УДК 539.3

А.Ю. ЧИРКОВ

НЕКОТОРЫЕ ПРИЛОЖЕНИЯ СМЕШАННОГО МЕТОДА КОНЕЧНЫХ ЭЛЕМЕНТОВ К РЕШЕНИЮ ЗАДАЧ МЕХАНИКИ ДЕФОРМИРУЕМОГО ТВЕРДОГО ТЕЛА

Ключевые слова: *теория упругости, теория пластичности, свободные колебания, изгиб пластин, метод конечных элементов, смешанная аппроксимация, устойчивость.*

ВВЕДЕНИЕ

Общепризнано, что прикладные задачи механики деформируемого твердого тела относятся к числу наиболее сложных в математической физике, решить которые, как правило, удается только с помощью приближенных методов. В то же время многие хорошо известные численные методы механики деформируемого тела недостаточно точны и эффективны при решении практических задач, поскольку большая размерность дискретной задачи, а также резкая переменность физико-механических свойств материала и их существенная нелинейность могут привести к потере устойчивости или нарушению сходимости вычислительных процессов. В связи с этим актуальна разработка более совершенного аппарата проведения расчетных исследований, включающего новые методы и алгоритмы решения прикладных задач механики.

В настоящее время универсальным численным методом решения краевых задач механики деформируемого тела является метод конечных элементов (МКЭ). Его эффективность слабо зависит от конфигурации тела, характера граничных условий, закона изменения свойств среды и внешнего воздействия на тело. Наиболее исследованными и широко применяемыми являются классические схемы МКЭ в перемещениях, что отражено во многих публикациях зарубежных и отечественных авторов.

Отмечая достоинства классического МКЭ (КМКЭ), следует учитывать и его недостатки. К наиболее существенным из них относятся разрывная аппроксимация напряжений и деформаций, а также более низкий порядок сходимости аппроксимации для напряжений и деформаций по сравнению с порядком сходимости для перемещений. В то же время напряжения обычно являются основными искомыми функциями в задачах механики деформируемого тела и, следовательно, должны определяться с высокой степенью точности.

Традиционные подходы повышения точности путем увеличения густоты конечно-элементных разбиений или перехода к более сложным конечным элементам не всегда эффективны даже в случае линейных задач. Для нестационарных и нелинейных пространственных задач механики они практически неприемлемы, поскольку увеличение порядка решаемой системы нелинейных алгебраических уравнений и большое количество временных шагов и итераций приводят к значительному росту вычислительных затрат. В связи с этим в численном анализе задач механики деформируемого тела перспективно применение смешанных формулировок МКЭ, в которых напряжения и (или) деформации входят в разрешающие уравнения наряду с перемещениями как равноправные неизвестные. Именно такие формулировки МКЭ и рассморены в настоящей статье.

В задачах теории упругости и пластичности основное преимущество применения смешанных формулировок МКЭ перед классическим подходом МКЭ в форме метода перемещений состоит в уменьшении погрешности аппроксимации для напряжений и деформаций, в возможности точного удовлетворения статическим граничным условиям на поверхности тела, а также в том, что смешанные схемы МКЭ позволяют обеспечивать непрерывность аппроксимации не только для перемещений, но и для напряжений и деформаций.

Существуют различные исходные предпосылки для построения смешанных формулировок МКЭ. В настоящее время можно выделить три подхода, имеющих общие характерные особенности: первый основан на использовании вариационных принципов механики, согласно которым решение краевой задачи сводится к нахождению стационарного значения некоторого вариационного функционала по соответствующим аргументам; второй базируется на двойственно-основной (смешанной) формулировке краевой задачи согласно принципу двойственности; третий основан на обобщенной формулировке краевой задачи и базируется на результатах теории, разработанной Ф. Бреззи [1]. При таком подходе рассматривается смешанная постановка краевой задачи независимо от того, получена ли она из задачи о седловой точке.

Отметим, что при исследовании условий существования, единственности, устойчивости и сходимости приближенных решений, полученных на основе смешанного метода, классические результаты анализа схем МКЭ в перемещениях неприменимы. Необходимые и достаточные условия устойчивости и сходимости смешанных и гибридных методов сформулированы в [1, 2], однако для многих практически важных вариантов смешанных и гибридных схем МКЭ достаточные условия не выполняются.

Таким образом, несмотря на то что смешанные формулировки МКЭ более гибкие, а соответствующие им схемы МКЭ имеют преимущества в точности, они не получили на практике широкого распространения и их применение к решению прикладных задач теории упругости и пластичности весьма ограничено. Насколько известно автору, современные коммерческие программные продукты ориентированы в основном на классический вариант МКЭ и не содержат в своих библиотеках конечных элементов смешанного типа, с помощью которых удается получить ощутимые преимущества в точности и эффективности решения двух- и трехмерных задач теории упругости и пластичности. Это объясняется трудностями практического конструирования смешанной аппроксимации, удовлетворяющей условиям устойчивости и сходимости смешанного метода.

В настоящее время не существует пригодной для всех классов задач механики единой методики построения наилучшей смешанной аппроксимации для напряжений, деформаций и перемещений. В каждом конкретном случае необходимы тщательная проверка правильности построения аппроксимирующих функций и детальный анализ сходимости при их использовании. Кроме того, существует важная для практики задача фактического нахождения дискретного решения, что связано с разработкой и реализацией эффективных вычислительных алгоритмов решения матричных уравнений смешанного метода.

Далее представлены основные результаты, полученные автором за последние два десятилетия при разработке смешанных и гибридных схем МКЭ решения прикладных задач механики деформируемого твердого тела. Предложенные смешанные схемы и алгоритмы МКЭ позволяют повысить точность и эффективность решения задач прочности, колебаний и устойчивости элементов конструкций, а также обеспечить получение устойчивых и надежных численных решений задач указаного типа.

ПРИЛОЖЕНИЕ К ЗАДАЧАМ ТЕОРИИ УПРУГОСТИ

Пусть рассматриваемое тело занимает область Ω и имеет регулярную границу. На одной части границы заданы перемещения, исключающие смещения Ω как жесткого тела, а на другой — поверхностные нагрузки. Кроме того, тело подвержено воздействию массовых сил и начальных деформаций.

Полагаем, что перемещения являются элементами функционального множества U, состоящего из вектор-функций, интегрируемых с квадратом на Ω вместе со своими первыми производными включительно и равных заданным перемещениям на границе тела. Пространство допустимых перемещений U^0 состоит из элементов множества U, удовлетворяющих однородным кинематическим условиям на границе тела.

Напряжения будем рассматривать как элементы функционального множества Z, состоящего из тензор-функций, интегрируемых с квадратом на Ω вместе со своими первыми производными включительно и равных заданным напряжениям на поверхности тела. Пространство допустимых напряжений Z^0 определим как подмножество элементов из множества Z, удовлетворяющих однородным статическим условиям на границе тела.

Полагаем, что деформации, как и напряжения, интегрируются с квадратом на Ω вместе со своими первыми производными включительно и обеспечивают выполнение статических граничных условий на поверхности тела. Множество деформаций с перечисленными свойствами обозначим X. Тогда пространство допустимых деформаций X^0 состоит из элементов множества X, удовлетворяющих однородным статическим условиям на границе тела.

