

УДК 532.5+536.24

К.В. МАКСИМЕНКО-ШЕЙКО, Т.И. ШЕЙКО

МАТЕМАТИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ ГЕОМЕТРИЧЕСКИХ ФРАКТАЛОВ С ПОМОЩЬЮ R -ФУНКЦИЙ

Ключевые слова: *R -функции, геометрические фракталы.*

ВВЕДЕНИЕ

В настоящее время фракталы широко применяются в радиотехнике при проектировании антенных устройств (кривая Коха и ковер Серпинского) и волноводов (снежинка Коха), в компьютерной графике и при сжатии изображений. В физике фракталы естественным образом возникают при моделировании нели-

© К.В. Максименко-Шейко, Т.И. Шейко, 2012

нейных процессов, таких как турбулентное течение жидкости, сложные процессы диффузии-адсорбции и т.п. Фракталы используются при моделировании пористых материалов, например, в нефтехимии. В биологии они применяются для моделирования популяций и для описания систем внутренних органов (система кровеносных сосудов). Повышенный интерес вызывают задачи математического моделирования физико-механических полей в объектах фрактальной природы.

Определение фрактала, данное Мандельбротом, звучит так: «Фракталом называется структура, состоящая из частей, которые в каком-то смысле подобны целому» [1]. Наиболее наглядными являются геометрические фракталы [2, 3]. Именно с них и начиналась история фракталов. Первые идеи фрактальной геометрии возникли в XIX веке, когда Кантор с помощью простой рекурсивной процедуры превратил линию в набор несвязанных точек (так называемая пыль Кантора, или множество Кантора). Он брал отрезок, удалял центральную треть, а после этого повторял то же самое с оставшимися отрезками. Пеано нарисовал особый вид линии. На первом шаге он брал отрезок и заменял его на девять отрезков, длиной в три раза меньшей, чем длина исходного отрезка. Затем делал то же самое с каждым отрезком получившейся линии. Кривая Пеано и пыль Кантора выходили за рамки обычных геометрических объектов. Они не имели четкой размерности. Пыль Кантора строилась на основании одномерной прямой, но состояла из точек (размерность 0), а кривая Пеано строилась на основании одномерной линии, а в результате получалась плоскость. Для самоподобных множеств размерность Хаусдорфа вычисляется следующим образом: если множество разбивается на n частей, подобных исходному множеству с коэффициентами $r_1, r_2, r_3, \dots, r_n$, то его размерность S является решением уравнения $r_1^S + r_2^S + r_3^S + \dots + r_n^S = 1$. Например, размерность Хаусдорфа множества Кантора равна $\ln 2 / \ln 3$ (разбивается на две части, коэффициент подобия $1/3$), а размерность Хаусдорфа треугольника Серпинского — $\ln 3 / \ln 2$ (разбивается на три части, коэффициент подобия $1/2$).

Во всех детерминированных фракталах самоподобие проявляется на всех уровнях. Это значит, что независимо от того, насколько осуществляется приближение к фракталу, виден все тот же узор. Детерминированные фракталы непосредственно состояются из своих малых копий. Обычно итерируют детерминированные фракталы 5–7 раз, чтобы получить четкое изображение. Однако В.Л. Рвачев в своих работах (например, в [4]) исключил из рассмотрения такие «геометрические монстры, как Канторово множество, ковер Серпинского» и другие объекты фрактальной геометрии. В [5] предприняты попытки построения частных случаев уравнений границ некоторых объектов. В данной работе на основе новых конструктивных средств теории R -функций [6] разработаны методики и построены уравнения ряда объектов фрактальной геометрии.

ПОСТРОЕНИЕ УРАВНЕНИЙ ОБЪЕКТОВ ФРАКТАЛЬНОЙ ГЕОМЕТРИИ

Одним из свойств фракталов является самоподобие. Возьмем, например, треугольник (или салфетку) Серпинского. Для его построения из центра равностороннего треугольника «вырежем» треугольник. Повторим эту процедуру для трех образовавшихся треугольников (за исключением центрального) и так до бесконечности. Если теперь возьмем любой из образовавшихся треугольников и увеличим его, получим точную копию целого. В данном случае мы оперируем полным самоподобием. Запишем уравнение правильного треугольника в виде

$$\omega_0(x, y) = -\sqrt{x^2 + y^2} \cos\left(\frac{2}{3} \arcsin\left(\sin \frac{3\theta}{2}\right)\right) + R \geq 0, \text{ или } \omega_0(x, y) = -x_1 + R \geq 0,$$

