$. Кроме того,

$$|W(z)|^2 \le 2|\phi(z)|^2 + 2\gamma^2 M \left(1 + \int\limits_{[0,z]} |W(z')|^2 dz' \right),$$

откуда по лемме Гронуолла получаем

$$|W(z)|^2 \le 2(\gamma^2 M + \sup_{t\in[0,1]} |\phi(z)|^2) \exp\{2\gamma^2 M\}.$$

Поскольку условия леммы 1 выполнены, $E\exp\{\gamma\zeta((1,1),a_u(z,W))\} = 1$. Таким образом, $\phi(z)$ является броуновским полем на вероятностном пространстве с мерой $\widetilde{P}$, $d\widetilde{P} = \exp\{\gamma\zeta(a_u(z,W))\}dP$, поэтому

$$\widetilde{E}\exp\{\gamma\zeta(a_u(z,W))\} \le$$

$$\le h(\gamma)\widetilde{E}\exp\left\{ \zeta(\gamma a_u(z,W)) + (\gamma^2-\gamma)M \int\limits_{[0,1]^2} \sup_{z'\in[0,z]} |\varphi(z')|^2 dz \right\},$$

где

$$h(\gamma) = \exp\left\{ \frac{\gamma^2-\gamma}{2} M + 2\gamma^2 M e^{2\gamma^2 M} \right\};$$

следовательно,

$$E\exp\{\gamma\zeta(a_u(z,W))\} \le h(\gamma)E\exp\{M(\gamma^2-\gamma)e^{2\gamma^2 M}\|W\|^2\}.$$

Очевидно, функция $h(\gamma)$ ограничена в окрестности точки $\gamma = 1$, и если выбрать значение γ^*, близкое к единице, правая часть неравенства будет конечной и

$$E\exp\{\gamma\zeta((1,1),a_u(z,W))\} \le C(\gamma,M) < \infty.$$

Таким образом, множество плотностей D равномерно интегрируемо. Лемма доказана.

Лемма 3. Пусть выполнены условия 1–6. Тогда множество D выпукло в пространстве $L_1(\Omega,\mathfrak{I},P)$.

Доказательство. Рассмотрим $a_{u_i}(z,x) = a(z,x,u_i(z,x))$, $x\in C$, $u_i \in U$, $i=1,2$, и пусть $\lambda_i \ge 0$, $\lambda_1+\lambda_2 = 1$. Положим

$$\rho(z) = \lambda_1 \exp\{\zeta(z,a_{u_1}(z,x))\} + \lambda_2 \exp\{\zeta(z,a_{u_2}(z,x))\}.$$

Поскольку по формуле дифференцирования Ито

$$d\exp\{\zeta(a_{u_i}(z,W))\} = \exp\{\zeta(a_{u_i}(z,W))\} \left\langle K_{H,H'}^{-1} \left(\int\limits_{[0,z]} a_u(z',W)dz' \right), d\xi(z) \right\rangle, \; i=1,2,$$

имеем
$$d\rho(z)=\lambda_1 \exp\{\zeta(z,a_{u_1}(z,x))\}\left\langle K_{H,H'}^{-1}\left(\int\limits_{[0,z]} a_{u_1}(z',W)dz'\right), d\xi(z)\right\rangle+$$
$$+\lambda_2 \exp\{\zeta(z,a_{u_2}(z,x))\}\left\langle K_{H,H'}^{-1}\left(\int\limits_{[0,z]} a_{u_2}(z',W)dz'\right), d\xi(z)\right\rangle,$$
это можно переписать как $d\rho(z)=\rho(z)\langle\phi(z),d\xi(z)\rangle$, где
$$\phi(z)=(\lambda_1 \exp\{\zeta(z,a_{u_1}(z,x))\}+\lambda_2\{\exp\zeta(z,a_{u_2}(z,x))\})^{-1}\times$$
$$\times\lambda_1 \exp\{\zeta(z,a_{u_1}(z,x))\}K_{H,H'}^{-1}\left(\int\limits_{[0,z]} a_{u_1}(z',W)dz'\right)+$$
$$+\lambda_2 \exp\{\zeta(z,a_{u_2}(z,x))\}K_{H,H'}^{-1}\left(\int\limits_{[0,z]} a_{u_2}(z',W)dz'\right).$$
Применим формулу Ито и получим
$$d(\ln\rho(z))=\int\limits_{[0,z]}\langle\phi(z'),d\xi(z')\rangle-\frac{1}{2}\int\limits_{[0,z]}|\phi(z')|^2\,dz',$$
откуда непосредственно следует $\rho(1,1)=\exp\zeta((1,1),\phi)$, где ϕ — выпуклая комбинация $a_{u_i}(z,x)=a(z,x,u_i(z,x))$. В силу условия 6 $\phi(z,x)\in a(z,x,\mathfrak{U})$, и, таким образом, ϕ [7, лемма 1] можно представить в виде $\phi(z,x)=a_{u'}(z,x)$, где u' — допустимое управление. Лемма доказана.