Известно, что задача теории упругости определяется следующей системой уравнений [3]:

- соотношения Коши

$$\varepsilon = B\mathbf{u}; \tag{1}$$

• обобщенный закон Гука

$$\sigma = D(\varepsilon - \xi); \tag{2}$$

• уравнения равновесия и статические граничные условия на поверхности тела, записанные в виде вариационного уравнения Лагранжа

$$(\sigma, B\delta\mathbf{u})_X = \rho(\delta\mathbf{u}) \ \ \forall\, \delta\mathbf{u} \in U^0. \tag{3}$$

Здесь B — линейный дифференциальный оператор, т.е. оператор вычисления малых деформаций ε по заданным перемещениям $\mathbf{u}$; D — линейный самосопряженный положительно определенный ограниченный оператор, соответствующий матрице модулей упругости материала и устанавливающий взаимосвязь между напряжениями σ, полными ε и начальными ξ деформациями; $\rho(\delta\mathbf{u})$ — линейная форма, ассоциируемая с работой поверхностных нагрузок и массовых сил на возможных перемещениях $\delta\mathbf{u} \in U^0$. Приведенные и следующие далее обозначения подробнее описаны в [4].

Уравнения (1)–(3) позволяют сформулировать обобщенную краевую задачу теории упругости в перемещениях. Найти элемент $\mathbf{u} \in U$ такой, что

$$(B\mathbf{u}, B\delta\mathbf{u})_D = \rho(\delta\mathbf{u}) + (\xi, B\delta\mathbf{u})_D \ \ \forall\, \delta\mathbf{u} \in U^0. \tag{4}$$

Использование уравнения (4) для построения сеточных схем приводит к классической формулировке МКЭ в форме метода перемещений. В результате деформации вычисляются дифференцированием приближенных перемещений, найденных из решения задачи в перемещениях, что является основной причиной ухудшения сходимости аппроксимации для деформаций и напряжений по сравнению с вычислением самих перемещений.

Альтернативный подход состоит в изменении обобщенной постановки краевой задачи таким образом, чтобы деформации являлись ее непосредственными аргументами, а не определялись на основе решения задачи в перемещениях. С этой целью сформулируем краевую задачу следующим образом. Найти пару $(\mathbf{u}, \varepsilon) \in U \times X$ такую, что

$$\begin{gathered} (\varepsilon, \delta\varepsilon)_D = (B\mathbf{u}, \delta\varepsilon)_D \ \ \forall\, \delta\varepsilon \in X^0, \\ (\varepsilon, B\delta\mathbf{u})_D = \rho(\delta\mathbf{u}) + (\xi, B\delta\mathbf{u})_D \ \ \forall\, \delta\mathbf{u} \in U^0. \end{gathered} \tag{5}$$

Система уравнений (5) определяет обобщенную постановку краевой задачи теории упругости относительно перемещений и деформаций. Отметим, что получить (5) можно, используя вариационный принцип стационарности функционала Хеллингера–Рейсснера, записанного в форме перемещения–деформации.

Для формулировки конечномерной задачи множества перемещений U и деформаций X аппроксимируем последовательностью конечномерных подмножеств U_h и X_h, где h — определяющий параметр семейства конечномерных множеств, стремящийся в пределе к нулю. Построение множеств U_h и X_h основано на использовании независимой аппроксимации полей перемещений и деформаций с помощью различного набора кусочно-полиномиальных базисных функций [5]. Тогда по аналогии с континуальной задачей (5) сформулируем конечномерную задачу следующим образом. Найти пару $(\mathbf{u}_h, \varepsilon_h) \in U_h \times X_h$ такую, что

$$\begin{gathered} (\varepsilon_h, \delta\varepsilon_h)_D = (B\mathbf{u}_h, \delta\varepsilon_h)_D \ \ \forall\, \delta\varepsilon_h \in X_h^0, \\ (\varepsilon_h, B\delta\mathbf{u}_h)_D = \rho(\delta\mathbf{u}_h) + (\xi, B\delta\mathbf{u}_h)_D \ \ \forall\, \delta\mathbf{u}_h \in U_h^0. \end{gathered} \tag{6}$$

Система уравнений (6) определяет смешанную проекционно-сеточную постановку краевой задачи теории упругости в перемещениях и деформациях. Доказательство корректности и сходимости решений уравнений смешанного метода (6) базируются на результатах теории смешанной аппроксимации, развитой в [4] применительно к задачам теории упругости и пластичности.

Основные положения разработанной теории сводятся к следующему:

• необходимо установить соответствие между полями деформаций Y_h и X_h^0 для классического и смешанного подходов МКЭ;

• ввести проектирующий оператор $I_h : Y_h \to X_h^0$, с помощью которого устанавливается взаимно однозначное соответствие, т.е. каждому элементу из множества Y_h оператор I_h ставит в соответствие его ортогональную проекцию в X_h^0;

• для смешанного метода оператор проектирования I_h порождает разложение пространства деформаций X_h^0 в прямую сумму подпространств $X_h^0 = \mathrm{Im}\,(I_h) \oplus \mathrm{Ker}\,(I_h^*)$.

Отметим, что определенный таким образом оператор ортогонального проектирования I_h играет ключевую роль в анализе устойчивости и сходимости смешанного метода.

Действительно, если деформации представить в виде суммы $\varepsilon_h = \varepsilon_h^0 + \varepsilon_h^*$, $\varepsilon_h^0 \in X_h^0$, $\varepsilon_h^* \in X_h$, где ε_h^* — известные деформации, удовлетворяющие неоднородным граничным условиям на поверхности тела, то с использованием ортопроектора I_h уравнения смешанного метода (6) можно переписать в эквивалентном виде

$$(\varepsilon_h^0, \delta\varepsilon_h)_D = (I_h B\mathbf{u}_h, \delta\varepsilon_h)_D \quad \forall\, \delta\varepsilon_h \in X_h^0,$$

$$(\varepsilon_h^0, I_h B\delta\mathbf{u}_h)_D = \rho(\delta\mathbf{u}_h) + (\xi - \varepsilon_h^*, B\delta\mathbf{u}_h)_D \quad \forall\, \delta\mathbf{u}_h \in U_h^0,$$

откуда следует уравнение для перемещений

$$(I_h B\mathbf{u}_h, I_h B\delta\mathbf{u}_h)_D = \rho(\delta\mathbf{u}_h) + (\xi - \varepsilon_h^*, B\delta\mathbf{u}_h)_D \quad \forall\, \delta\mathbf{u}_h \in U_h^0.$$

Тогда по теореме Лакса–Мильграма [5] получаем необходимое и достаточное условие корректной постановки конечномерной задачи (6), сформулированное в виде неравенства

$$d\|Bv_h\|_D \le \|I_h B v_h\|_D, \; 0 < d \le 1, \; \forall\, v_h \in U_h. \tag{7}$$

Для практических приложений условие (7) удобно представить в виде

$$d^2 \ge 1 - \inf_{v_h \in U_h} \frac{\|Bv_h - \eta_h\|_D^2}{\|Bv_h\|_D^2} \quad \forall\, \eta_h \in X_h^0. \tag{8}$$

Таким образом, если выполняется условие устойчивости (7), то решение уравнений смешанного метода (6) существует и единственно, а также устойчиво по отношению к произвольным вариациям нагрузок и начальных деформаций. Более того, существуют такие не зависящие от шага сетки постоянные C_1 и C_2, при которых справедливы неравенства

$$\begin{gathered} \|\varepsilon - \varepsilon_h\|_D \le C_1 \inf_{\eta_h \in X_h} \|\varepsilon - \eta_h\|_D + \sup_{\eta_h^0 \in X_h^0} \inf_{v_h \in U_h} \frac{|(\varepsilon - Bv_h, \eta_h^0)_D|}{\|\eta_h^0\|_D}, \\ \|\mathbf{u} - \mathbf{u}_h\|_L \le C_2 h (C_1 \inf_{\eta_h \in X_h} \|\varepsilon - \eta_h\|_X + \inf_{v_h \in U_h} \|\mathbf{u} - v_h\|_U). \end{gathered} \tag{9}$$

Полученные априорные оценки погрешностей смешанной аппроксимации для деформаций и перемещений (9) позволяют установить не только факт сходимости смешанного метода в задачах теории упругости, но также указывают на возможность получения более точных распределений деформаций по сравнению с обычной аппроксимацией МКЭ.