где $x_1 = r \cos \mu$; $y_1 = r \sin \mu$; $\mu(\theta) = \frac{2}{3} \arcsin \left(\sin \frac{3\theta}{2} \right)$; $r = \sqrt{x^2 + y^2}$; $\theta = \arctg \frac{y}{x}$;

R — радиус вписанной окружности. Тогда $\omega_1(x, y) = \omega_0(-2(x_1 - R), 2y_1)/2 \geq 0$ и соответственно $\omega_k(x, y) = \omega_{k-1}(2(x_1 - R), 2y_1)/2 \geq 0$ ($k = 2, 3, \dots$). На рис. 1 построены линии уровня функции $\omega_k(x, y) \geq 0$, задающей салфетку Серпинского для различных значений k .

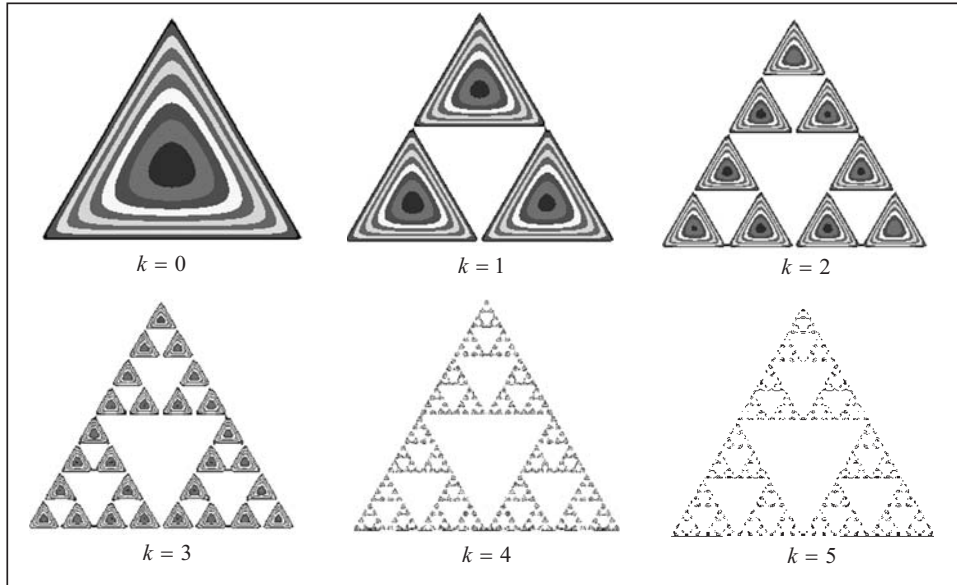


Рис. 1. Салфетка Серпинского для различных значений k

Построим уравнение фрактальной области — ковер Серпинского. Для этого исходный прямоугольник разобьем на девять равновеликих прямоугольников, из которых исключается центральный. Оставшиеся прямоугольники подвергаются той же процедуре и т.д. Размерность Хаусдорфа построенной области $\frac{\ln 8}{\ln 3} = 1,89$.

Если $f_1 = \frac{a^2 - x^2}{2a} \geq 0$, $f_2 = \frac{b^2 - y^2}{2b} \geq 0$, то $\omega_0 = f_1 \wedge_0 f_2 \geq 0$ — предфрактал нулевого уровня. Построим вспомогательные функции, пользуясь свойством самоподобия:

$$\omega_1(x, y) = \frac{\overline{\omega_0(3x, 3y)}}{3} \geq 0, \quad \omega_k(x, y) = \frac{\omega_{k-1}(3\mu_{hx}, 3\mu_{hy})}{3} \geq 0 \dots (k = 2, 3, \dots),$$

где $\mu_{hx} = \frac{h_x}{\pi} \arcsin \left(\sin \frac{\pi x}{h_x} \right)$, $\mu_{hy} = \frac{h_y}{\pi} \arcsin \left(\sin \frac{\pi y}{h_y} \right)$, $h_x = \frac{2a}{3}$, $h_y = \frac{2b}{3}$. Тогда

$K_\omega(x, y) = \omega_0(x, y) \wedge_0 \omega_1(x, y) \wedge_0 \omega_2(x, y) \wedge_0 \dots \wedge_0 \omega_k(x, y) \geq 0$. На рис. 2 построены линии уровня функции $K_{\omega_k}(x, y) \geq 0$, задающей ковер Серпинского для различных значений k .

