УДК 519.6

Е.Р. АШРАФОВА

ОПТИМАЛЬНОЕ УПРАВЛЕНИЕ СОСРЕДОТОЧЕННЫМИ ИСТОЧНИКАМИ В СИСТЕМАХ С РАСПРЕДЕЛЕННЫМИ ПАРАМЕТРАМИ НА КЛАССАХ ИМПУЛЬСНЫХ И ХЕВИСАЙДОВСКИХ ФУНКЦИЙ

Ключевые слова: *оптимальное управление, импульсное управление, функция Хевисайда, система с распределенными параметрами, градиент функционала*.

ВВЕДЕНИЕ

При управлении реальными объектами реализация оптимальных управляющих воздействий из класса непрерывных, кусочно-непрерывных функций вызывает технические сложности. Поэтому важное практическое значение имеет решение задач оптимального управления на технически легко реализуемых классах функций. К таким классам можно отнести системы с управляющими воздействиями из классов импульсных, кусочно-постоянных функций, в частности функций Хевисайда.

В настоящее время теория импульсного управления представляет развивающийся раздел оптимизации динамических систем [1–5]. Одним из основных этапов исследования оптимизации систем является проблема получения конструктивных условий оптимальности, учитывающих специфику этого класса систем и позволяющих использовать их для численного решения задач.

В данной статье рассматривается задача оптимального управления сосредоточенными источниками для процессов, описываемых уравнениями в частных производных, например параболического типа. Здесь находятся оптимальные значения как мощности и времени воздействия импульсных и хевисайдовских управлений, так и оптимальные значения мест размещения самих сосредоточенных источников.

Подобные задачи оптимального управления в классах кусочно-постоянных и импульсных функций рассмотрены, в частности, для случая обыкновенных дифференциальных уравнений [6, 7]. В работе [8] исследована задача размещения нефтяных скважин и управления их дебитами. В настоящей статье получены конструктивные аналитические формулы для градиента функционала в задачах оптимального управления сосредоточенными управляющими воздействиями, мощности которых принадлежат классу импульсных и хевисайдовских функций. Эти формулы позволяют для численного решения задачи использовать известные эффективные методы оптимизации первого порядка [9].

ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ ОПТИМАЛЬНОГО УПРАВЛЕНИЯ

Рассмотрим задачу минимизации функционала

$$J(\upsilon)=\alpha_1\int_{\Omega}[u(x,T;\upsilon)-U(x)]^2\,dx+\alpha_2\Phi(\upsilon) \tag{1}$$

при условии, что состояние управляемого объекта описывается следующей краевой задачей относительно параболического уравнения:

$$u_t=\operatorname{div}(\sigma(x)\operatorname{grad}u(x,t))+\sum_{i=1}^{L}\upsilon_i(t)b_i(x,t)\delta(x-\xi^i),\ x\in\Omega\subset E^n,\ 0<t\le T, \tag{2}$$

$$u(x,0)=\varphi(x),\ x\in\Omega, \tag{3}$$

$$u(x,t)\Big|_{x\in\Gamma}=\mu(x,t),\ 0<t\le T,\ \Gamma=\partial\Omega. \tag{4}$$

Здесь $u=u(x,t)=u(x,t;\upsilon)$ — фазовое состояние объекта, определяемое из решения краевой задачи (2)–(4) при соответствующем допустимом значении оптимизируемой управляющей вектор-функции мощности источников $\upsilon(t)=$ $=(\upsilon_1(t),\ldots.,\upsilon_L(t))$, размещенных в точках $\xi^i=(\xi_1^i,\ldots,\xi_n^i)\in\Omega$, $i=1,\ldots,L$; L — заданное число управляющих воздействий (источников); $\varphi(x)$, $\mu_1(t)$, $\mu_2(t)$, $b_1(x,t),\ldots,b_L(x,t)$, $U(x)$, $\Phi(\upsilon)$, $\alpha_1>0$, $\alpha_2>0$, $\sigma>0$, $l>0$, $T>0$ — заданные функции и величины, определяющие исследуемый процесс и критерий управления им; $\delta(x)=\delta(x_1)\cdot\delta(x_2)\cdot\ldots\cdot\delta(x_n)$, $\delta(x_i)$ — обобщенная функция Дирака [2, 10, 11].

Предполагается, что участвующие в задаче (1)–(4) функции и параметры удовлетворяют всем условиям существования и единственности решения краевой задачи.

Ниже исследуется задача оптимального управления (1)–(4) на следующих двух классах управляющих воздействий.

1. Управляющие воздействия из класса импульсных управлений. Управляющая вектор-функция

$$\upsilon_i(t)=\sum_{j=1}^{m_i}q_{ij}\delta(t-\theta_{ij}),\ M=\sum_{i=1}^{L}m_i,\ i=1,..,L, \tag{5}$$

определяется конечномерным вектором $\upsilon=(q,\theta)\in E^{2LM}$, в котором q_{ij} — значение импульсной мощности i-го источника в момент времени θ_{ij}, $j=1,\ldots,m_i$, $i=1,\ldots,L$; m_i — заданное число импульсных воздействий i-го источника, т.е.

$$\upsilon=(q_{11},q_{12},\ldots,q_{1m_1},\ldots,q_{Lm_L},\theta_{11},\theta_{12},\ldots,\theta_{1m_1},\ldots,\theta_{Lm_L}). \tag{6}$$

Пусть имеются следующие ограничения на управляющие параметры:

$$\sum_{j=1}^{L}\sum_{j=1}^{m_i}q_{ij}^2\le Q,\ \underline{q}_i\le q_{ij}\le\overline{q}_i,\ 0\le\zeta<\theta_{ij}-\theta_{i-1j}\le\eta, \tag{7}$$

$$\theta_{ij}\in[0,T],\ j=1,\ldots,m_i,\ i=1,\ldots,L,$$

где $Q,\underline{q}_j,\overline{q}_j,\zeta,\eta$ заданы.