Таким образом, сформулированное условие устойчивости, записанное в виде неравенств (7) и (8), играет фундаментальную роль в анализе устойчивости и сходимости смешанного метода для задач теории упругости.

Принципиальное отличие смешанных схем МКЭ от традиционных состоит в необходимости построения таких аппроксимирующих функций, для которых обеспечивается выполнение условия устойчивости (7), что, в свою очередь, гарантирует разрешимость, сходимость и получение устойчивого решения конечномерной задачи при любом шаге сетки.

Численный анализ показал, что попытки игнорирования условия устойчивости (7) при конструировании смешанной аппроксимации приводят к плохо обусловленным дискретным задачам, решения которых имеют неустойчивый осциллирующий характер.

ПРИЛОЖЕНИЕ К ЗАДАЧАМ ТЕОРИИ ПЛАСТИЧНОСТИ

Основные положения феноменологической модели базируются на уравнениях пластического течения Прандля–Рейсса и условии текучести Губера–Мизеса [6]. В этом случае напряженно-деформированное состояние зависит от истории термомеханического нагружения и процесс неупругого деформирования должен прослеживаться на всем исследуемом интервале времени t путем пошагового решения краевой задачи.

Приведем постановку краевой задачи теории пластичности, описывающей неизотермические процессы упругопластического деформирования по траекториям малой кривизны [7]. Согласно [8] обобщенную краевую задачу можно сформулировать следующим образом. Найти тройку $(\mathbf{u}(t), \varepsilon(t), \sigma(t)) \in U \times X \times Z$ такую, что

$$\begin{aligned} (\varepsilon(t), \delta\sigma)_X &= (B\mathbf{u}(t), \delta\sigma)_X \quad \forall\, \delta\sigma \in Z^0, \\ (\sigma(t), \delta\varepsilon)_X &= (\Phi(\varepsilon(t), \xi(t), t)), \delta\varepsilon)_X \quad \forall\, \delta\varepsilon \in X^0, \\ (\sigma(t), B\delta\mathbf{u})_X &= \langle \rho(t), \delta\mathbf{u} \rangle \quad \forall\, \delta\mathbf{u} \in U^0, \end{aligned} \tag{10}$$

где Φ — нелинейный оператор, устанавливающий связь напряжений с деформационной и тепловой историей.

Система нелинейных уравнений (10) определяет обобщенную постановку краевой задачи теории пластичности в перемещениях, деформациях и напряжениях. Отметим, что если функции, описывающие кривые деформирования материала при различных фиксированных температурах, являются выпуклыми, то решение обобщенной краевой задачи (10) существует и единственно [8].

Пусть задано семейство аппроксимирующих множеств $U_h \times X_h \times Z_h$, удовлетворяющее включению $U_h \times X_h \times Z_h \subset U \times X \times Z$. Тогда по аналогии с континуальной задачей (10) сформулируем конечномерную задачу следующим образом. Найти тройку $(\mathbf{u}_h(t), \varepsilon_h(t), \sigma_h(t)) \in U_h \times X_h \times Z_h$ такую, что

$$\begin{aligned} (\varepsilon_h(t), \delta\sigma_h)_X &= (B\mathbf{u}_h(t), \delta\sigma_h)_X \quad \forall\, \delta\sigma_h \in Z_h^0, \\ (\sigma_h(t), \delta\varepsilon_h)_X &= (\Phi(\varepsilon_h(t), \xi_h(t), t), \delta\varepsilon_h)_X \quad \forall\, \delta\varepsilon_h \in X_h^0, \\ (\sigma_h(t), B\delta\mathbf{u}_h)_X &= \langle \rho(t), \delta\mathbf{u}_h \rangle \quad \forall\, \delta\mathbf{u}_h \in U_h^0. \end{aligned} \tag{11}$$

Система нелинейных уравнений (11) определяет смешанную проекционно-сеточную постановку краевой задачи теории пластичности относительно перемещений, деформаций и напряжений.

Сформулируем основные результаты анализа устойчивости и сходимости смешанного метода в задачах теории пластичности.

Если напряжения, как и деформации, представить в виде суммы $\sigma_h = \sigma_h^0 + \sigma_h^*$, $\sigma_h^0 \in Z_h^0$, $\sigma_h^* \in Z_h$, где σ_h^* — известные напряжения, удовлетворяющие неоднородным статическим условиям на поверхности тела, то с использованием ортопроектора I_h систему нелинейных уравнений смешанного метода (11) можно переписать в эквивалентном виде

$$(\varepsilon_h^0(t), \delta\sigma_h)_X = (I_h B\mathbf{u}_h(t), \delta\sigma_h)_X \quad \forall\, \delta\sigma_h \in Z_h^0,$$

$$(\sigma_h^0(t), \delta\varepsilon_h)_X = (\Phi(\varepsilon_h(t), \xi_h(t), t), \delta\varepsilon_h)_X \quad \forall\, \delta\varepsilon_h \in X_h^0,$$

$$(\sigma_h^0(t), I_h B\delta\mathbf{u}_h)_X = \langle \rho(t), \delta\mathbf{u}_h \rangle - (\sigma_h^*(t), B\delta\mathbf{u}_h) \quad \forall\, \delta\mathbf{u}_h \in U_h^0.$$

Отсюда следует нелинейное операторное уравнение относительно перемещений

$$\langle A_h(\mathbf{u}_h(t), \xi_h(t), t), \delta\mathbf{u}_h \rangle = \langle \rho(t), \delta\mathbf{u}_h \rangle - (\sigma_h^*(t), B\delta\mathbf{u}_h) \quad \forall\, \delta\mathbf{u}_h \in U_h^0,$$

где A_h — нелинейный оператор, определяемый отображением

$$A_h(\mathbf{u}_h(t), \xi_h(t), t) : \delta\mathbf{u}_h \in U_h^0 \to (\Phi(I_h B\mathbf{u}_h(t), \xi_h(t), t), I_h B\delta\mathbf{u}_h)_X. \quad (12)$$

В [9] показано, что при выполнении условия устойчивости, сформулированного в виде неравенства

$$d\|Bv_h\|_X \le \|I_h Bv_h\|_X, \quad 0 < d \le 1, \quad \forall\, v_h \in U_h, \quad (13)$$