Рассмотрим подмножество D^0 из множества D таких плотностей, что $E\exp\{\zeta((1,1),a_u(z,x))\}=1$. Множество $\mathrm{P}=\{\rho{:}\,\rho\in L_1(\Omega,\mathfrak{I},P),\ \rho\geq 0,\ E\rho=1\}$ выпукло и $D^0=D\cap\mathrm{P}$. Отсюда имеем следствие.

Следствие 1. В условиях 1–6 множество D^0 выпукло.

Возьмем любую последовательность $a_{u_n}(z,x)$, $n=1,2,\ldots$, такую, что для всех n $E\exp\{\zeta((1,1),a_{u_n}(z,x))\}=1$, и положим $\rho\in L_1(\Omega,\mathfrak{I},P)$, $\rho=\lim\limits_{n\to\infty}\exp\{\zeta((1,1),$ $a_{u_n}(z,x))\}$, что почти наверное по мере P в пространстве $L_1(\Omega,\mathfrak{I},P)$. Для любого неотрицательного целого N положим
$$a_{u_n}^N(z,x)=\begin{cases} a_{u_n}(z,x), & \text{если } \|x(z')\|\leq N \text{ для } z'\leq z,\\ 0 & \text{в противном случае}\end{cases}$$
и для $N=1,2,\ldots$ выберем последовательности $a_{u_k}^N(z,x)$, $k\in K_N$, и $\phi^N\in\Phi^N$, $\Phi^N=\{\phi{:}[0,1]^2\times C\to R,|\phi(z,x)|\leq N\}$, следующим образом: для $N=1$ возьмем $a_{u_k}^1(z,x)$, $k\in K_1$, подпоследовательность $a_{u_n}^1(z,x)$ и выберем ϕ^1 так, чтобы
$$\exp\{\zeta((1,1),\phi^1(z,x))\}=\lim_{k\in K_1}\exp\{\zeta((1,1),a_{u_k}^1(z,x))\}$$
(здесь сходимость понимается в слабом смысле в пространстве $L_2(\Omega,\mathfrak{I},P)$).

Допустим, что $a_{u_k}^N(z,x)$, $k\in K_N$, и $\phi^N\in\Phi^N$ определены. Положим $a_{u_k}^{N+1}(z,x)$, $k\in K_{N+1}$, является подпоследовательностью $a_{u_k}^N(z,x)$, $k\in K_N$, и выберем
$$\exp\{\zeta((1,1),\phi^{N+1}(z,x))\}=\lim_{k\in K_{N+1}}\exp\{\zeta((1,1),a_{u_k}^{N+1}(z,x))\}.$$

Поскольку семейство плотностей $D(\Phi^N) = \{\exp \zeta((1,1), \phi(z, x)), \phi \in \Phi^N\}$ слабо компактно в $L_2(\Omega, \Im, P)$ (см. [5]), то такой выбор имеет смысл.

Вследствие того, что

$$\exp\{\zeta((1,1), \phi^N(z, x))\} = \lim_{k \in K_N} \exp\{\zeta((1,1), a_{u_k}^N(z, x))\},$$

имеем

$$E(\exp\{\zeta((1,1), \phi^N(z, x)) / \Im_z) = \lim_{k \in K_N} E(\exp\{\zeta((1,1), a_{u_k}^N(z, x))\} / \Im_z).$$

С учетом того, что $E\zeta((1,1), \phi^N(z, x)) = 1$ и $E\zeta((1,1), a_{u_k}^N(z, x)) = 1$, получим, что почти наверное по мере P

$$\exp\{\zeta(z, \phi^N(z, x))\} = (\exp\{\zeta((1,1), \phi^N(z, x))\} / \Im_z)$$

и

$$\exp\{\zeta(z, a_{u_k}^N(z, x))\} = (\exp\{\zeta((1,1), a_{u_k}^N(z, x))\} / \Im_z).$$

Следовательно,

$$\exp\{\zeta(z, \phi^N(z, x))\} = \lim_{k \in K_N} \exp\{\zeta(z, a_{u_k}^N(z, x))\}.$$

Далее положим, что $\Omega_N^z = \{\omega : \omega \in \Omega, \xi(\cdot, \omega) \in C, |\xi(z', \omega)| \leq N, z' \leq z\}$. По определению последовательности для $i \geq 0$ имеем

$$a_{u_k}^N(z', \xi(\cdot, \omega)) = a_{u_k}^{N+i}(z', \xi(\cdot, \omega)) \text{ для } z' \leq z \text{ и } \omega \in \Omega_N^z.$$