Задача оптимального управления процессом (1)–(7) заключается как в оптимизации функционирования источников, определяемых вектором $\upsilon = (q, \theta)$, так и самих координат размещения источников $\xi^1, \ldots, \xi^L$ в области Ω.

2. Управляющие воздействия из класса функций Хевисайда. В этом случае управляющие функции

$$\upsilon_i(t) = q_i \chi(t - \theta_i), \ i = 1, \ldots, L, \tag{8}$$

где

$$\chi(t - \theta_i) = \begin{cases} 0, & t < \theta_i, \\ 1, & t \ge \theta_i, \end{cases}$$

является функцией Хевисайда, определяются конечномерным вектором

$$\upsilon = (q, \theta) = (q_1, \ldots, q_L, \theta_1, \ldots, \theta_L) \in E^{2L}, \tag{9}$$

i-й компонент которого является мощностью i-го источника $\upsilon_i = q_i$, начинающего свое влияние в момент времени $\upsilon_{L+i} = \theta_i$, $i = 1, \ldots, L$. Пусть имеются ограничения на управляющие параметры

$$\underline{q}_i \le q_i \le \bar{q}_i, \ 0 \le \theta_i \le T, \ i = 1, \ldots, L. \tag{10}$$

Здесь $\underline{q}_i, \bar{q}_i, L, Q$ заданы. Таким образом, каждый компонент управляющей вектор-функции (управления) $\upsilon(t)$ является кусочно-постоянной функцией с одним переключением значения и определяется вектором (q, θ), компонентами которого являются θ_i — время включения воздействия и величина q_i, т.е. $\upsilon_i(t) = \upsilon_i(t; q_i, \theta_i)$, $i = 1, \ldots, L$ [7].

Задачи (1)–(7) и (1)–(4), (8)–(10), с одной стороны, можно отнести к классу параметрических задач оптимального управления, с другой — они являются задачами конечномерной оптимизации; для вычисления ее целевой функции (1) при заданных значениях конечномерного вектора (q, θ) требуется решить краевую задачу (2)–(4) и вычислить интеграл, участвующий в (1). Рассматриваемые задачи оптимального управления эквивалентны задачам оптимизации конечномерной функции $J(\upsilon)$ в замкнутой допустимой области; следовательно, они имеют непустые множества оптимальных решений. Поскольку в рассматриваемых задачах управление имеет разрывы, то классического решения задачи (2)–(4) не существует.

Под обобщенным решением краевой задачи (2)–(4), соответствующим управлению $\upsilon(t)$ из гильбертова пространства $H = L_2([0, T])$, будем понимать функцию $u(x, t) = u(x, t; \upsilon)$ из пространства $L_2(\Omega \times [0, T])$, удовлетворяющую интегральному тождеству

$$\int_\Omega u(x, T)\psi(x, T)\, dx - \int_\Omega \varphi(x)\psi(x, 0)\, dx - \int_0^T \int_\Omega u(\psi_t + \operatorname{div}\,(\sigma(x) \operatorname{grad} \psi))\, dx dt -$$

$$- \sum_{i=1}^L \int_0^T \int_\Omega \psi(x, t) \upsilon_i(t) b_i(x, t) \delta(x - \xi^i)\, dx dt = 0$$

для всех $\psi = \psi(x, t) \in H^{2,1}(\Omega \times [0, T])$ таких, что $\left.\dfrac{\partial \psi(x, t)}{\partial n}\right|_{x \in \Gamma} = 0$ [11].

ГРАДИЕНТ ФУНКЦИОНАЛА ПРИ ИМПУЛЬСНОМ УПРАВЛЕНИИ

Покажем, что функционал (1) дифференцируем в H. Для этого выберем произвольные допустимые управления $\upsilon = \upsilon(x, t; \upsilon)$ и $\upsilon + \Delta\upsilon = \upsilon(x, t; \upsilon) + \Delta\upsilon(x, t; \upsilon)$. Пусть $u(x, t; \upsilon)$, $u(x, t; \upsilon + \Delta\upsilon)$ — соответствующие этим управлениям решения краевой задачи (2)–(4). Обозначим $\Delta u(x, t) = u(x, t; \upsilon + \Delta\upsilon) - u(x, t; \upsilon)$. Из (2)–(4) следует, что $\Delta u(x, t)$ является обобщенным решением краевой задачи

$$\Delta u_t = \operatorname{div}\,(\sigma(x) \operatorname{grad} \Delta u(x, t)) + \sum_{i=1}^L \Delta\upsilon^i(t) \delta(x - \xi^i), \ x \in \Omega, \ 0 < t \le T, \tag{11}$$

$$\Delta u(x,0)=0,\ x\in\Omega, \tag{12}$$

$$\Delta u(x,t)\big|_{x\in\Gamma}=0,\ 0<t\le T. \tag{13}$$

Тогда приращение функционала (1) можно записать в виде

$$\Delta J(v)=J(v+\Delta v)-J(v)=2\alpha_1\int_\Omega [u(x,T;v)-U(x)]\Delta u(x,T)\,dx+$$

$$+\alpha_1\int_\Omega |\Delta u(x,T)|^2\,dx+\alpha_2(\Phi(v+\Delta v)-\Phi(v)).$$