нелинейный оператор (12) обладает свойствами сильной монотонности и липшиц-непрерывности [10], откуда следует, что решение уравнений смешанного метода (11) существует и единственно, а также непрерывно зависит от изменения нагрузок и начальных деформаций. Более того, если выполняется условие устойчивости (13), то существуют такие не зависящие от шага сетки постоянные $C_1, \ldots, C_6$, при которых справедливы неравенства

$$\begin{aligned} \|\varepsilon(t) - \varepsilon_h(t)\|_X &\le C_1 \inf_{\chi_h \in X_h} \|\sigma(t) - \chi_h\|_X + C_2 \Bigg(\inf_{\eta_h \in X_h} \|\varepsilon(t) - \eta_h\|_X + \\ &+ \sup_{\chi_h^0 \in X_h^0} \inf_{v_h \in U_h} \frac{|(\varepsilon(t) - Bv_h, \chi_h^0)_X|}{\|\chi_h^0\|_X} \Bigg) + C_3 \|\xi(t) - \xi_h(t)\|_X, \\ \|\sigma(t) - \sigma_h(t)\|_X &\le C_4 \inf_{\chi_h \in X_h} \|\sigma(t) - \chi_h\|_X + C_5 \Bigg(\inf_{\eta_h \in X_h} \|\varepsilon(t) - \eta_h\|_X + \\ &+ \sup_{\chi_h^0 \in X_h^0} \inf_{v_h \in U_h} \frac{|(\varepsilon(t) - Bv_h, \chi_h^0)_X|}{\|\chi_h^0\|_X} \Bigg) + C_6 \|\xi(t) - \xi_h(t)\|_X. \end{aligned} \quad (14)$$

Полученные априорные оценки погрешностей смешанной аппроксимации для деформаций и напряжений (14) позволяют установить не только сам факт сходимости смешанного метода в задачах теории пластичности, но также указывают на возможность получения более точных распределений деформаций и напряжений по сравнению с классической аппроксимацией МКЭ.

Если начальные пластические деформации для текущего этапа нагружения определять на основе решения упругопластической задачи для предыдущих этапов нагружения, то получим оценки суммарной погрешности для деформаций и напряжений в конце текущего этапа нагружения. Эти неравенства позволяют установить сходимость смешанного метода для квазистатических задач, описывающих неизотермические процессы упругопластического деформирования по траекториям малой кривизны с учетом начальных деформаций, зависящих от истории термомеханического нагружения. Согласно оценкам, полученным в [9], точность решения конечномерной задачи (11) на начальных этапах нагружения должна быть достаточной, чтобы не допустить влияние роста первых коэффициентов в разложении суммарной погрешности на точность решения упругопластической задачи на последующих этапах нагружения.

ПРИЛОЖЕНИЕ К ЗАДАЧАМ О СВОБОДНЫХ КОЛЕБАНИЯХ УПРУГИХ ТЕЛ

Известно, что задачу определения собственных частот $p > 0$ и форм свободных колебаний $\mathbf{u} \neq 0$ можно представить в виде [11]:

$$(B\mathbf{u}, B\delta\mathbf{u})_D = p(\mathbf{u}, \delta\mathbf{u})_L \quad \forall\, \delta\mathbf{u} \in U^0. \tag{15}$$

Уравнение (15) определяет обобщенную постановку задачи о собственных колебаниях упругих тел, сформулированную в перемещениях.

Классические результаты анализа существования и свойств точных решений спектральной задачи (15) хорошо известны и приведены в [12]. Математические модели и методы решения задач о собственных значениях с разрывными решениями содержатся в [13].

Использование уравнения (15) для построения сеточных схем приводит к классической формулировке МКЭ в форме метода перемещений. Альтернативный подход состоит в изменении обобщенной постановки спектральной задачи (15) таким образом, чтобы деформации и напряжения являлись ее непосредственными аргументами.

В [14] предложены альтернативные вариационные постановки задачи о свободных колебаниях упругих тел, в которых напряжения или деформации входят в разрешающие уравнения наряду с перемещениями как равноправные неизвестные.

Представив спектральную задачу системой уравнений

$$\begin{aligned} (\varepsilon, \delta\varepsilon)_D &= (B\mathbf{u}, \delta\varepsilon)_D \quad \forall\, \delta\varepsilon \in X^0, \\ (\varepsilon, B\delta\mathbf{u})_D &= p(\mathbf{u}, \delta\mathbf{u})_L \quad \forall\, \delta\mathbf{u} \in U^0, \end{aligned} \tag{16}$$

получим обобщенную постановку задачи о собственных колебаниях упругих тел относительно перемещений и деформаций.

На основе уравнений (16) имеем смешанную формулировку МКЭ для задачи о свободных колебаниях упругих тел. Найти тройку $(p_h, \mathbf{u}_h, \varepsilon_h) \in \mathbf{R} \times U_h \times X_h$ такую, что

$$\begin{aligned} (\varepsilon_h, \delta\varepsilon_h)_D &= (B\mathbf{u}_h, \delta\varepsilon_h)_D \quad \forall\, \delta\varepsilon_h \in X_h^0, \\ (\varepsilon_h, B\delta\mathbf{u}_h)_D &= p_h(\mathbf{u}_h, \delta\mathbf{u}_h)_L \quad \forall\, \delta\mathbf{u}_h \in U_h^0. \end{aligned} \tag{17}$$

В [14] исследована корректность постановок дискретных задач о спектре в смешанной форме и сформулированы условия, обеспечивающие устойчивость и сходимость смешанной аппроксимации. Что касается точности определения собственных значений, полученных на основе уравнений смешанного метода, то согласно принципу минимакса Куранта–Фишера [15] они не превышают соответствующих собственных значений, найденных из решения задачи в перемещениях с использованием КМКЭ. Иначе, если $\bar{p}_{nh}$ и p_{nh} — суть *n*-е в порядке возрастания положительные собственные значения спектральных задач, сформулированных с помощью классического и смешанного подходов МКЭ, то на основании минимаксного принципа Куранта–Фишера получаем $p_{nh} \leq \bar{p}_{nh}$ для всех *n*.

ПОСТРОЕНИЕ АППРОКСИМИРУЮЩИХ ФУНКЦИЙ

Для конкретизации уравнений смешанного метода в качестве примера рассмотрим двухмерные и осесимметричные задачи. Используем линейные треугольные элементы, совокупность которых описывает допустимую триангуляцию $T_h = T_h(\Omega)$ области $\Omega \subset \mathbf{R}^2$. Пусть 1, 2, 3 — локальная нумерация вершин треугольника $T \in T_h(\Omega)$, образованная против часовой стрелки. Тогда перемещения v_h в пределах треугольника зададим в виде линейных функций от координат $\mathbf{x} = (x_1, x_2)$:

$$v_h(\mathbf{x}) = \sum_{1 \le \alpha \le 3} \hat{v}_\alpha \lambda_\alpha(\mathbf{x}) \quad \forall\, \mathbf{x} \in T, \tag{18}$$

где $\hat{v}_\alpha = v_h(\mathbf{x}_\alpha)$ — узловые значения перемещений в вершинах; $\lambda_\alpha(\mathbf{x})$ — линейные интерполяционные функции треугольника.

Обозначим $\mathbf{x}_T = (x_{1T}, x_{2T})$ координаты центра тяжести треугольника $T \in T_h(\Omega)$ и определим «внутреннюю», равную нулю на всех сторонах треугольника T, функцию $\lambda_T(\mathbf{x})$ такую, что $\lambda_T(\mathbf{x}_T) = 1$. Данное определение функции $\lambda_T(\mathbf{x})$ не является однозначным. Тем не менее деформации и напряжения в пределах треугольника $T \in T_h(\Omega)$ формально запишем в виде

$$\eta_h(\mathbf{x}) = \sum_{1 \le \alpha \le 3} \hat{\eta}_\alpha \lambda_\alpha(\mathbf{x}) + \left(\overline{\eta}_T - \frac{1}{3} \sum_{1 \le \alpha \le 3} \hat{\eta}_\alpha \right) \lambda_T(\mathbf{x}) \quad \forall\, \mathbf{x} \in T, \tag{19}$$

где $\hat{\eta}_\alpha = \eta_h(\mathbf{x}_\alpha)$ и $\overline{\eta}_T = \eta_h(\mathbf{x}_T)$ — узловые значения $\eta_h(\mathbf{x})$ в вершинах и центре тяжести треугольника $T \in T_h(\Omega)$. Отметим, что функцию $\lambda_T(\mathbf{x})$ можно построить с помощью линейной комбинации кусочно-полиномиальных восполнений и так называемой функции-колокола, т.е. функции вида $\lambda_1(\mathbf{x})\lambda_2(\mathbf{x})\lambda_3(\mathbf{x})$. Функция-колокол принимает нулевые значения на сторонах треугольника и напоминает форму колокола внутри треугольника.

