КИБЕРНЕТИКА

В.А. МИХАЙЛЮК

УДК 519.854

ПОДХОД К ОЦЕНКЕ СЛОЖНОСТИ ВЕРОЯТНОСТНЫХ ПРОЦЕДУР ПОСТОПТИМАЛЬНОГО АНАЛИЗА ДИСКРЕТНЫХ ЗАДАЧ ОПТИМИЗАЦИИ

Ключевые слова: *постоптимальный анализ, ZPP-, RP-вероятностные полиномиальные процедуры постоптимального анализа.*

В настоящее время привлечение элементов случайности при разработке алгоритмов стало стандартным подходом. Эффективность и простота составляют основу случайных алгоритмов, что часто делает рандомизацию своеобразным трамплином для решения сложных задач в разнообразных приложениях. Случайность становится неотъемлемой частью развития систем прикладного программного обеспечения особенно в области связи, криптографии, обработки данных, дискретной оптимизации. Существует много случаев, когда для детерминированных вычислений требуется огромное время, тогда как могут быть успешно применены случайные методы. Однако при выигрыше во времени для случайных алгоритмов усиливается риск вычисления неправильного ответа, и этот риск можно свести до минимума.

При решении конкретной оптимизационной задачи с фиксированным набором входных данных обычно появляется большое количество информации, лишь часть которой может быть использована для решения именно этой задачи. Остальная информация теряется. Это обстоятельство ставит проблему целесообразного задействования избыточной информации для решения других оптимизационных задач, в том или ином смысле «близких» к исходной.

Постоптимальный анализ дискретных оптимизационных задач [1–4] предусматривает решение следующих вопросов.

— Как изменится оптимальное решение конкретной задачи, если определенным образом изменить значения ее коэффициентов?

— Каким образом использовать информацию, полученную при решении некоторой задачи конкретным методом, для решения измененной задачи?

— Какую минимальную дополнительную информацию необходимо накопить при решении исходной задачи в целях эффективного решения измененной задачи?

Представляют интерес элементы случайности, вносимые в проведение постоптимального анализа дискретных задач оптимизации и рассмотрение вероятностных постоптимальные процедур. (Здесь используются результаты из работ [5, 6].)

1. НЕКОТОРЫЕ ПОНЯТИЯ ТЕОРИИ ВЕРОЯТНОСТНЫХ ВЫЧИСЛЕНИЙ

В дальнейшем не будем говорить о разнице между проблемами распознавания свойств (разрешения), поиска и оптимизации для NP-полных проблем, поскольку они вычислительно эквивалентны (см. [8]). Дадим некоторые необходимые в дальнейшем понятия и определения [7–9].

Рассмотрим два подхода к определению вероятностной машины Тьюринга (ВМТ).

Определение 1 [9] (on-line ВМТ). Вероятностная машина Тьюринга в отличие от недетерминированной машины Тьюринга вместо недетерминированного перехода в два состояния выбирает один из вариантов с равной вероятностью.

Определение 2 [9] (off-line ВМТ). Вероятностная машина Тьюринга представляет собой детерминированную машину Тьюринга (ДМТ), имеющую дополнительно источник случайных битов, любое число которых она может заказать и загрузить на отдельную ленту и затем использовать в вычислениях обычным для МТ образом.

Оба определения ВМТ эквивалентны. Более того, они вполне соответствуют обычному компьютеру, к которому подключен внешний генератор случайных последовательностей на основе случайных физических процессов.

Определение 3 [7]. Пусть A — случайный алгоритм, который допускает ответ в виде знака ? (не знаю). Будем говорить, что A — алгоритм Лас Вегаса для функции F, если для каждого входа x

$$P[A(x) = F(x)] \geq \frac{1}{2}, \tag{1}$$

$$P[A(x) = ?] = 1 - P[A(x) = F(x)] \leq \frac{1}{2}. \tag{2}$$

Условие (2) исключает неправильный ответ, так как дается правильный ответ или ответ ?. Если $A(x)$ — полиномиальная ВМТ, то соответствующий класс сложности — ZPP.

Определение 4 [7]. Случайный алгоритм A называется алгоритмом Лас Вегаса, вычисляюшим функцию F, если $P[A(x) = F(x)] = 1$ для произвольного входа x. Модели из определений 3 и 4 эквивалентны, поскольку каждую из них можно свести к другой.