Типичным детерминированным фракталом является кривая Коха. Процесс ее построения выглядит следующим образом: берем единичный отрезок, разделим на три равные части и заменяем средний интервал равносторонним треугольником без этого сегмента. В результате образуется ломаная, состоящая из четырех звеньев длины $1/3$. На следующем шаге повторяем операцию для каждого из четырех получившихся звеньев. Предельная кривая является кривой Коха.

Эта кривая была описана в 1904 г. шведским математиком Хельге фон Кохом, который, изучая работы К. Вейерштрасса и Г. Кантора, натолкнулся на описание некоторых странных кривых с необычным поведением. Кривая Коха примечательна тем, что нигде не имеет касательной, т.е. нигде недифференцируема, хотя всюду непрерывна. Такие «ущербные» функции были построены Вейерштрассом лишь для того, чтобы показать своим скептически настроенным коллегам (в том числе Эрмиту), что такие функции (непрерывные и недифференцируемые) действительно существуют. Однако другие математики сочли их перспективными. Например, Больцман в 1898 г. писал, что недифференцируемые функции могли быть изобретены физиками, так как в статистической механике имеются проблемы, для решения которых «недифференцируемые функции абсолютно необходимы». Ж. Перрен пошел еще дальше: в 1906 г. он, предвосхищая отношение к такого рода математическим монстрам, заявил, что кривые, не имеющие касательных, являются общим правилом, а гладкие кривые — интересным, но весьма частным случаем.

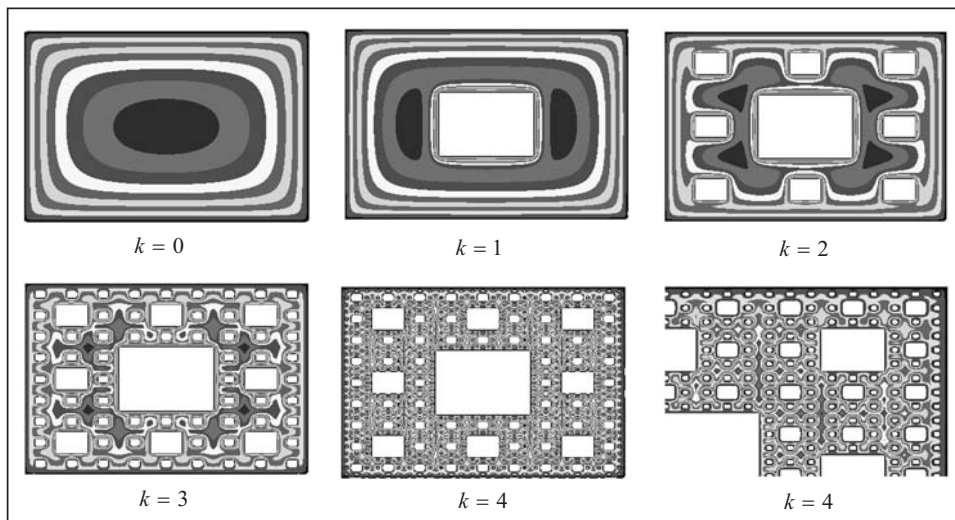


Рис. 2. Ковер Серпинского для различных значений k

Кривая Коха не спрямляема, не имеет самопересечений. Она имеет фрактальную размерность — $\ln 4 / \ln 3 \approx 1.26$, поскольку состоит из четырех равных частей, каждая из которых подобна всей кривой с коэффициентом подобия $1/3$. Выполним построение на интервале $-3a \leq x \leq 3a$. Тогда:

$$\omega_0 = -y \geq 0; \quad \omega_1 = \omega_0 \vee_0 (f_1 \wedge_0 f_2) \geq 0;$$

$$f_1 = \frac{1}{2}(x\sqrt{3} - y + a\sqrt{3}) \geq 0; \quad f_2 = \frac{1}{2}(-x\sqrt{3} - y + a\sqrt{3}) \geq 0;$$