Для определенности будем рассматривать только два типа функций $\lambda_T(\mathbf{x})$. При построении первого типа используем кусочно-линейную интерполяцию в пределах треугольника. Для этого разделим треугольник $T \in T_h(\Omega)$ на три треугольника с общей вершиной в центре тяжести $\mathbf{x}_T$. Тогда в пределах каждого из них определим $\lambda_T(\mathbf{x})$ как линейную функцию, равную нулю на внешней стороне треугольника и единице в точке $\mathbf{x}_T$. Для построения второго типа функций $\lambda_T(\mathbf{x})$ используем нормированную функцию-колокол, т.е. функцию $\lambda_T(\mathbf{x}) = 27\lambda_1(\mathbf{x})\lambda_2(\mathbf{x})\lambda_3(\mathbf{x})$. Таким образом, оба типа функций $\lambda_T(\mathbf{x})$ определяются однозначно.

Рассмотрим интерполяционные свойства аппроксимаций (18), (19). Прежде всего, перемещения, деформации и напряжения непрерывны на всем множестве Ω, поскольку непрерывность линейных интерполяционных функций $\lambda_\alpha(\mathbf{x})$ на любой стороне, общей для произвольных треугольников, обеспечивается однозначным определением этих функций в узлах, расположенных на выбранной стороне, а функция $\lambda_T(\mathbf{x})$ по определению равна нулю на всех сторонах треугольника. Кроме того, аппроксимация (19) удовлетворяет условию постоянства напряжений и деформаций на всем множестве Ω и гарантирует получение устойчивого решения дискретной задачи для двух типов функций $\lambda_T(\mathbf{x})$.

Поскольку перемещения линейны на каждом из треугольников, их производные задаются с помощью кусочно-постоянных функций $\overline{\tau}_h(\mathbf{x})$. Сужение $\overline{\tau}_h(\mathbf{x})$ на треугольник T обозначим $\overline{\tau}_T$. Полагая $\eta_h(\mathbf{x}) = \overline{\eta}_T \lambda_T(\mathbf{x}) \ \forall\, \mathbf{x} \in T$, получим

$$\|\overline{\tau}_h - \eta_h\|_X^2 = \sum_{T \in T_h(\Omega)} \int_T \|\overline{\tau}_h - \eta_h\|^2 d\mathbf{x} =$$

$$= \sum_{T \in T_h(\Omega)} \|\overline{\tau}_T\|^2 \Delta_T - 2(\overline{\eta}_T, \overline{\tau}_T) \int_T \lambda_T(\mathbf{x}) d\mathbf{x} + \|\overline{\eta}_T\|^2 \int_T \lambda_T^2(\mathbf{x}) d\mathbf{x}, \tag{20}$$

где Δ_T — площадь треугольника T. Очевидно, что значения $\bar{\eta}_T$, минимизирующие каждое слагаемое от суммы вкладов по треугольникам, вычисляются по формуле

$$\bar{\eta}_T = \frac{\int_T \lambda_T(\mathbf{x}) d\mathbf{x}}{\int_T \lambda_T^2(\mathbf{x}) d\mathbf{x}} \bar{\tau}_T \quad \forall\, T \in T_h(\Omega). \tag{21}$$

Подставляя (21) в (20), находим

$$\| \bar{\tau}_h - \eta_h \|_X^2 = \sum_{T \in T_h(\Omega)} \| \bar{\tau}_T \|^2 \left(\Delta_T - \frac{(\int_T \lambda_T(\mathbf{x}) d\mathbf{x})^2}{\int_T \lambda_T^2(\mathbf{x}) d\mathbf{x}} \right). \tag{22}$$

На основании (8), (13) и (22) получаем следующие оценки: $d^2 \geq 2/3$ для кусочно-линейного восполнения; $d^2 \geq 0{,}7$ при использовании функции-колокола. Такие же оценки можно получить и для осесимметричной задачи. Таким образом, постоянная d строго больше нуля, а ее оценка снизу не зависит от шага сетки h. Следовательно, применение для аппроксимации деформаций и напряжений описанных выше двух типов функций $\lambda_T(\mathbf{x})$ обеспечивает получение устойчивого и единственного решения дискретной задачи.

Отметим, что рассмотренный выше алгоритм построения устойчивой смешанной аппроксимации на треугольных элементах нетрудно распространить на трехмерный случай, если для аппроксимации напряжений, деформаций и перемещений использовать конечные элементы в форме тетраэдров. В этом случае удается доказать устойчивость, единственность и сходимость решения конечномерной задачи. В [16] построен смешанный трехмерный конечный элемент в форме восьмиузловой шестигранной призмы для решения пространственных задач, а в [4] — матричные уравнения смешанного метода и предложена процедура учета статических граничных условий на поверхности тела, а также представлены результаты анализа специальных формул численного интегрирования интерполяционного типа, применение которых существенно упрощает вычислительную процедуру решения матричных уравнений смешанного метода.

ПРИЛОЖЕНИЕ К ЗАДАЧАМ ОБ ИЗГИБЕ, КОЛЕБАНИЯХ И УСТОЙЧИВОСТИ ПЛАСТИН

Задачи рассматривались в рамках известных положений классической теории изгиба тонких пластин [17].

Для практического применения наиболее подходит использование простых треугольных элементов, однако построение аппроксимирующих функций в этом случае приводит к серьезным трудностям математического и вычислительного характера.

Для практических приложений одним из возможных и широко распространенных решений задачи об изгибе пластины является несогласованная аппроксимация на треугольном элементе, предложенная Зенкевичем [18]. В этом случае для аппроксимации прогиба w_h в пределах треугольника используется неполный кубический полином

$$\begin{aligned} w_h = {} & d_1\lambda_1 + d_2\lambda_2 + d_3\lambda_3 + d_4\lambda_1^2\lambda_2 + d_5\lambda_2^2\lambda_3 + d_6\lambda_3^2\lambda_1 + \\ & + d_7\lambda_1^2\lambda_3 + d_8\lambda_2^2\lambda_1 + d_9\lambda_3^2\lambda_2 + 2d_{10}\lambda_1\lambda_2\lambda_3. \end{aligned} \tag{23}$$

На основании (23) получим выражения для углов поворотов пластины

$$\begin{aligned} \psi_h &= e_1 + e_2\lambda_1\lambda_2 + e_3\lambda_2\lambda_3 + e_4\lambda_3\lambda_1 + e_5\lambda_1^2 + e_6\lambda_2^2 + e_7\lambda_3^2, \\ -\varphi_h &= f_1 + f_2\lambda_1\lambda_2 + f_3\lambda_2\lambda_3 + f_4\lambda_3\lambda_1 + f_5\lambda_1^2 + f_6\lambda_2^2 + f_7\lambda_3^2. \end{aligned} \tag{24}$$

Аппроксимация (23) обеспечивает непрерывность прогиба для всей пластины и непрерывность углов поворотов только в узлах сетки. На сторонах треугольника функции, аппроксимирующие углы поворотов, изменяются по квадратичному закону, и, значит, нарушаются условия непрерывности угла наклона на границах между треугольниками. В общем случае аппроксимация (23) позволяет получить решение, сходящееся не к точному, а к некоторому другому решению, отличающемуся от точного в пределах некоторой ошибки. Величина ошибки зависит от способа разбиения пластины на треугольные элементы и при использовании равномерного разбиения типа крест и неравномерных сеток существенно влияет на точность вычисления кривизны пластины и изгибающих моментов.