Пусть $\psi(x,t)$ — решение следующей вспомогательной сопряженной краевой задачи [11, 12]:

$$\psi_t+\operatorname{div}\sigma(x)\operatorname{grad}\psi=0,\ x\in\Omega,\ 0<t\le T, \tag{14}$$

$$\psi(x,T)=2\alpha_1(u(x,T)-U(x)),\ x\in\Omega, \tag{15}$$

$$\psi(x,t)\big|_{x\in\Gamma}=0,\ 0<t\le T. \tag{16}$$

Из (11)–(16) имеем

$$2\alpha_1\int_\Omega (u(x,T)-U(x))\Delta u(x,T)\,dx=\int_\Omega \psi(x,T)\Delta u(x,T)\,dx=\int_\Omega\int_0^T \frac{\partial}{\partial t}(\psi\Delta u)\,dt\,dx=$$

$$=\int_0^T\int_\Omega(\psi_t\Delta u+\psi\Delta u_t)\,dx\,dt=\int_0^T\int_\Omega \operatorname{div}(\sigma(x)(-\Delta u\operatorname{grad}\psi+\psi\operatorname{grad}\Delta u))\,dx\,dt+$$

$$+\sum_{i=1}^{L}\int_0^T\int_\Omega \psi(x,t)b_i(x,t)\Delta v_i(t)\delta(x-\xi^i)\,dx\,dt=$$

$$=\int_0^T\int_\Gamma \sigma(x)(-\Delta u\operatorname{grad}\psi+\psi\operatorname{grad}\Delta u)\,ds\,dt+\sum_{i=1}^{L}\int_0^T\int_\Omega \psi(x,t)b_i(x,t)\Delta v_i(t)\delta(x-\xi^i)\,dx\,dt.$$

Используя следующую оценку, полученную в [12] для более общего случая управлений из класса измеримых функций

$$\int_\Omega |\Delta u(x,T)|^2\,dx\le C\int_0^T |\Delta v(t)|^2\,dt, \tag{17}$$

где $C>0$ — постоянная, не зависящая от выбора Δv, для приращения функционала (1) имеем

$$\Delta J(v)=\sum_{i=1}^{L}\int_0^T\int_\Omega \psi(x,t)b_i(x,t)\Delta v_i(t)\delta(x-\xi^i)\,dx\,dt+$$

$$+\alpha_2\Phi(v+\Delta v)-\alpha_2\Phi(v)+o(\|\Delta v\|^2). \tag{18}$$

Используя (18), получаем формулы для производных $\dfrac{dJ(v)}{dq_{ij}}$, $j=1,\dots,m_i$, $i=1,\dots,L$. Приращение функционала, получаемого лишь в результате приращения Δq_{ij} аргумента q_{ij} вектора v из (6), т.е. $\Delta v=(\Delta q,0)\in E^{2LM}$, $\Delta q=(0,\dots,\Delta q_{ij},\dots,0)\in E^{ML}$, можно записать следующим образом:

$$\Delta_{q_{ij}}J(v)=\int_0^T\int_\Omega \psi(x,t)b_i(x,t)\Delta q_{ij}\delta(t-\theta_{ij})\delta(x-\xi^i)\,dx\,dt+$$

$$+\alpha_2(\Phi_2(q+\Delta q,\theta)-\Phi_2(q,\theta))+o(\|\Delta q\|)=$$

$$=\psi(\xi^i,\theta_{ij})b_i(\xi^i,\theta_{ij})\Delta q_{ij}+\alpha_2(\Phi_2(q+\Delta q,\theta)-\Phi_2(q,\theta))+o(\|\Delta v\|).$$

Разделив обе части этого выражения на Δq_{ij} и перейдя к пределу при $\Delta q_{ij} \to 0$ с учетом того, что $o(\|\Delta v\|)/\Delta q_{ij} \to 0$, имеем формулы

$$\frac{dJ(v)}{dq_{ij}} = -\psi(\xi^i, \theta_{ij}) b_i(\xi^i, \theta_{ij}) + \alpha_2 \frac{\partial \Phi_2(v)}{\partial q_{ij}}, \ i = 1, \ldots, L, \tag{19}$$

определяющие компоненты градиента функционала по мощности импульсных воздействий в задаче (1)–(7).