$$\omega_{21} = \omega_1(3(x+2a), 3y) \geq 0;$$

$$\omega_{22} = \omega_1 \left(3 \left(\frac{x+a/2}{2} + \left(y - \frac{a\sqrt{3}}{2} \right) \frac{\sqrt{3}}{2} \right), 3 \left(-(x+a/2) \frac{\sqrt{3}}{2} + \left(y - \frac{a\sqrt{3}}{2} \right) \frac{1}{2} \right) \right) \geq 0;$$

$$\omega_2 = (\omega_{21}(x, y) \vee_0 \omega_{22}(x, y)) \wedge_0 (\omega_{21}(-x, y) \vee_0 \omega_{22}(-x, y)) \geq 0;$$

$$\omega_{k1} = \omega_{k-1}(3(x+2a), 3y) \geq 0;$$

$$\omega_{k2} = \omega_{k-1} \left(3 \left(\frac{x+a/2}{2} + \left(y - \frac{a\sqrt{3}}{2} \right) \frac{\sqrt{3}}{2} \right), 3 \left(-(x+a/2) \frac{\sqrt{3}}{2} + \left(y - \frac{a\sqrt{3}}{2} \right) \frac{1}{2} \right) \right) \geq 0;$$

$$\omega_k = (\omega_{k1}(x, y) \vee_0 \omega_{k2}(x, y)) \wedge_0 (\omega_{k1}(-x, y) \vee_0 \omega_{k2}(-x, y)) \geq 0 \quad (k = 3, 4, \dots).$$

На рис. 3 приведены линии уровня функции $\omega_k(x, y) \geq 0$, задающей кривую Коха для различных значений k .

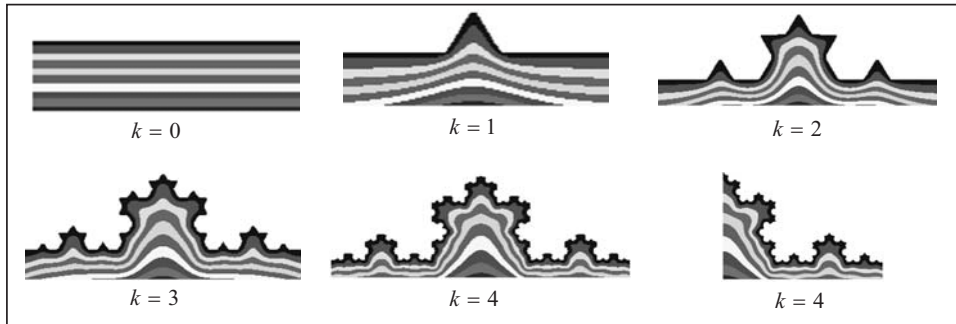


Рис. 3. Кривая Коха для различных значений k

Три копии кривой Коха, построенные (остриями наружу) на сторонах правильного треугольника, образуют замкнутую кривую, называемую снежинкой Коха. Снежинка Коха, или триада Коха является математической моделью кривой побережья, с которой работал Ричардсон. Размерность Хаусдорфа снежинки Коха составляет $\ln 4 / \ln 3 \approx 1.26$ (при увеличении снежинки в три раза ее длина возрастает в четыре раза), т.е. она больше топологической размерности линии (равной единице), но меньше евклидовой размерности плоскости, на которой она расположена. Отсюда следует, что снежинка Коха представляет собой линию бесконечной длины, ограничивающую конечную площадь. Итальянский математик Э. Чезаро, удивленный внутренней бесконечностью и самоподобием снежинки Коха, в 1905 г. писал : «Если бы она была одарена жизнью, то можно было бы лишить ее жизни, только уничтожив кривую в целом. В противном случае она бы возрождалась снова и снова из глубины своих треугольников, как это делает жизнь во Вселенной». Зная уравнение кривой Коха $\omega_k(x, y) \geq 0$, можно построить уравнение снежинки Коха (рис. 4), выполнив следующие преобразования:

$$\omega S_k = \omega_k(r \sin \mu, r \cos \mu - R) \geq 0, \quad (1)$$

где $\mu(n\theta) = \frac{2}{n} \arcsin \left(\sin \frac{n\theta}{2} \right)$, $r = \sqrt{x^2 + y^2}$, $\theta = \arctg \frac{y}{x}$, R — радиус окружности,

вписанной в правильный n -угольник со стороной, равной отрезку, на котором строится кривая Коха.