Определение 5 [7]. Пусть A — случайный алгоритм и (Σ, L) — проблема распознавания свойств. Будем говорить, что A — алгоритм Монте-Карло с односторонней ошибкой (1МС-алгоритм), если $P[A(x) = 1] \geq \frac{1}{2}$ для каждого $x \in L$ и $P[A(x) = 0] = 1$ для каждого $x \notin L$. Если A — полиномиальная ВМТ, то соответствующий класс сложности — RP.

Определение 6 [7]. Пусть F — функция. Будем считать, что случайный алгоритм A есть алгоритм Монте-Карло с двусторонними ошибками (2МС-алгоритм), если существует действительное ε, $0 < \varepsilon \leq \frac{1}{2}$, такое, что $P[A(x) = F(x)] \geq \frac{1}{2} + \varepsilon$ для каждого входа x из F. Если $A(x)$ — полиномиальная ВМТ, то соответствующий класс сложности — BPP.

Определение 7 [7]. Пусть F — функция. Будем считать, что случайный алгоритм A является алгоритмом Монте-Карло (МС-алгоритм), вычисляющий F, если $P[A(x) = F(x)] > \frac{1}{2}$ для каждого входа x из F. Если $A(x)$ — полиномиальная ВМТ, то соответствующий класс сложности — PP.

Справедливы следующие включения классов сложности проблем [8, 9]:

$$P \subseteq ZPP \subseteq RP \subseteq NP \subseteq PP, \quad (3)$$

$$RP \subseteq BPP \subseteq PP. \quad (4)$$

2. О κ-ЭФФЕКТИВНОМ ПОСТОПТИМАЛЬНОМ АНАЛИЗЕ ЗАДАЧ ДИСКРЕТНОЙ ОПТИМИЗАЦИИ

Введем формализацию понятия эффективного вероятностного проведения постоптимального анализа для задач дискретной оптимизации.

Пусть Π — некоторая NP-трудная оптимизационная проблема (возможно, и NP-полная), I — экземпляр проблемы (задачи) Π. Каждому экземпляру I задачи Π поставлено в соответствие множество $\{\delta(I)\}$ экземпляров задачи Π. Постоптимальный анализ для пары $(I, \{\delta(I)\})$ дает ответ на вопрос: как, зная оптимальное решение экземпляра I $(\{\mathrm{opt}(I)\})$, найти оптимальное решение (решения) I' задач из множества $\{\delta(I)\}$ $(\{\mathrm{opt}(I')\})$. Введем понятие κ-эффективного (κ — один из классов ZPP, RP, PP) постоптимального сведения экземпляров задачи $\Pi(\propto_{efp}^{\kappa})$.

Определение 8. Будем считать, что экземпляр $I' \in \Pi$ κ-эффективно (κ представляет ZPP, RP или PP) постоптимально сводится к экземпляру $I \in \Pi$, если существует такая полиномиально вычислимая на ВМТ из класса κ функция $f(\cdot)$, что $\mathrm{opt}(I') = f(\mathrm{opt}(I))$, т.е. $I \propto_{efp}^{\kappa} I'$ (f — сложность, число тактов ВМТ).

Согласно определению 8 введены сведения $\propto_{efp}^{ZPP}$, $\propto_{efp}^{RP}$, $\propto_{efp}^{PP}$.

Определение 9. Для фиксированного экземпляра $I \in \Pi$ и фиксированного $\kappa \in \{ZPP, RP, PP\}$ имеем $C_{\kappa}(I) = \{I' : I \propto_{efp}^{\kappa} I'\}$.

Определение 10. Проведение постоптимального анализа для пары $(I, \{\delta(I)\})$ назовем κ-эффективным, если $\{\delta(I)\} \subseteq C_{\kappa}(I)$.

Теорема 1. Пусть $\kappa \in \{ZPP, RP\}$. Если $\kappa \neq NP$, то существует такая пара $(I, \{\delta(I)\})$, для которой проведение постоптимального анализа не является κ-эффективным.