Теперь получим формулы для производных $\dfrac{dI(v)}{d\theta_{ij}}$, $j = 1, \ldots, m_i$, $i = 1, \ldots, L$. Для этого введем δ_ε-функцию [2]:

$$\delta_\varepsilon(x-\zeta) = \begin{cases} 1/\varepsilon, & x \in [\zeta-\varepsilon, \zeta], \\ 0, & x \notin [\zeta-\varepsilon, \zeta], \end{cases} \tag{20}$$

где $\varepsilon > 0$ — малый параметр. Очевидно, что при ε, стремящемся к нулю, функция $\delta_\varepsilon(x)$ приближается к обобщенной функции Дирака $\delta(x)$. Дадим параметру ζ приращение $\Delta\zeta = \varepsilon$. Это равнозначно тому, что δ_ε-функция получит следующее приращение:

$$\Delta_\zeta \delta_\varepsilon(x-\zeta) = \begin{cases} 0, & x \notin [\zeta-\varepsilon, \zeta+\Delta\zeta], \\ -1/\varepsilon, & x \in [\zeta-\varepsilon, \zeta+\Delta\zeta-\varepsilon], \\ 1/\varepsilon, & x \in [\zeta+\Delta\zeta-\varepsilon, \zeta+\Delta\zeta]. \end{cases} \tag{21}$$

При $\Delta\zeta < \varepsilon$ приращение δ_ε-функции имеет вид

$$\Delta_\zeta \delta_\varepsilon(x-\zeta) = \begin{cases} 0, & x \notin [\zeta-\varepsilon, \zeta+\Delta\zeta], \ x \in [\zeta+\Delta\zeta-\varepsilon, \zeta], \\ -1/\varepsilon, & x \in [\zeta-\varepsilon, \zeta+\Delta\zeta-\varepsilon], \\ 1/\varepsilon, & x \in [\zeta, \zeta+\Delta\zeta], \end{cases} \tag{22}$$

а при $\Delta\zeta > \varepsilon$ имеем

$$\Delta_\zeta \delta_\varepsilon(x-\zeta) = \begin{cases} 0, & x \notin [\zeta-\varepsilon, \zeta+\Delta\zeta], \ x \in [\zeta, \zeta+\Delta\zeta-\varepsilon], \\ -1/\varepsilon, & x \in [\zeta-\varepsilon, \zeta], \\ 1/\varepsilon, & x \in [\zeta+\Delta\zeta-\varepsilon, \zeta+\Delta\zeta]. \end{cases} \tag{23}$$

Если аргумент θ_{ij} вектора v из (6) получил приращение $\Delta\theta_{ij}$, т.е. $\Delta v = (0, \Delta\theta_{ij}) \in E^{2LM}$, $\Delta\theta = (0, \ldots, \Delta\theta_{ij}, \ldots, 0) \in E^{LM}$, то для приращения функционала, используя (16), будем иметь

$$\Delta_{\theta_{ij}} J(v) = \int_0^T \int_\Omega \psi(x,t) b_i(x,t) q_i \Delta_{\theta_{ij}} \delta_\varepsilon(t-\theta_{ij}) \delta(x-\xi^i) dx dt +$$

$$+ \alpha_2 (\Phi(q, \theta+\Delta\theta) - \Phi(q, \theta)) + o(\|\Delta v\|). \tag{24}$$

При $\Delta\theta_{ij} = \varepsilon$, учитывая (21), из (24) имеем

$$\Delta_{\theta_{ij}} J(v) = \frac{q_{ij}}{\varepsilon} \int_\Omega \left(\int_{\theta_{ij}+\Delta\theta_{ij}-\varepsilon}^{\theta_{ij}+\Delta\theta_{ij}} \psi(x,t) b_i(x,t) dt - \int_{\theta_{ij}-\varepsilon}^{\theta_{ij}+\Delta\theta_{ij}-\varepsilon} \psi(x,t) b_i(x,t) dt \right) \delta(x-\xi^i) dx +$$

$$+ \alpha_2 (\Phi(q, \theta+\Delta\theta) - \Phi(q, \theta)) + o(\|\Delta v\|) =$$

$$= \frac{q_i}{\varepsilon} \int_\Omega \left(\int_{\theta_{ij}-\varepsilon}^{\theta_{ij}} \psi(x, t+\Delta\theta_{ij}) b_i(x, t+\Delta\theta_{ij}) - \psi(x,t) b_i(x,t) \, dt \right) \delta(x-\xi^i) dx +$$

$$+ \alpha_2 (\Phi(q, \theta+\Delta\theta) - \Phi(q, \theta)) + o(\|\Delta v\|). \tag{25}$$

В случае $\Delta\theta_{ij} > \varepsilon$, учитывая (23), имеем

$$\Delta_{\theta_{ij}} J(v) = \frac{q_{ij}}{\varepsilon} \int_\Omega \left(\int_{\theta_{ij}+\Delta\theta_{ij}-\varepsilon}^{\theta_{ij}+\Delta\theta_{ij}} \psi(x,t) b_i(x,t) dt - \int_{\theta_{ij}-\varepsilon}^{\theta_{ij}} \psi(x,t) b_i(x,t) \, dt \right) \delta(x-\xi^i) dx +$$

$$+\alpha_2(\Phi(q,\theta+\Delta\theta)-\Phi(q,\theta))+o(\|\Delta v\|)=$$

$$=\frac{q_{ij}}{\varepsilon}\int_\Omega\left(\int_{\theta_{ij}-\varepsilon}^{\theta_{ij}}\psi(x,t+\Delta\theta_{ij})b_i(x,t+\Delta\theta_{ij})-\psi(x,t)b_i(x,t)dt\right)\delta(x-\xi^i)\,dx+$$

$$+\alpha_2(\Phi(q,\theta+\Delta\theta)-\Phi(q,\theta))+o(\|\Delta v\|). \tag{26}$$