Таким образом,

$$\exp\{\zeta(z, \phi^{N+1}(\omega))\} = \exp\{\zeta(z, \phi^N(\omega))\} \text{ для } z' \leq z \text{ и } \omega \in \Omega_N^z.$$

Оценим

$$0 = \int_{\Omega_N^1} |\exp\{\zeta((1,1), \phi^{N+i}(\omega))\} - \exp\{\zeta((1,1), \varphi^N(\omega))\}|^2 P(d\omega) =$$

$$= \int_{\Omega_N^1} | \int_{[0,1]^2} \exp\{\zeta(z, \phi^{N+i})\} \langle \phi^{N+i}(z), d\xi(z) \rangle -$$

$$- \int_{[0,1]^2} \exp\{\zeta(z, \phi^N)\} \langle \phi^N(z), d\xi(z) \rangle|^2 P(d\omega) =$$

$$= \int_{\Omega_N^1} | \int_{[0,1]^2} \exp 2\{\zeta(z, \phi^N)\} |\phi^{N+i}(z, \xi(z, \omega)) - \phi^N(z, \xi(z, \omega))|^2 dz| P(d\omega)$$

и поскольку $\zeta(z, \phi^N) > 0$ по мере P, получим

$$\int_{\Omega_N^1} | \int_{[0,1]^2} |\phi^{N+i}(z, \xi(z, \omega) - \phi^N(z, \xi(z, \omega)|^2 dz| P(d\omega).$$

Этот факт позволяет определить случайную функцию ϕ: $[0, 1]^2 \times C \to R$ следующим образом: $\phi(z, x) = \phi^{N+i}(z, x)$ для $z \in [0,1]^2$, $\|x\| \leq N$, $i \geq 0$. Покажем далее, что $\phi \in a(z, x, \mathfrak{U})$. Поскольку

$$\exp\{\zeta((1,1), \phi^N(z, x))\} = weak \lim_{k \in K_1} \exp\{\zeta((1,1), a_{u_k}^N(z, x))\},$$

то ввиду слабой сходимости в $L_2(\Omega, \Im, P)$ существует выпуклая комбинация $\exp\{\zeta((1,1), a_{u_k}^N(z,x))\}$, сходящаяся к $\exp\{\zeta((1,1), \phi^N(z,x))\}$ в топологии пространства $L_2(\Omega, \Im, P)$, т.е. для любого n некоторых неотрицательных λ_i^n, $i = 1, \ldots, n$, $\sum_{i=1}^{n} \lambda_i^n = 1$, имеет место

$$\lim_{n\to\infty} E\left| \exp\{\zeta((1,1), \phi^N(z,x))\} - \sum_{i=1}^{n} \lambda_i^n \exp\{\zeta((1,1), a_{u_i}^N(z,x))\} \right| = 0. \qquad (4)$$

Положим $\rho_n(z) = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i^n \exp\{\zeta((1,1), a_{u_i}^N(z,x))\}$ и применим к этой функции те же рассуждения, что к функции $\rho(z)$ в лемме 3. Тогда получим, что $\rho_n(z) = \exp\{\zeta((1,1), \psi_n(z))\}$ почти наверное по мере P, а $\psi_n(z,x)$ является выпуклой комбинацией $a_{u_i}^N(z,x)$. Поскольку множество $a(z,x,\mathfrak{U})$ выпукло и замкнуто, а все $a_{u_i}^N(z,x)$ принадлежат $a(z,x,\mathfrak{U})$ для $\|x\| \le N$, получим $\psi_n(z,x) \in a(z,x,\mathfrak{U})$ для $\|x\| \le N$.

Далее оценим

$$E|\exp\{\zeta((1,1), \phi^N(z,x))\} - \exp\{\zeta((1,1), \psi_n(z,x))\}|^2 =$$

$$= E\left| \int_{[0,1]^2} \exp\{\zeta(z, \phi^N)\}\langle \phi^N(z), d\xi(z)\rangle - \int_{[0,1]^2} \exp\{\zeta(z, \psi_n)\}\langle \psi_n(z), d\xi(z)\rangle \right|^2 =$$

$$= E\int_{[0,1]^2} |\exp\{\zeta(z, \phi^N(z,x))\}\phi^N(z,x) - \exp\{\zeta((1,1), \psi_n(z,x))\}\psi_n(z,x)|^2 dz =$$

$$= E\int_{[0,1]^2} \left| \exp\{\zeta(z, \phi^N(z,x))\}\phi^N(z,x) - \sum_{i=1}^{n} \lambda_i^n \exp\{\zeta((1,1), a_{u_i}^N(z,x))\} \right|^2 dz.$$

Последнее матожидание в силу (4) стремится к нулю при $n \to \infty$. Отсюда получим, что по крайней мере для подпоследовательностей выполняется равенство

$$\exp\{\zeta(z, \phi^N(z,\xi))\}\phi^N(z, \xi(\cdot,\omega)) = \lim_{n\to\infty} \exp\{\zeta((1,1), \psi_n(z,\xi))\}\psi_n(z, \xi(\cdot,\omega))$$

почти везде по произведению мер $l \otimes P$, где l — мера Лебега на $[0,1]^2$.