Доказательство проведем для случая $\kappa = RP$ (аналогично для $\kappa = ZPP$). Пусть $\{\Pi\}$ — множество всех экземпляров задачи Π и экземпляр $I_1 \in \{\Pi\}$ такой, что для него существует полиномиальный алгоритм Монте-Карло с односторонней ошибкой (1МС-алгоритм), который дает точное решения задачи (такой экземпляр для каждой NP-трудной проблемы Π существует, и он зависит от особенностей задачи Π). Допустим, что для произвольной пары $(I, \{\delta(I)\})$ проведение постоптимального анализа является RP-эффективным.

Положим $I = I_1 \in \{\Pi\}$, $\{\delta(I)\} = \{\Pi\} \setminus I_1$ и рассмотрим пару $(I, \{\delta(I)\})$. Согласно определению 10 $\{\Pi\} \setminus I_1 \subseteq C_{RP}(I_1)$, отсюда для произвольного $I' \in \{\Pi\}$ получаем I_1, $I_1 \propto_{efp}^{RP} I'$.

В силу выбора I_1 произвольный экземпляр $I \in \{\Pi\}$ можно решить за полиномиальное время на ВМТ Монте-Карло с односторонней ошибкой; таким образом, $NP \subseteq RP$. С учетом (3) (т.е. $RP \subseteq NP$) получим $RP = NP$, что и доказывает теорему 1.

Теорема 2. Для произвольной пары $(I, \{\delta(I)\})$ проведение постоптимального анализа является PP-эффективным.

Доказательство следует из соотношения $NP \subseteq PP$ (см. (3)). Таким образом, изучение PP-эффективного постоптимального анализа не представляет интереса.

Определение 11. Проблему (распознавания свойств, поиска, оптимизации) будем называть κ-полиномиально разрешимой ($\kappa \in \{ZPP, RP, PP\}$), если существует полиномиальная ВМТ из класса κ, которая дает (точное) решение проблемы.

3. О κ-ПОЛИНОМИАЛЬНОЙ РАЗРЕШИМОСТИ ОДНОЙ ЗАДАЧИ ДИСКРЕТНОЙ ОПТИМИЗАЦИИ

Рассмотрим дискретную оптимизационную задачу (P) вида

$$\min\{f(x) = f(x_1, \ldots, x_n)\}, \ x \in G \subset B^n = \{0,1\}^n,$$

а также семейство $\{P_I\}$ дискретных задач (P_I) оптимизации

$$\min\{f(x) = f(x_1, \ldots, x_n)\}, \ x \in G_I \subset B^n = \{0,1\}^n.$$

Здесь $I \in \{I_1, I_2, \ldots, I_q\}$ — экземпляры семейства задач (P_I), $q = poly(n)$, среди $I_1, \ldots, I_q$ есть экземпляр, который соответствует задаче (P) (т.е. $\exists\, j\colon G_{I_j} = G$).

Для произвольных $x, y \in B^n$ $x \le y$ тогда и только тогда, когда $x_i \le y_i$, $i = 1, \ldots, n$.

По аналогии с [5] рассмотрим теорему.

Теорема 3. Задача (P) κ-полиномиально разрешима, если одновременно выполняются следующие условия.

1. Существует полиномиальная ВМТ из класса κ ($\kappa \in \{ZPP, RP, PP\}$) для определения допустимого решения x задачи (P) такого, что не существует $x' \in G$, $x' \le x$, $x' \ne x$.

2. Для произвольного допустимого решения x^* задачи (P) существует экземпляр I_p семейства (P_I) такой, что x^* — оптимальное решение относительно G_{I_p}.

3. Имеет место сводимость $I_1 \propto_{efp}^{\kappa} I_2 \propto_{efp}^{\kappa} \ldots \propto_{efp}^{\kappa} I_q$.

Доказательство. Согласно п. 1 допустимое решение задачи (P) можно получить за время $poly(n)$.

Согласно п. 2 строим экземпляр I_p (за время не большее, чем $poly(n)$) семейства (P_I) такой, что x^* — оптимальное решение относительно допустимого множества G_{I_p}.

Согласно п. 3 за время, не большее $poly(n) \cdot poly(n) = [poly(n)]^2$, получаем оптимальное решение x^* задачи (P) (поскольку в последовательности $I_1, \ldots, I_q$ $\exists j\colon G_{I_j} = G$).

Таким образом, за время, не большее $poly(n) + poly(n) + [poly(n)]^2$, получим оптимальное решение задачи (P).