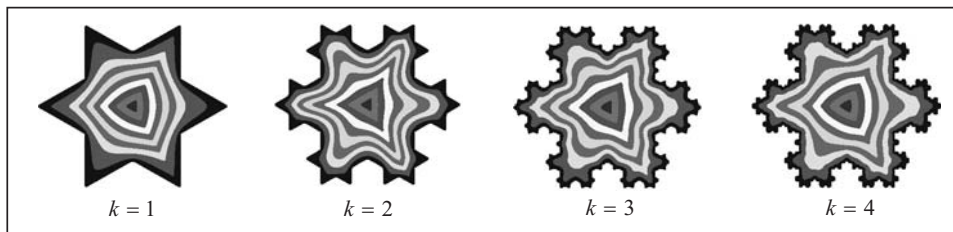


Рис. 4. Снежинка Коха на сторонах правильного треугольника для различных значений k

Пользуясь данной методикой, можно строить фрактальные снежинки на сторонах различных правильных многоугольников, например на сторонах квадрата (рис. 5).

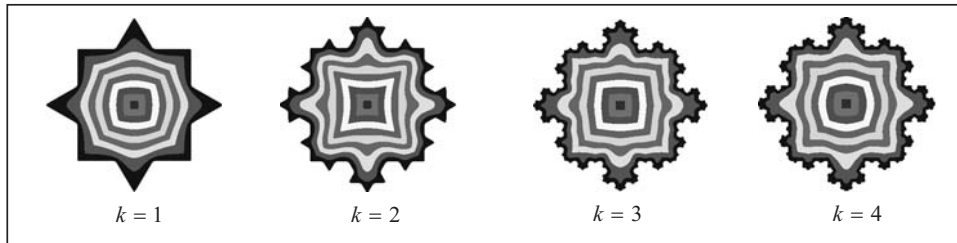


Рис. 5. Снежинка Коха на сторонах квадрата для различных значений k

Можно построить крест Коха на сторонах квадрата, проводя построение внутрь квадрата. Для этого выполним построение кривой Коха, заменяя средний интервал равносторонним треугольником, ориентированным вниз, без этого сегмента. Повторяем операцию для каждого из четырех получившихся звеньев и т.д. Метод R -функций позволяет легко получить такую кривую, взяв отрицание функции, построенной ранее (рис. 6).

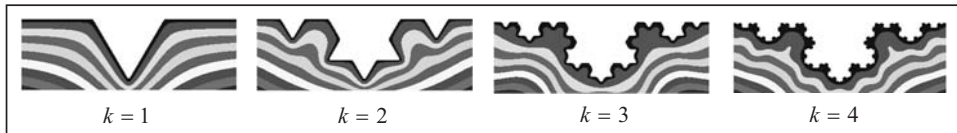


Рис. 6. Картины линий уровня функции $\omega_k(x, y) \geq 0$, задающей переориентированную кривую Коха для различных значений k

Зная уравнение переориентированной кривой Коха, можно построить уравнение креста Коха (рис. 7), выполнив преобразования, аналогичные (1).

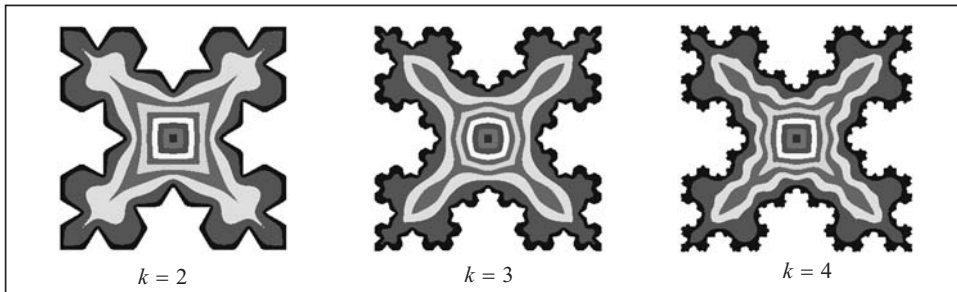


Рис. 7. Крест Коха на сторонах квадрата для различных значений k

Рассмотрим фрактал Леви, предложенный французским математиком П. Леви. Для построения берем равнобедренный прямоугольный треугольник (рис. 8, $k = 1$), а затем каждый катет заменяем подобным треугольником (рис. 8, $k = 2$). Повторяя эту операцию, в пределе получим фрактал Леви. Выполним построение на интервале $-3a \leq x \leq 3a$:

$$\omega_1(x, y) = y \wedge_0 ((x - y + 3a) \wedge_0 (-x - y + 3a)) \geq 0,$$

$$\omega_{k1}(x, y) = \omega_{k-1}(x + y + 1.5a, -x + y - 1.5a) \geq 0;$$

$$\omega_{k2}(x, y) = \omega_{k1}(-x, y) \geq 0,$$

$$\omega_k(x, y) = \omega_{k1}(x, y) \vee_0 \omega_{k2}(x, y) \geq 0 \quad (k = 2, 3, 4, \dots).$$

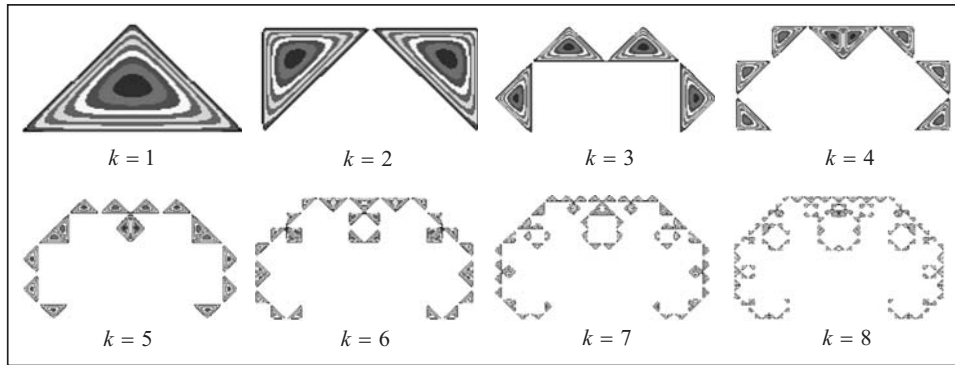


Рис. 8. Фрактал Леви для различных значений k

Пифагор, доказывая свою знаменитую теорему, построил фигуру, где на сторонах прямоугольного треугольника расположены квадраты. В наш век эта фигура Пифагора выросла в целое дерево. Впервые дерево Пифагора построил А.Е. Босман во время Второй мировой войны, используя обычную чертежную линейку. Одним из свойств дерева Пифагора является то, что если площадь первого квадрата равна единице, то на каждом уровне сумма площадей квадратов тоже будет равна единице.

Пусть начало координат находится в центре квадрата, построенного на гипотенузе. Тогда уравнение этого квадрата $\omega_0 = \frac{a^2 - x^2}{2a} \wedge_0 \frac{a^2 - y^2}{2a} \geq 0$. Уравнение квадрата, построенного на правом катете, имеет вид

$$\omega_{p_1} = \frac{0.5a^2 - x_1^2}{a\sqrt{2}} \wedge_0 \frac{0.5a^2 - y_1^2}{a\sqrt{2}} \geq 0,$$

где осуществляется перенос начала координат и поворот на угол $\pi/4$ заменой

$$x_1 = \frac{\sqrt{2}}{2}((x-a) + (y-2a)), \quad y_1 = \frac{\sqrt{2}}{2}(-(x-a) + (y-2a)).$$

Уравнение квадрата, построенного на левом катете, будет иметь вид $\omega_l(x, y) = \omega_{p_1}(-x, y) \geq 0$. Таким образом, уравнение основного элемента дерева Пифагора (рис. 9, $k=1$) можно записать $\omega_1(x, y) = \omega_0 \vee_0 (\omega_{p_1} \vee_0 \omega_l) \geq 0$. Тогда итерационный процесс построения дерева Пифагора (рис. 9) запишем так:

$$\begin{aligned} \omega_{k-1,1}(x, y) &= \omega_{k-1}(2(x-1.5a), 2(y-3.5a)) \geq 0, \\ \omega_{k-1,2}(x, y) &= \omega_{k-1}(-2(y-2a-a/2), 2(x-2a-a/2)) \geq 0, \\ \omega_{p_k}(x, y) &= \frac{\omega_{k-1,1}(x, y)}{2^{k-1}} \vee_0 \frac{\omega_{k-1,2}(x, y)}{2^{k-1}} \geq 0, \quad \omega_l(x, y) = \omega_{p_k}(-x, y) \geq 0, \\ \omega_k(x, y) &= \omega_{k-1} \vee_0 (\omega_{p_k} \vee_0 \omega_l) \geq 0, \quad k=2, 3, \dots \end{aligned}$$