Разлагая функцию $\psi(x,t)b_i(x,t)$ в ряд Тейлора в окрестности точки t, получаем

$$\int_{\theta_{ij}-\varepsilon}^{\theta_{ij}}[\psi(x,t+\Delta\theta_{ij})b_i(x,t+\Delta\theta_{ij})-\psi(x,t)b_i(x,t)]dt=\int_{\theta_{ij}-\varepsilon}^{\theta_{ij}}\Bigg[(\psi(x,t)b_i(x,t))'_t\Delta\theta_{ij}+$$

$$+(\psi(x,t)b_i(x,t))''_{tt}\frac{\Delta\theta_{ij}^2}{2}+o(\Delta\theta_{ij}^2)\Bigg]dt=\Delta\theta_{ij}(\psi(x,t)b_i(x,t))\Big|_{\theta_{ij}-\varepsilon}^{\theta_{ij}}+$$

$$+(\psi(x,t)b_i(x,t))'_t\frac{\Delta\theta_{ij}^2}{2}\Bigg|_{\theta_{ij}-\varepsilon}^{\theta_{ij}}+o(\Delta\theta_{ij}^2). \tag{27}$$

С учетом (27) в формулах (25), (26), разделив обе части на $\Delta\theta_{ij}$ и перейдя к пределу $\Delta\theta_{ij}\to 0,\ \varepsilon\to 0$, получим

$$\frac{dJ(v)}{d\theta_{ij}}=q_{ij}(\psi(\xi^i,\theta_{ij})b_i(\xi^i,\theta_{ij}))'_t+\alpha_2\frac{\partial\Phi(v)}{\partial\theta_{ij}},\ \ j=\overline{1,m_i},\ \ i=\overline{1,L}. \tag{28}$$

В случае $\Delta\theta_{ij}<\varepsilon$ из (24), учитывая (22), имеем

$$\Delta_{\theta_{ij}}J(v)=\frac{q_{ij}}{\varepsilon}\int_\Omega\left(\int_{\theta_{ij}}^{\theta_{ij}+\Delta\theta_{ij}}\psi(x,t)b_i(x,t)dt-\int_{\theta_{ij}-\varepsilon}^{\theta_{ij}+\Delta\theta_{ij}-\varepsilon}\psi(x,t)b_i(x,t)dt\right)\delta(x-\xi^i)dx+$$

$$+\alpha_2(\Phi(q,\theta+\Delta\theta)-\Phi(q,\theta))+o(\|\Delta v\|)=$$

$$=\frac{q_{ij}}{\varepsilon}\int_\Omega\left(\int_{\theta_{ij}}^{\theta_{ij}+\Delta\theta_{ij}}(\psi(x,t)b_i(x,t)-\psi(x,t-\varepsilon)b_i(x,t-\varepsilon))dt\right)\delta(x-\xi^i)\,dx+$$

$$+\alpha_2(\Phi(q,\theta+\Delta\theta)-\Phi(q,\theta))+o(\|\Delta v\|). \tag{29}$$

Разлагая функцию $\psi(x,t)b_i(x,t)$ в ряд Тейлора в окрестности точки t, разделив обе части формулы (29) на $\Delta\theta_{ij}$ и перейдя к пределу при $\Delta\theta_{ij}\to 0,\ \varepsilon\to 0$, получаем

$$\frac{dJ(v)}{d\theta_{ij}}=q_i\left(\lim_{\varepsilon\to 0}\lim_{\Delta\theta_{ij}\to 0}\frac{\psi(\xi^i,\theta_{ij}+\Delta\theta_{ij})b_i(\xi^i,\theta_{ij}+\Delta\theta_{ij})-\psi(\xi^i,\theta_{ij})b_i(\xi^i,\theta_{ij})}{\Delta\theta_{ij}}+\right.$$

$$\left.+\lim_{\varepsilon\to 0}\lim_{\Delta\theta_{ij}\to 0}\frac{\Delta\xi^i}{2}\frac{(\psi(\xi^i,\theta_{ij}+\Delta\theta_{ij})b_i(\xi^i,\theta_{ij}+\Delta\theta_{ij})-\psi(\xi^i,\theta_{ij})b_i(\xi^i,\theta_{ij}))'_t}{\Delta\theta_{ij}}\right)+$$

$$+\alpha_2\lim_{\Delta\theta_{ij}\to 0}\frac{\Phi(q,\theta_{ij}+\theta_{ij})-\Phi_2(q,\theta_{ij})}{\Delta\theta_{ij}}, \tag{30}$$

откуда следует совпадение этой формулы с формулой (28), определяющей компоненты градиента функционала по моментам импульсных воздействий в задаче (1)–(7).