4. СЛОЖНОСТЬ ВЕРОЯТНОСТНОГО ПОСТОПТИМАЛЬНОГО АНАЛИЗА ЗАДАЧИ О ПОКРЫТИИ МНОЖЕСТВАМИ

Задачу о покрытии множествами $\Pi(A, c)$ будем рассматривать в постановке

$$\min\left\{f(x) = \sum_{i=1}^{n} c_i x_i \,\middle|\, x \in Q(A)\right\},$$

$$Q(A) = \left\{x \in B^n \,\middle|\, \sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j \ge 1, \ i = 1, \ldots, m\right\},$$

$B^n = \{0,1\}^n$; $A = \{a_{ij}\}$, $i = 1, \dots, m$; $j = 1, \dots, n$; A — (m,n)-булева матрица $(m \le n)$; $c_i > 0$, $i = 1, \dots, n$.

Для булевых (m,n)-матриц $A = \{a_{ij}\}$, $B = \{b_{ij}\}$ введем метрику $\rho(A,B) = \sum_{i,j} |a_{ij} - b_{ij}|$.

Пусть $M = \{1, \dots, m\}$, $N = \{1, \dots, n\}$, $K_1 = \{i_1, \dots, i_k\}$ — некоторая выборка из N объемом k $(1 \le k < n,\ k < m)$.

Точка $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_n) \in B^n$ такая, что $\alpha_j = 1$ при $j \in K_1$ и $\alpha_j = 0$ при $j \in N \setminus K_1$, а $\alpha^i = (\alpha_1^i, \dots, \alpha_n^i) \in B^n$ такая, что $\alpha_i^i = 1$, $\alpha_j^i = 0$ при $j \ne i$. Рассмотрим класс $\{A_\alpha\}$ булевых (m,n)-матриц $A = \{A_{ij}\}$. Матрица $A \in \{A_\alpha\}$ тогда и только тогда, когда A не содержит одинаковых и нулевых строк и, кроме того, выполняются условия:

1) матрица A имеет подматрицу $A^1 = (\alpha^{i_1} \dots \alpha^{i_k})$;

2) матрица A имеет подматрицу $A^2 = \{a_{ij}\}(i \in M \setminus K_1, j \in N)$ такую, что для произвольного $i \in M \setminus K_1$ выполняется $\sum_{j \in K_1} a_{ij} \ge 1$, остальные элементы в A^2 произвольны.

Пусть вектор $x^* = (x_1^*, \dots, x_n^*) \in B^n$ такой, что $x_{i_1}^* = \dots = x_{i_k}^* = 1$, остальные координаты вектора x^* равны нулю, $A^* \in \{A_\alpha\}$.

Лемма 1 [5]. Имеем x^* — (единственное) оптимальное решение экземпляра I задачи $\Pi(A^*, c)$.

Пусть x^* — оптимальное решение экземпляра I задачи о покрытии $\Pi(A,c)$ и A' — такая, что $\rho(A, A') = 1$.

Возникает вопрос: можно ли за полиномиальное время определить, остается ли x^* оптимальным решением задачи $\Pi(A', c)$, и если нет, то найти это решение. В связи с этим пусть $Find(\Pi(A', c), x^*)$ — процедура, которая определяет оптимальное решение x^* задачи $\Pi(A', c)$, исходя из оптимального решения x^* задачи $\Pi(A,c)$ (результат x^*). Если эта процедура соответствует сводимости $\propto_{efp}^{\kappa}$ $(\kappa \in \{ZPP, RP\})$, то назовем ее κ-вероятностной полиномиальной процедурой постоптимального анализа. При этом экземпляр I' $(I' \in \Pi(A', c))$ κ-эффективно постоптимально сводится к I $(I \in \Pi(A,c))(I \propto_{efp}^{\kappa} I')$.

Теорема 4. Пусть $\kappa \in \{ZPP, RP\}$. Если $\kappa \ne NP$, то существует экземпляр I задачи $\Pi(A,c)$, когда для $Find(\Pi(A', c), x^*)$ не существует κ-вероятностной полиномиальной процедуры постоптимального анализа.

Доказательство проведем для случая $\kappa = RP$ (аналогично для случая $\kappa = ZPP$).