В [3, 19] для решения задач об изгибе, колебаниях и устойчивости пластины построен гибридный конечный элемент на основе треугольника Зенкевича. Предложена смешанная аппроксимация для прогиба и углов поворотов пластины. Для аппроксимации прогиба используется соотношение (23), а выражения для углов поворотов (24) модифицируются следующим образом:

$$\tilde{\psi}_h = \psi_h + e_8(\lambda_1\lambda_2^2 + \lambda_1^2\lambda_2) + e_9(\lambda_2\lambda_3^2 + \lambda_2^2\lambda_3) + e_{10}(\lambda_3\lambda_1^2 + \lambda_3^2\lambda_1),$$

$$\tilde{\varphi}_h = \varphi_h + f_8(\lambda_1\lambda_2^2 + \lambda_1^2\lambda_2) + f_9(\lambda_2\lambda_3^2 + \lambda_2^2\lambda_3) + f_{10}(\lambda_3\lambda_1^2 + \lambda_3^2\lambda_1).$$

Дополнительные коэффициенты e_8, e_9, e_{10} и f_8, f_9, f_{10} выбираются так, чтобы обеспечить линейный закон изменения нормальной производной на сторонах треугольника и тем самым удовлетворить условиям непрерывности угла наклона на границах между треугольниками.

МЕТОДЫ РЕШЕНИЯ МАТРИЧНЫХ УРАВНЕНИЙ СМЕШАННОГО МЕТОДА

Разработаны специальные итерационные процедуры решения матричных уравнений смешанного МКЭ (СМКЭ):

- модифицированный итерационный алгоритм метода сопряженных градиентов с переобусловливающей матрицей для решения задач теории упругости [3];
- трехслойный шагово-итерационный алгоритм решения нелинейных задач теории пластичности [3];
- модифицированный итерационный алгоритм метода наискорейшего спуска для решения обобщенных спектральных задач о свободных колебаниях упругих тел [14];
- комбинированный итерационный алгоритм на основе методов окаймления и сопряженных градиентов для решения систем линейных уравнений, порождаемых МКЭ в задаче об изгибе пластины [20].

Установлено, что сформулированные условия устойчивости (7), (13) смешанных методов обеспечивают сходимость и устойчивость предложенных итерационных процедур. Получены результаты, касающиеся оптимизации скорости сходимости модифицированных итерационных алгоритмов и показана возможность их эффективной практической реализации.

ПРОГРАММНЫЙ КОМПЛЕКС RELAX И РЕШЕНИЕ МОДЕЛЬНЫХ ЗАДАЧ

Предложенные схемы и алгоритмы МКЭ позволили создать эффективный комплекс приближенных методов, реализованных в виде программного продукта для расчетов прочности, колебаний и устойчивости элементов конструкций. Разработанное программное обеспечение является итогом многолетней работы и в настоящее время продолжается его усовершенствование.

Далее приведены примеры, иллюстрирующие сходимость и точность численных решений, полученных на основе СМКЭ с использованием функции-колокола и кусочно-линейного восполнения деформаций и напряжений соответственно для плоской и осесимметричной задач. Результаты расчетов сопоставлялись с известными аналитическими решениями и полученными на основе КМКЭ.

В рассматриваемых модельных задачах использовались безразмерные значения. Например, модуль упругости материала E принимался равным единице. При решении упругопластических задач для диаграммы растяжения применялась модель идеально упругопластического материала, а при построении треугольной сетки — равномерное разбиение типа крест.

При сравнении результатов, полученных с помощью КМКЭ, использовались следующие обозначения: КМКЭ-1 — линейный треугольный элемент; КМКЭ-2 — билинейный четырехугольный элемент; КМКЭ-3 — квадратичный шестиузловой треугольный элемент; КМКЭ-4 — квадратичный восьмиузловой четырехугольный элемент.

Изгиб бруса равномерной нагрузкой. Рассматривался брус длиной $L = 10$ и высотой $H = 2$ прямоугольного поперечного сечения. Коэффициент Пуассона задавался равным нулю. Боковые торцы закреплялись от вертикальных перемещений. По длине бруса задавалась равномерно распределенная нагрузка $q = 1$. При решении задачи оценивалась точность определения максимального продольного напряжения и прогиба в центральном сечении бруса.

Результаты расчетов для задачи об изгибе бруса равномерной нагрузкой представлены в табл. 1. Сравнение численных решений, полученных с применением КМКЭ и СМКЭ, свидетельствует о преимуществе последнего. При сравнении результатов, полученных с помощью КМКЭ, использовался линейный треугольный элемент. Из данных табл. 1 видно, что решение на основе СМКЭ имеет существенно меньшую погрешность по сранению с КМКЭ. При использовании двух разбиений по высоте бруса погрешность определения напряжения на основе КМКЭ-1 составляет 41,82%, тогда как СМКЭ дает 2,58%. Погрешность определения прогиба на той же сетке для КМКЭ-1 составляет 20,99%, для СМКЭ — 1,10%. При сгущении сетки в два раза СМКЭ дает практически точное решение задачи, тогда как КМКЭ-1 имеет погрешность 18,58% для напряжения и 6,31% для прогиба.

Таблица 1

Разбиение $L \times H$	Результаты расчетов максимального продольного напряжения и прогиба в центральном сечении							
	Продольное напряжение		Погрешность, %		Максимальный прогиб		Погрешность, %	
	КМКЭ-1	СМКЭ	КМКЭ-1	СМКЭ	КМКЭ-1	СМКЭ	КМКЭ-1	СМКЭ
10×2	11,025	18,460	41,82	2,58	166,16	207,99	20,99	1,10
20×4	15,429	18,895	18,58	0,29	197,04	210,61	6,31	– 0,14
30×6	16,791	18,936	11,39	0,07	204,15	210,54	2,93	– 0,11
40×8	17,413	18,945	8,11	0,03	206,76	210,45	1,69	– 0,06
50×10	17,763	18,948	6,26	0,01	208,00	210,38	1,10	– 0,03
60×12	17,986	18,949	5,09	0,00	208,68	210,34	0,77	– 0,01
Точное решение [3]	18,95		–		210,31		–	

Трехточечный изгиб бруса с краевой трещиной. Рассматривалась задача о поперечном изгибе бруса длиной $L = 4$ и высотой $H = 1$ с симметрично расположенной вертикальной трещиной $a = 0{,}4$, выходящей на поверхность. Брус опирался торцами на две вертикальные опоры, а в центральном сечении действовала поперечная сила $P = 1$. Оценивалась точность численного решения в окрестности вершины трещины. Для вычисления коэффициента интенсивности напряжений K_{I} использовалось асимптотическое разложение перемещений вблизи вершины трещины [21], откуда следует формула

$$K_{\mathrm{I}} = \sqrt{\frac{\pi}{32r}} E\Delta v,$$

где r — расстояние от вершины до близлежащего узла сетки, расположенного на берегу трещины; Δv — относительные перемещения этого узла в перпендикулярном направлении.