ГРАДИЕНТ ФУНКЦИОНАЛА ПРИ УПРАВЛЕНИИ ИЗ КЛАССА ФУНКЦИЙ ХЕВИСАЙДА

Для получения компонентов градиента $\dfrac{dJ(v)}{dq_i}$, $i=1,\ldots,L$, функционала задачи (1)–(4), (8)–(10) при управлении из класса функций Хевисайда используем формулу приращения функционала (18), получаемого лишь за счет допустимого приращения Δq_i аргумента q_i вектора υ из (9), т.е. $\Delta\upsilon = (\Delta q, 0) \in E^{2L}$, $\Delta q = (0, \ldots, \Delta q_i, \ldots, 0) \in E^L$:

$$\Delta_{q_i} J(\upsilon) = \int_0^T \int_\Omega \psi(x,t) b_i(x,t) \Delta q_i \chi(t-\theta_i) \delta(x-\xi^i)\, dx\, dt +$$

$$+ \alpha_2 (\Phi(q+\Delta q, \theta) - \Phi(q, \theta)) + o(||\Delta q||) =$$

$$= \int_{\theta_i}^T \psi(\xi^i, t) b_i(\xi^i, t) \Delta q_i + \alpha_2 (\Phi(q+\Delta q, \theta) - \Phi(q, \theta)) + o(||\Delta\upsilon||). \qquad (31)$$

Разделив обе части на Δq_i и перейдя к пределу при $\Delta q_i \to 0$ с учетом того, что $o(||\Delta\upsilon||)/\Delta q_i \to 0$, будем иметь

$$\frac{dJ(\upsilon)}{dq_i} = -\int_{\theta_i}^T \psi(\xi^i, t) b_i(\xi^i, t) + \alpha_2 \frac{\partial\Phi(\upsilon)}{\partial q_i}, \; i = 1, \ldots, L. \qquad (32)$$

Для получения формулы для производных $(dJ(\upsilon))/d\theta_i$, $i = 1, \ldots, L$, аргументу θ_i вектора (9) дадим приращение $\Delta\theta_i$, т.е. $\Delta\upsilon = (0, \Delta\theta) \in E^{2L}$, $\Delta\theta = (0, \ldots, \Delta\theta_i, \ldots, 0) \in E^L$. Сначала будем считать, что $\Delta\theta_i > 0$. Это равнозначно тому, что функция Хевисайда получит приращение

$$\Delta\chi(t-\theta_i) = \chi(t-(\theta_i + \Delta\theta_i)) - \chi(t-\theta_i) = \begin{cases} 0, & t \notin [\theta_i, \theta_i + \Delta\theta_i], \\ -1, & t \in [\theta_i, \theta_i + \Delta\theta_i]. \end{cases} \qquad (33)$$

Тогда для приращения функционала будем иметь

$$\Delta_{\theta_i} J(\upsilon) = \int_0^T \int_\Omega \psi(x,t) b_i(x,t) q_i \delta(x-\xi^i) \Delta\chi(t-\theta_i)\, dx dt +$$

$$+ \alpha_2 (\Phi(q, \theta+\Delta\theta) - \Phi(q, \theta)) + o(||\Delta\upsilon||) = -q_i \int_{\theta_i}^{\theta_i+\Delta\theta_i} \psi(\xi^i, t) b_i(\xi^i, t)\, dx dt +$$

$$+ \alpha_2 (\Phi(q, \theta+\Delta\theta) - \Phi(q, \theta)) + o(||\Delta\upsilon||). \qquad (34)$$

При $\Delta\theta_i < 0$ приращение $\Delta\chi(t-\theta_i)$ функции Хевисайда имеет вид

$$\Delta\chi(t-\theta_i) = \begin{cases} 0, & t \notin [\theta_i - |\Delta\theta_i|, \theta_i], \\ 1, & t \in [\theta_i - |\Delta\theta_i|, \theta_i]. \end{cases} \qquad (35)$$

Тогда приращение функционала будет иметь следующий вид:

$$\Delta_{\theta_i} J(\upsilon) = q_i \int_{\theta_i - |\Delta\theta_i|}^{\theta_i} \psi(\xi^i, t) b_i(\xi^i, t)\, dx dt + \alpha_2 (\Phi(q, \theta+\Delta\theta) - \Phi(q, \theta)) + o(||\Delta\upsilon||). \qquad (36)$$

В обоих случаях, учитывая теорему о среднем значении интеграла [13], приращение функционала будет иметь вид

$$\Delta_{\theta_i} J(\upsilon) = \mp q_i \psi(\xi^i, t) b_i(\xi^i, t)\big|_{t=\theta_i} |\Delta\theta_i| + \alpha_2 (\Phi(q, \theta+\Delta\theta) - \Phi(q, \theta)) + o(||\Delta\upsilon||),$$

где знак $-$ соответствует случаю $\Delta\theta_i > 0$, а знак $+$ соответствует случаю $\Delta\theta_i < 0$. Разделив обе части на $\Delta\theta_i$ и перейдя к пределу при $\Delta\theta_i \to 0$, независимо от знака $\Delta\theta_i$ будем иметь

$$\frac{\partial J(\upsilon)}{\partial\theta_i} = -q_i \psi(\xi^i, \theta_i) b_i(\xi^i, \theta_i) + \alpha_2 \frac{\partial\Phi(q, \theta)}{\partial\theta_i}, \; i = 1, \ldots, L. \qquad (37)$$

Следовательно, в пространстве управляющих параметров $(q, \theta) \in E^{2L}$ компоненты градиента функционала в задаче (1)–(4), (8)–(10) определяются формулами (32), (37).