Воспользуемся результатами из [5]. Допустим, что для произвольного экземпляра I задачи $\Pi(A,c)$ для $Find(\Pi(A', c), x^*)$ существует RP- вероятностная полиномиальная процедура постоптимального анализа (обозначим ее $Find_{RP}(\Pi(A', c), x^*)$).

Пусть A — произвольный (приближенный) полиномиальный алгоритм из класса RP для решения произвольного $I \in \Pi(A,c)$ и $x^* = (x_1^*, \dots, x_n^*) \in B^n$ такой, что $x_{i_1}^* = \ldots = x_{i_k}^* = 1$ (остальные координаты вектора x^* равны нулю) есть результат работы алгоритма A на экземпляре I. Пусть $A^* \in \{A_\alpha\}$ — матрица, соответствующая x^*, в силу леммы 1 алгоритм A для экземпляра I^* (экземпляр $\Pi(A, c)$ с матрицей $A = A^*$) даст точное решение задачи, тогда п. 1 теоремы 3 выполнен.

Пусть $T(A)$ для произвольной булевой (m, n)-матрицы A является преобразованием матрицы A с заменой произвольного одного ее элемента: 0 на 1 или 1 на 0. Будем считать, что $A' = T(A)$, если после применения к A преобразования T получена матрица A' (очевидно, что $\rho(A, A') = 1$).

Произвольную матрицу A можно получить из матрицы A^*, применяя не более $m \cdot n$ преобразований T:

$$A^* \xrightarrow{T} A_1 \xrightarrow{T} A_2 \xrightarrow{T} \ldots \xrightarrow{T} A_k = A, \tag{5}$$

где $A_1 = T(A^*)$, $\rho(A_1, A^*) = 1$, $A_{i+1} = T(A_i)$, $\rho(A_{i+1}, A_i) = 1$, $i = 1, \ldots, k-1$; $k \le m \cdot n \le n^2$, т.е. выполнен п. 2 теоремы 3.

Применив к последовательности (5) RP-вероятностную полиномиальную процедуру постоптимального анализа $Find_{RP}(\Pi(A', c), x^*)$ k раз ($k \le m \cdot n \le n^2$), получим, что для произвольного экземпляра I задачи $\Pi(A, c)$ существует последовательность $I^*, I_1, I_2, \ldots, I_k, I_{k+1}$ экземпляров, причем

$$I^* \propto_{efp}^{RP} I_1 \propto_{efp}^{RP} I_2 \propto_{efp}^{RP} \ldots \propto_{efp}^{RP} I_k \propto_{efp}^{RP} I_{k+1},$$

где $I_1 \in \Pi(A^*, c), I_2 \in \Pi(A_1, c), I_3 \in \Pi(A_2, c), \ldots, I_k \in \Pi(A_{k-1}, c)$, $I_{k+1} \in \Pi(A_k, c), A_k = A$.

Выполнен п. 3 теоремы 3. Отсюда следует, что задача $\Pi(A, c)$ — RP-полиномиально разрешима, т.е. принадлежит классу RP. Показано, что $NP \subseteq RP$. Отсюда, поскольку $RP \subseteq NP$ (см. (3)), получим $RP = NP$. Теорема доказана.

5. СЛОЖНОСТЬ ВЕРОЯТНОСТНОГО ПОСТОПТИМАЛЬНОГО АНАЛИЗА ЗАДАЧИ О РАНЦЕ

Рассмотрим одномерную булеву задачу о ранце в постановке $(R(a, b, c))$:

$$\max \left\{ f(x) = \sum_{i=1}^{n} c_i x_i \,\middle|\, x \in Q(a, b) \right\}, \; Q(a, b) = \left\{ x \in B^n \,|\, \sum_{j=1}^{n} a_j x_j \le b \right\}.$$

Будем считать, что все a_j, c_j и b — целые неотрицательные числа: $a = (a_1, \ldots, a_n) \in Z^n$, $c = (c_1, \ldots, c_n) \in Z^n$, $b \in Z^1$, $Z^n = \{x = (x_1, \ldots, x_n) \,|\, x_i \ge 0$, x_i — целые, $i = 1, \ldots, n\}$. Известно, что задача $R(a, b, c)$ — NP-полная [10].