Результаты расчетов для задачи о трехточечном изгибе бруса с краевой трещиной, представленные в табл. 2, показывают, что при сгущении сетки КМКЭ не обеспечивает получения коэффициента интенсивности напряжений с требуемой точностью. Смешанный метод монотонно сходится при сгущении сетки и дает близкие к аналитическому решению результаты на сетках достаточно умеренных размеров.

Таблица 2

Разбиение L, H	Результаты расчетов коэффициента интенсивности напряжений							
	Коэффициент интенсивности напряжений				Погрешность, %			
	КМКЭ-1	КМКЭ-2	КМКЭ-3	СМКЭ	КМКЭ-1	КМКЭ-2	КМКЭ-3	СМКЭ
10, 4	6,888	7,520	7,768	8,275	13,06	5,08	1,95	– 4,45
20, 8	6,950	7,485	7,612	8,110	12,28	5,52	3,92	– 2,36
30, 12	6,960	7,469	7,553	8,052	12,15	5,73	4,67	– 1,63
40, 16	6,963	7,459	7,522	8,026	12,11	5,85	5,06	– 1,30
60, 24	6,965	7,450	7,489	7,994	12,09	5,97	5,47	– 0,90
80, 32	6,967	7,444	7,473	7,982	12,06	6,04	5,68	– 0,75
Точное решение [22]	7,9227				–			

Толстостенная сферическая оболочка под действием внутреннего давления. Задача решалась в осесимметричной постановке с отношением радиусов $R_1 / R_2 = 1/2$ и внутренним давлением $q = 1$. Ввиду симметрии задачи рассматривалась четверть сечения сферы. Предел текучести материала при одноосном растяжении принимался раным 0,8. Коэффициент Пуассона задавался равным 0,494. Оценивалась точность вычисления окружных напряжений на внутренней поверхности сферы.

В табл. 3 представлены сравнительные результаты расчетов для задачи об упрогопластическом состоянии сферической оболочки под действием внутреннего давления. Из данных этой таблицы видно, что при всех разбиениях СМКЭ дает более точные аппроксимации напряжений по сравнению с КМКЭ.

Таблица 3

Разбиение бруса по углу и толщине оболочки	Результаты расчетов окружных напряжений									
	Внутренняя поверхность					Погрешность, %				
	КМКЭ-1	КМКЭ-2	КМКЭ-3	КМКЭ-4	СМКЭ	КМКЭ-1	КМКЭ-2	КМКЭ-3	КМКЭ-4	СМКЭ
18×9	–0,0872	–0,13584	–0,16235	–0,16317	–0,1976	56,40	32,08	18,83	18,42	1,20
24×12	–0,1229	–0,15197	–0,17487	–0,17224	–0,1983	38,55	24,02	12,57	13,88	0,85
30×15	–0,1412	–0,16165	–0,17964	–0,17772	–0,1987	29,40	19,18	10,18	11,14	0,65
36×18	–0,1523	–0,16808	–0,18314	–0,18140	–0,1989	23,85	15,96	8,43	9,30	0,55
42×21	–0,1598	–0,17267	–0,18546	–0,18403	–0,1991	20,10	13,67	7,27	7,99	0,45
Точное решение [23]	–0,2					–				

Свободные колебания бруса с защемленными торцами. Определялись первые четыре собственные частоты ω поперечных колебаний бруса прямоугольного сечения с отношением высоты к длине $H / L = 2/20$. При сопоставлении результатов использовалась формула

$$p_k = \frac{\omega_k}{L^2} \sqrt{\frac{EI}{\rho}}, \quad k = \overline{1,4},$$

где ρ — плотность единицы длины; $I = H^3 / 12 = 2/3$ — момент инерции поперечного сечения бруса. Коэффициент Пуассона задавался равным нулю. При сравнении результатов, полученных с помощью КМКЭ, использовался линейный треугольный элемент. Результаты расчетов сопоставлялись с эталонным решением, полученным с помощью КМКЭ на густой сетке, для которой решения СМКЭ и КМКЭ совпадали или были близкими.

Результаты расчетов, представленные в табл. 4, показывают, что при всех разбиениях по СМКЭ получены более точные значения частот, чем по КМКЭ. Действительно, при использовании одного элемента по высоте бруса погрешность определения основной частоты методом перемещений составляет 40,57 %, а для СМКЭ погрешность находится на уровне 11,48 %. При сгущении сетки в два раза КМКЭ-1 имеет погрешность 12,28 %, тогда как СМКЭ дает погрешность 1,5 %.

Т а б л и ц а 4

Разбиение $L \times H$	Результаты расчетов собственных частот колебаний бруса с защемленными торцами							
	ω_1		ω_2		ω_3		ω_4	
	КМКЭ-1	СМКЭ	КМКЭ-1	СМКЭ	КМКЭ-1	СМКЭ	КМКЭ-1	СМКЭ
10×1	29,91	23,69	78,05	62,42	144,54	116,38	226,10	182,56
20×2	23,86	21,57	62,33	56,45	114,95	104,16	178,16	161,24
30×3	22,47	21,32	58,53	55,51	107,56	101,88	165,99	156,88
40×4	21,95	21,27	57,10	55,28	104,74	101,28	161,29	154,69
80×8	21,43	21,25	55,65	55,15	101,86	100,89	156,46	154,86
160×16	21,30	21,25	55,28	55,15	101,11	100,86	155,19	154,76
Густая сетка	21,26		55,15		100,86		154,76	
Разбиение	Погрешность, %							
$L \times H$	КМКЭ-1	СМКЭ	КМКЭ-1	СМКЭ	КМКЭ-1	СМКЭ	КМКЭ-1	СМКЭ
10×1	40,57	11,48	41,52	13,18	43,31	15,38	46,10	17,96
20×2	12,28	1,50	13,02	2,36	13,97	3,27	15,12	4,19
30×3	5,69	0,28	6,13	0,65	6,64	1,01	7,26	1,37
40×4	3,29	0,09	3,54	0,23	3,85	0,42	4,22	0,60
80×8	0,85	0,00	0,91	0,00	0,99	0,03	1,10	0,06
160×16	0,23	0,00	0,24	0,00	0,25	0,00	0,28	0,00

Изгиб квадратной пластины под воздействием равномерной нагрузки. Использовались два варианта разбиения пластины на треугольники: первый соответствовал делению квадрата на два равных треугольника (равномерная треугольная сетка); второй — на четыре (сетка типа крест).

Результаты расчетов свободно опертой квадратной пластины с постоянной толщиной t и длиной стороны a под действием равномерно распределенной нагрузки q при использовании сетки типа крест приведены в табл. 5. Оценивалась точность определения изгибающих моментов и прогиба в центре пластины. Коэффициент Пуассона ν принимался равным 0,3. Данные расчетов сопоставлялись с известным аналитическим решением [18], а также результатами, полученными на основе КМКЭ с использованием треугольника Зенкевича и СМКЭ. Сравнение численных результатов с аналитическим решением осуществлялось в соответствии с формулами

$$M_x = M_y = M_{\max} = \beta q a^2; \; w_{\max} = 12 \alpha q a^4 / E t^3 (1 - \nu^2).$$

На основании результатов решения модельной задачи можно сделать следующие выводы. При использовании равномерной сетки треугольник Зенкевича и смешанная аппроксимация приводят к близким результатам, которые при сгущении сетки сходятся к точному решению задачи. Однако для неравномерных сеток и разбиений типа крест треугольник Зенкевича дает приемлемые результаты только для прогиба и не гарантирует сходимости численных решений для изгибающих моментов. При сгущении сетки погрешность определения прогиба на основе треугольника Зенкевича находится на уровне 3%, однако для изгибающих моментов погрешность достигает 26% и не уменьшается. Решения для изгибающих моментов, полученные на основе треугольника Зенкевича, имеют неустойчивый осциллирующий характер. Смешанная аппроксимация обеспечивает сходимость при сгущении сетки как прогиба пластины, так и изгибающих моментов, точность вычисления которых практически не зависит от способа разбиения пластины на треугольные элементы.