Кроме того, почти всюду по P имеем $\zeta(z, \phi^N(z,\xi)) = E\{\zeta((1,1), \phi^N(z,\xi)) / \Im_z\}$ и $\zeta(z, \psi_n(z,\xi)) = E\{\zeta((1,1), \psi_n(z,\xi)) / \Im_z\}$, т.е. из (4) получаем

$$\lim_{n\to\infty} \int_{[0,1]^2} E|\exp\{\zeta(z, \phi^N)\} - \exp\{\zeta(z, \psi_n)\}|^2\, dz = 0;$$

таким образом,

$$\exp\{\zeta(z, \psi_n)\}(\omega) \to \exp\{\zeta(z, \phi^N)\}(\omega),\ n \to \infty, \text{ почти всюду по } l \otimes P,$$

$$\psi_n(z, \xi(z,\omega)) \to \phi^N(z, \xi(z,\omega)),\ n \to \infty, \text{ почти всюду по } l \otimes P.$$

Из замкнутости $a(z, x, \mathfrak{U})$ следует $\phi^N(z, \xi(z)) \in a(z, \xi, \mathfrak{U})$ для $\|\xi\| \le N$ почти всюду по $l \otimes P$.

Таким образом, доказано следующее утверждение.

Лемма 4. В условиях 1–6 множество плотностей D выпукло в пространстве $L_1(\Omega, \mathfrak{I}, P)$.

Из лемм 2–4 непосредственно следует теорема.

Теорема 3. Пусть выполнены условия 1–6. Тогда множество плотностей D слабо компактно в топологии пространства $L_1(\Omega, \mathfrak{I}, P)$.

Определим допустимые управления для уравнения (1) как все возможные отображения $u: [0,1] \times C \to \mathfrak{U}$ и обозначим класс допустимых управлений $\widetilde{U}$. Обозначим также μ меру в пространстве C, соответствующую случайному полю $B^{H,H'}(z)$.

Теорема 4. Пусть множество допустимих управлений U непусто. Тогда существует $u^* \in U$ такое, что $J(u^*) \le J(u)$ для всех $u \in U$.

Доказательство. Функцию стоимости можно записать как

$$J(u) = \int_C c(z, x, u(z, x)\zeta(a_u)\mu(dz).$$

Поскольку функция $c(t, x, u)$ ограничена и измерима, $J(u)$ — линейна относительно $\zeta(a_u)$, то множество $\{\zeta(a_u), u \in \widetilde{U}\}$ слабо компактно в пространстве $L_1(C, B, \mu)$. Таким образом, получаем необходимый результат.

Теорема 4 дает достаточные условия существования оптимального управления решением стохастического дифференциального уравнения (1) при функции стоимости интегрального вида.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Deriyeva O.M., Pepelyayeva T.A. On the control problem for one type of stochastic processes // Cybernetics and Systems Analysis. — 2004. — N 1. — P. 116–122.
2. Кнопов П.С., Дериева Е.Н. О задаче управления решением стохастического дифференциального уравнения с адитивным дробным броуновским процессом // Проблемы управления и информатики. — 2010. — № 3. — С. 78–85.
3. Erraoui M., Nualart D., Ouknine Y. Hyperbolic stochastic partial differential equations with additive frsactional Brownian sheet. Math. Prepr. / Series N 307 (2002). — Universitat de Barselona. — 20 p.
4. Alos E., Mazet O., Nualart D. Stochastic calculus with respect to Gaussian processes // Annals of Probability. — 2001. — **29.** — P. 766–801.
5. Cairoli R., Walsh J.B. Stochastic integrals in the plane // Acta Math. — 1975. — **134.** — P. 111–183.
6. Girsanov I.V. On transforming a certain class of stochastic processes by absolutely continuous substitution of measures // Theor. Probability Appl.— 1960. — **5.** — P. 285–301.
7. Dunkan T., Varaiya P. On the solution of a stochastic control system // SIAM J. Control. — 1971. — **9**, N 3. — P. 354–371.
8. Benes V.E. Existence of optimal stochastic control laws // SIAM J. Control. — 1971. — **9**, N 3. — P. 446–472.

Поступила 17.03.2011