Для $x = (x_1, \ldots, x_n, x_{n+1}) \in Z^{n+1}$, $y = (y_1, \ldots, y_n, y_{n+1}) \in Z^{n+1}$ введем метрику $\rho(x, y) = \sum_{i=0}^{n+1} |x_i - y_i|$. Пусть $\bar{a} = (a_1, \ldots, a_n, b) \in Z^{n+1}$, а вектор $\bar{a}'$ такой, что $\rho(\bar{a}, \bar{a}') = 1$ (задачу $R(a, b, c)$ будем также обозначать как $R(\bar{a}, c)$).

Пусть $N = \{1, 2, \ldots, n\}$, $K_1 = \{i_1, \ldots, i_k\}$ — некоторая выборка из N объема k $(1 \le k \le n)$, $x^* = (x_1^*, \ldots, x_n^*) \in B^n$ такой, что $x_{i_1}^* = \ldots = x_{i_k}^* = 1$, остальные координаты вектора x^* равны нулю. Пусть вектор $\bar{a}^* = (a_1^*, \ldots, a_n^*, b^*)$ такой, что $a_{i_1}^* = \ldots = a_{i_k}^* = 1$, $a_j^* = k + 1$ при $j \in N \setminus K_1$, $b^* = k$.

Лемма 2 [5]. Имеем x^* — оптимальное решение экземпляра I задачи $R(\bar{a}^*, c)$, которое является единственным .

Возникает вопрос: если x^* — оптимальное решение экземпляра I задачи $R(\bar{a}, c)$, то можно ли за полиномиальное время определить, остается ли x^* оптимальным решением задачи $R(\bar{a}', c)$, а если это не так, то определить решение. Тогда пусть $Find(R(\bar{a}', c), x^*)$ — процедура, которая определяет оптимальное решение x^* задачи $R(\bar{a}', c)$, исходя из оптимального решения x^* задачи $R(\bar{a}, c)$ (результат x^*). Если эта процедура соответствует сводимости $\propto_{efp}^{\kappa}$ $(\kappa \in \{ZPP, RP\})$, то будем ее называть κ-вероятностной полиномиальной процедурой постоптимального анализа. При этом экземпляр I' $(I' \in \Pi(A', c))$ κ-эффективно постоптимально сводится к I $(I \in \Pi(A, c))(I \propto_{efp}^{\kappa} I')$.

Теорема 5. Пусть $\kappa \in \{ZPP, RP\}$. Если $\kappa \neq NP$, то существует экземпляр I задачи $R(\bar{a}, c)$, когда для $Find(R(\bar{a}', c), x^*)$ не существует κ-вероятностной полиномиальной процедуры постоптимального анализа.

Доказательство проведем для случая $\kappa = ZPP$ (аналогично для случая $\kappa = RP$). Воспользуемся результатами из [5]. Допустим, что для произвольного экземпляра I задачи $R(\bar{a}, c)$ процедуры $Find(R(\bar{a}', c), x^*)$ существует ZPP-вероятностная полиномиальная процедура постоптимального анализа (обозначим ее $Find_{ZPP}(R(\bar{a}', c), x^*)$).

Пусть A — произвольный (приближенный) полиномиальный алгоритм из класса ZPP для решения произвольного $I \in R(\bar{a}, c)$, а $x^* = (x_1^*, \ldots, x_n^*) \in B^n$ такой, что $x_{i_1}^* = \ldots = x_{i_k}^* = 1$, остальные координаты вектора x^*, равные нулю, представляют результат работы алгоритма A на I. Пусть вектор $\bar{a}^* = (a_1^*, \ldots, a_n^*, b^*)$ такой, что $a_{i_1}^* = \ldots = a_{i_k}^* = 1$, $a_j^* = k+1$ при $j \in N \setminus K_1$, $b^* = k$. В силу леммы 2 алгоритм A для экземпляра I^* (экземпляр $R(\bar{a}, c)$ при $\bar{a} = \bar{a}^*$) даст точное решение задачи, тогда п. 1 теоремы 3 выполнен.

Будем считать, что компоненты вектора $\bar{a}$ ограничены сверху константой c, которая не зависит от размерности задачи n. Будем исходить из вектора $\bar{a}^*$, применяя процедуру $Find(R(\bar{a}', c), x^*)$. Пусть $T(a)$ для произвольного вектора $a \in Z^{n+1}$ является преобразованием вектора a с увеличением или уменьшением ровно одного его компонента на единицу. Будем считать, что $a' = T(a)$, если после применения к a преобразования T получен вектор a' (очевидно, что $\rho(a, a') = 1$).