Замечание 1. В обеих задачах в случае оптимизации координат источников $\xi^i,\ldots,\xi^L$ можно получить формулы производных $(dI(v))/d\xi^i_j$, $j=1,\ldots,n$, $i=1,\ldots,L$. Для этого снова воспользуемся δ_ε-функцией (20). Для приращения функционала, получаемого за счет приращения $\Delta\xi^i_j$ j-й координаты i-го источника ξ^i_j, используя выражение (18), имеем

$$\Delta_{\xi^i_j} J(v)=\int_0^T\int_\Omega \psi(x,t)b_i(x,t)v_i(t)\Delta_{\xi^i_j}\delta(x-\xi^i_j)\,dx\,dt. \quad (38)$$

Проводя аналогичные операции, как при получении выражений компонентов градиента функционала в обеих задачах по параметру θ, получаем формулы для производных функционала по координатам источников $\xi^1,\ldots,\xi^L$ в виде

$$\frac{dJ(v)}{d\xi^i_j}=\int_0^T (\psi(\xi^i_j,t)b_i(\xi^i_j,t))'_{x_j}v_i(t)dt,\ j=1,\ldots,n,\ i=1,\ldots,L. \quad (39)$$

Замечание 2. Проведенные выше исследования распространяются как на другие постановки краевых задач относительно параболических уравнений, так и на другие типы уравнений, описывающие процессы с распределенными параметрами.

РЕЗУЛЬТАТЫ ЧИСЛЕННЫХ ЭКСПЕРИМЕНТОВ

Приведем результаты применения полученных формул градиента функционала в решении следующих модельных задач.

Задача 1. Рассмотрим параметрическую задачу, когда $L=1$, т.е. имеется только одно импульсное воздействие на процесс. Оптимизируемыми параметрами являются мощность, время и координата источника импульсного воздействия: $v=(q,\theta,\xi)$:

$$u_t=u_{xx}+(x+t)q\delta(x-\xi)\delta(t-\theta),\ 0<x<1,\ 0<t\le 1,$$
$$u(x,0)=e^x,\ \ 0\le x\le 1,\ u(0,t)=t+1,\ u(1,t)=e^{t+1},\ 0<t\le 1,$$
$$0\le\xi\le 1,\ 0\le\theta\le 1,\ 0<q\le 10,$$
$$J(v)=\int_0^1[u(x,1)-4]^2dx+0{,}1(q-3)^2+0{,}1(\xi-0{,}5)^2+0{,}1(\theta-0{,}3)^2\to\min.$$

Точное оптимальное значение управляющего вектора неизвестно. Задача с использованием полученных выше формул решалась численно. В табл. 1 приведены сравнительные значения градиента функционала, рассчитанные с применением полученных в статье формул и с использованием центральной разностной схемы аппроксимации производных при различных значениях управляющего вектора (q_0,ξ_0,θ_0).

Таблица 1

Номер эксперимента	Значения градиента функционала		
	Оптимизируемые параметры $(q_0,\xi_0,\ \theta_0)$	(I'_q,I'_ξ,I'_θ) по разностной схеме аппроксимации	(I'_q,I'_ξ,I'_θ) по полученным формулам
1	(3; 0,6; 0,1)	(0,400; –0,0364; –0,010)	(400; –0,0364; –0,009)
2	(6; 0,2; 0,2)	(0,600; –0,0559; –0,012)	(0,600; –0,0559; –0,0126)
3	(1; 0,2; 0,4)	(–0,398; –0,054; 0,0312)	(–0,399; –0,054; 0,0312)

В табл. 2 приведены результаты численных экспериментов с использованием метода проекции сопряженных градиентов при различных начальных значениях управляющих параметров $v_0=(q_0,\theta_0,\xi_0)$ с точностью оптимизации $\varepsilon=0{,}001$, где q_*,ξ_*,θ_* — полученные оптимальные значения. Аппроксимация краевой задачи проводилась с использованием неявной схемы метода сеток с погрешностью $O(h_x^2 + h_t)$, включая краевые условия, где h_x, h_t — шаги сетки соответственно по переменным x и t, $h_x = 0{,}01$, $h_t = 0{,}01$.

Таблица 2

Номер эксперимента	Численные результаты решения задачи 1				
	(q_0, ξ_0, θ_0)	(q_*, ξ_*, θ_*)	J_0	J_*	Число итераций
1	(3; 0,6; 0,1)	(2,995; 0,479; 0,219)	2,973	2,568	9
2	(6; 0,2; 0,2)	(2,998; 0,490; 0,229)	3,477	2,568	4
3	(1; 0,2; 0,4)	(3,00; 0,494; 0,219)	2,978	2,568	3