Таблица 5

Разбиение $a \times a$	Результаты расчетов свободно опертой квадратной пластины под воздействием равномерно распределенной нагрузки							
	Коэффициент $\beta \times 100$		Погрешность, %		Коэффициент $\alpha \times 100$		Погрешность, %	
	КМКЭ	СМКЭ	КМКЭ	СМКЭ	КМКЭ	СМКЭ	КМКЭ	СМКЭ
4×4	4,016	5,100	16,16	– 6,47	4,165	4,079	–2,53	– 0,42
6×6	3,723	4,915	22,27	– 2,61	4,176	4,068	–2,80	– 0,15
8×8	3,632	4,858	24,17	– 1,42	4,184	4,065	–3,00	– 0,07
10×10	3,590	4,833	25,05	– 0,89	4,187	4,064	–3,08	– 0,05
20×20	3,533	4,800	26,24	– 0,21	4,192	4,063	–3,20	– 0,02
40×40	3,520	4,791	26,51	– 0,02	4,193	4,062	–3,22	– 0,00
60×60	3,516	4,790	26,59	0,00	4,193	4,062	–3,22	– 0,00
Точное решение [17]	4,79		–		4,062		–	

В задачах о свободных колебаниях и устойчивости пластин смешанная аппроксимация позволяет получить более точные значения собственных частот и уровней критической нагрузки по сравнению с классическим треугольником Зенкевича [18].

Выводы по результатам решения модельных задач. Приведенные примеры и опыт решения практических задач свидетельствуют об эффективности смешанного метода в задачах об изгибе, концентрации напряжений, а также при решении упругопластических задач с развитыми зонами пластических деформаций. Применение смешанной аппроксимации для решения задач механики разрушения позволяет получить более точные и устойчивые расчетные значения коэффициентов интенсивности напряжений по сравнению с классическим методом перемещений. На не густых и умеренных по размерам сетках применение смешанного метода приводит к более точным результатам по сравнению с классическим вариантом МКЭ.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Основные результаты заключаются в следующем:

- развита общая теория смешанных схем МКЭ решения задач механики деформируемого твердого тела;
- сформулированы условия, обеспечивающие устойчивость и сходимость смешанной аппроксимации для напряжений, деформаций и перемещений;
- установлено, что смешанные схемы МКЭ приводят к более точным распределениям напряжений по сравнению с классическим подходом МКЭ в форме метода перемещений;
- для решения двухмерных и осесимметричных задач предложен специальный треугольный конечный элемент, удовлетворяющий сформулированным условиям устойчивости и сходимости смешанной аппроксимации для напряжений, деформаций и перемещений;
- построен новый гибридный треугольный конечный элемент для решения задач об изгибе, колебаниях и устойчивости пластин;

• математическое обоснование сходимости смешанной аппроксимации дополнено численным анализом, результаты которого подтверждают эффективность разработанных алгоритмов;

• проведенные исследования показали эффективность применения разработанных схем МКЭ и алгоритмов расчета к решению широкого круга научных и прикладных задач механики деформируемого твердого тела.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Brezzi F. On the existence uniqueness and approximation of saddle–point problems arising from Lagrangian multipliers // RAIRO. — 1974. — R.2 — P. 129–151.
2. Babuska I. Error bounds for finite element method // Numer. Math. — 1971. — **16**, N 3. — P. 322–333.
3. Тимошенко С.П., Гудьер. Дж. Теория упругости. — М.: Наука, 1975. — 575 с.
4. Чирков А.Ю. Смешанная схема метода конечных элементов для решения краевых задач теории упругости и малых упругопластических деформаций. — К.: Изд–во Ин–та пробл. прочности, 2003. — 250 с.
5. Съярле Ф. Метод конечных элементов для эллиптических задач. — М.: Мир, 1980. — 412 с.
6. Качанов Л.М. Основы теории пластичности. — М.: Наука, 1969. — 420 с.
7. Шевченко Ю.Н., Савченко В.Г. Термовязкопластичность. — К.: Наук. думка, 1987. — 264 с.
8. Чирков А.Ю. Анализ краевых задач, описывающих неизотермические процессы упругопластического деформирования с учетом истории нагружения // Пробл. прочности. — 2006. — № 1. — С. 69–99.
9. Чирков А.Ю. Смешанная проекционно-сеточная схема метода конечных элементов для решения краевых задач, описывающих неизотермические процессы упругопластического деформирования // Там же. — 2007. — № 3. — С. 87–117.
10. Вайнберг М.М. Вариационный метод и метод монотонных операторов. — М.: Наука, 1972. — 416 с.
11. Василенко Н.В. Теория колебаний. — К.: Вища шк., 1992. — 430 с.
12. Рисс Ф., Секефальви-Надь Б. Лекции по функциональному анализу. — М.: Мир, 1979. — 587 с.
13. Дейнека В.С., Сергиенко И.В., Скопецкий В.В. Математические модели и методы расчета задач с разрывными решениями. — К.: Наук. думка, 1995. — 262 с.
14. Чирков А.Ю. Применение смешанных вариационных формулировок метода конечных элементов к решению задач о собственных колебаниях упругих тел // Пробл. прочности. — 2008. — № 2. — С. 121–140.
15. Парлетт Б. Симметричная проблема собственных значений. Численные методы. — М.: Мир, 1983. — 384 с.
16. Чирков А.Ю., Кобельский С.В., Звягинцева А.А. Построение смешанной аппроксимации МКЭ для решения пространственных задач теории упругости // Надежность и долговечность машин и сооружений. — 2008. — № 31. — С. 195–207.
17. Тимошенко С.П., Войновский-Кригер С. Пластинки и оболочки. — М.: Наука, 1966. — 635 с.
18. Zienkiewicz O.C., Taylor R.L. The finite element method. — 5th ed. — Oxford; Auckland; Boston: Butterworth-Heinemann, 2000. — **1–3**. — 1482 p.
19. Чирков А.Ю. Построение смешанно-гибридной схемы метода конечных элементов для решения задач об изгибе, свободных колебаниях и устойчивости пластин на основе треугольного элемента Зенкевича // Пробл. прочности. — 2008. — № 5. — С. 108–122.
20. Чирков А.Ю. Метод окаймления для решения линейных систем уравнений, порождаемых методом конечных элементов в задаче об изгибе пластины // Там же. — 2007. — № 4. — С. 69–98.
21. Черепанов Г.П. Механика хрупкого разрушения. — М.: Наука, 1974.– 640 с.
22. Guinea G.V., Pastor J.Y., Planas J., Elices M. Stress intensity factor, compliance and CMOD for general three-point-bend beam // Int. J. Fract. — 1998. — **89.** — P. 103–116.
23. Писаренко Г.С., Можаровский Н.С. Уравнения и краевые задачи теории пластичности и ползучести. — К.: Наук. думка, 1981. — 492 с.

Поступила 25.01.2011