Произвольный вектор $\bar{a}$ можно получить из вектора $\bar{a}^*$, применяя не более $c \cdot (n+1)$ преобразований T:

$$\bar{a}^* \xrightarrow{T} \bar{a}^1 \xrightarrow{T} \ldots \xrightarrow{T} \bar{a}^k = \bar{a}, \tag{6}$$

где $\bar{a}^1 = T(\bar{a}^*)$, $\rho(\bar{a}^1, \bar{a}^*) = 1$; $\bar{a}^{i+1} = T(\bar{a}^i)$, $\rho(\bar{a}^{i+1}, \bar{a}^i) = 1$, $i = 1, \ldots, k-1$; $k \leq c \cdot (n+1)$, т.е. выполнен п. 2 теоремы 3.

Применяя к последовательности (6) ZPP-вероятностную полиномиальную процедуру постоптимального анализа $Find_{ZPP}(R(\bar{a}', c), x^*)$ k раз $(k \leq c \cdot (n+1))$, получим для произвольного экземпляра I задачи $R(\bar{a}, c)$ последовательность

$I^*, I_1, I_2, \ldots, I_k, I_{k+1}$ экземпляров, причем

$$I^* \propto_{efp}^{ZPP} I_1 \propto_{efp}^{ZPP} I_2 \propto_{efp}^{ZPP} \ldots \propto_{efp}^{ZPP} I_k \propto_{efp}^{ZPP} I_{k+1},$$

$$I_1 \in R(\bar{a}^*, c),\ I_2 \in R(\bar{a}^1, c),\ I_3 \in R(\bar{a}^2, c), \ldots, I_k \in R(\bar{a}^{k-1}, c),$$

$$I_{k+1} \in R(\bar{a}^k, c),\ \ \bar{a}^k = \bar{a}.$$

Выполнен п. 3 теоремы 3. Отсюда следует, что задача $R(\bar{a}, c)$ ZPP-полиномиально разрешима, т.е. принадлежит классу ZPP, т.е. $NP \subseteq ZPP$. Поскольку $ZPP \subseteq NP$ (см. (3)), получим $ZPP = NP$. Теорема доказана.

Таким образом, теоремы 1, 4 и 5 свидетельствуют о сложности вероятностного проведения постоптимального анализа дискретных задач оптимизации, что имело место для детерминированного случая [5].

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Козерацкая Л.Н., Лебедева Т.Т., Сергиенко И.В. Вопросы устойчивости, параметрический и постоптимальный анализ задач дискретной оптимизации // Кибернетика. — 1983. — № 4. — С. 71–80.
2. Сергиенко И.В., Шило В.П. Задачи дискретной оптимизации. Проблемы, методы решения, исследования. — Киев: Наук. думка, 2003. — 261 с.
3. Geoffrion A.M., Nauss R. Parametric and postoptimality analysis in integer linear programming // Management Science. — 1977. — **23**, N 5. — P. 453–466.
4. Roodman G.M. Postoptimality analysis in zero one programming by implicit enumeration // Naval Res. Logist. Quart. — 1972. — **19**, N 3. — P. 435–447.
5. Михайлюк В.А. Общий подход к оценке сложности постоптимального анализа дискретных задач оптимизации // Кибернетика и системный анализ. — 2010. — **46**, № 2. — С. 134–141.
6. Михайлюк В.А. Об оценках числовых характеристик сложности постоптимального анализа дискретных задач оптимизации // Там же. — № 5. — С. 136–142.
7. Hromkovich J. Design and analysis of randomized algorithms. Introduction to design paradigms. — Berlin; Heidelberg: Springer-Verlag, 2005. — 280 p.
8. Goldreich O. Computational complexity. A conceptual perspective. — Cambridge University Press, 2008. — 606 p.
9. Кузюрин Н.Н., Фомин С.А. Сложность вычислений и анализ алгоритмов. — М.: МФТИ, 2007. — 312 с.
10. Гэри М., Джонсон Д. Вычислительные машины и труднорешаемые задачи. — М.: Мир, 1982. — 416 с.

Поступила 16.12.2010