Задача 2. Рассмотрим следующую задачу:

$$u_t = u_{xx} + (x^2 + t^2) \sum_{i=1}^{2} q_i \delta(x - \xi_i) \delta(t - \theta_i), \; 0 < x < 1, \; 0 < t \le 1,$$

$$u(x, 0) = e^x, \; 0 \le x \le 1, \; u(0, t) = t + 1, \; u(1, t) = e^{t+1}, \; 0 < t \le 1,$$

$$0 \le \xi_i \le 1, \; 0 \le \theta_i \le 1, \; 0 < q_i \le 10, \; i = 1, 2,$$

$$J(v) = \int_0^1 [u(x, 1) - 4]^2 \, dx + 0{,}1 \, [(q_1 - 3)^2 + (q_2 - 4)^2] +$$

$$+ 0{,}1 [(\xi_1 - 0{,}5)^2 + (\xi_2 - 0{,}8)^2] + 0{,}1 [(\theta_1 - 0{,}3)^2 + (\theta_2 - 0{,}5)^2] \to \min.$$

Здесь $L = 2$. Точное оптимальное значение управляющего вектора неизвестно. Задача с использованием полученных выше формул решалась численно. В табл. 3 приведены результаты численных экспериментов с использованием метода проекции сопряженных градиентов для различных начальных значений управляющего вектора $v_0 = (q_0, \theta_0, \xi_0)$ при точности оптимизации $\varepsilon = 0{,}001$. Аппроксимация краевой задачи производилась так же, как и в задаче 1.

Таблица 3

Номер эксперимента	Численные результаты решения задачи 2				
	(q_0, ξ_0, θ_0)	(q_*, ξ_*, θ_*)	J_0	J_*	Число итераций
1	(1; 0,2; 0,4) (3; 0,2; 0,3)	(3,026; 0,491; 0,258) (4,008; 0,860; 0,299)	3,1177	2,5735	11
2	(2; 0,4; 0,74) (6; 0,6; 0,6)	(3,00; 0,486; 0,260) (3,985; 0,888; 0,369)	3,3466	2,5727	12
3	(2; 0,3; 0,2) (4; 0,5; 0,3)	(2,998; 0,488; 0,259) (3,99; 0,911; 0,359)	2,68673	2,5729	36
4	(1; 0.5; 0,2) (2; 0,5; 0,1)	(2,998; 0,488; 0,259) (3,996; 0,910; 0,367)	3,3933	2,5728	15

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В работе исследовано численное решение задач оптимального управления системами с распределенными параметрами, в которых управляющими воздействиями являются сосредоточенные источники, мощности которых определяются классами импульсных и хевисайдовских функций.

Оптимизируемыми являются как мощности и времена воздействия, так и места размещения источников. Получены формулы для компонентов градиента функционала по оптимизируемым параметрам. Формулы позволяют использовать для численного решения задачи эффективные методы оптимизации первого порядка. Рассмотренный в работе процесс описывается параболическим уравнением, но несложно определить аналогичные результаты для других типов дифференциальных уравнений с частными производными.

Полученные результаты могут быть использованы при оптимизации размещения технологических объектов, при проектировании нефтегазодобывающих месторождений, обратных задач экологии и в других проблемах.

Автор выражает искреннюю благодарность профессору К.Р. Айда-заде за ценные советы и внимание к работе.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Бутковский А.Г., Пустыльников Л.М. Теория подвижного управления системами с распределенными параметрами. — М.: Наука, 1980. — 384 с.
2. Дыхта В.А. Оптимизация динамических систем с разрывными траекториями и импульсными управлениями // Соросовский образовательный журнал. — 1999. — № 8. — С. 110–115.
3. Миллер Б.М. Условия оптимальности в задачах обобщенного управления. I. Необходимые условия оптимальности. II. Достаточные условия оптимальности // Автоматика и телемеханика. — 1992. — № 3. — С. 50–58; — 1992. — № 4. — С. 39–48.
4. Миллер Б.М., Рубинович Е.Я. Оптимизация динамических систем с импульсными управлениями. — М.: Наука, 2005. — 430 с.
5. Колокольникова Г.А. Необходимые условия второго порядка оптимальности особых и импульсных режимов // Автоматика и телемеханика. — 1990. — № 6. — С. 48–57.
6. Айда-заде К.Р., Ашрафова Е.Р. Управление системами с сосредоточенными параметрами на специальных классах управляющих функций // Автоматика и вычисл. техника. — 2009. — № 3. — С. 47–56.
7. Айда-заде К.Р., Рагимов А.Б. О решении задач оптимального управления на классе кусочно-постоянных функций // Там же. — 2007. — № 1. — С. 27–36.
8. Айда-заде К.Р., Багиров А.Г. О задаче размещения нефтяных скважин и управления их дебитами // Автоматика и телемеханика. — 2006. — № 1. — С. 52–61.
9. Евтушенко Ю.Г. Методы решения экстремальных задач и их применение в системах оптимизации. — М.: Наука, 1982. — 432 с.
10. Тихонов А.Н., Самарский А.А. Уравнения математической физики. — М.: Наука, 1966. – 724 с.
11. Лионс Ж.-Л. Оптимальное управление системами, описываемыми уравнениями с частными производными. — М.: Мир, 1972. — 416 с.
12. Васильев Ф.П. Методы решения экстремальных задач. — М.: Наука, 1981. — 400 с.
13. Фихтенгольц Г.М. Курс дифференциального и интегрального исчисления. — Т. 2. — М.: Наука, 1970. — 800 с.

Поступила 19.01.2011