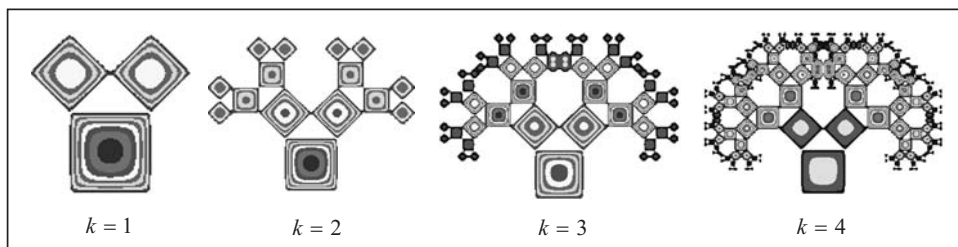


Рис. 9. Дерево Пифагора для различных значений k

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Математический аппарат теории R -функций оказался весьма удобным для описания объектов фрактальной геометрии функциями $\omega(x)=0, x \in E^n$ (или неравенствами $\omega(x) \geq 0$), где $\omega(x)$ имеет вид единого аналитического выражения. Для этого использовались следующие конструктивные средства:

- R -операции системы $\{R_0\} = \begin{cases} x \wedge_0 y = x + y - \sqrt{x^2 + y^2}, \\ x \vee_0 y = x + y + \sqrt{x^2 + y^2}, \\ \bar{x} = -x; \end{cases}$
- суперпозиции функции $\omega(\mu_{hx}, \mu_{hy})$ с периодическими функциями $\mu_{hx} = \frac{h_x}{\pi} \arcsin \left(\sin \frac{\pi x}{h_x} \right), \mu_{hy} = \frac{h_y}{\pi} \arcsin \left(\sin \frac{\pi y}{h_y} \right)$, позволяющие транслировать заданную функцию $\omega(x, y)$ вдоль осей с шагом h_x и h_y ;
- суперпозиции функции $\omega(x_1 - R, y_1)$, где $x_1 = r \cos \mu; y_1 = r \sin \mu; \mu(\theta) = \frac{2}{n} \arcsin \left(\sin \frac{n\theta}{2} \right); r = \sqrt{x^2 + y^2}, \theta = \arctg \frac{y}{x}$, позволяющие транслировать заданную функцию $\omega(x, y)$ вдоль окружности радиуса R n раз;
- свойство подобия фигур, описанных уравнениями $\omega(x, y) = 0$ и $\frac{1}{K} \omega(Kx, Ky) = 0$, где K — коэффициент подобия.

В настоящей работе предложены основные подходы к построению с помощью теории R -функций уравнений объектов фрактальной геометрии и приведены наиболее известные из них. Разработанные методы позволили также построить фрактал Мандельброта, фрактал «коробка», губку Менгера в 3D и др.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Мандельброт Б. Фрактальная геометрия природы. — М.: Институт компьютерных исследований, 2002. — 666 с.
2. Пайтген Х.-О., Рихтер П.Х. Красота фракталов. — М.: Мир, 1993. — 206 с.
3. Федер Е. Фракталы. — М.: Мир, 1991. — 254 с.
4. Рвачев В.Л. Теория R -функций и некоторые ее приложения. — Киев: Наук. думка, 1982. — 552 с.
5. Кравченко В.Ф., Басараб М.А. Булева алгебра и методы аппроксимации в краевых задачах электродинамики. — М.: Физматлит, 2004. — 308 с.
6. Максименко-Шейко К.В. R -функции в математическом моделировании геометрических объектов и геометрических полей. — Харьков: ИПМаш НАН Украины, 2009. — 306 с.

*Поступила 16.06.2010
После доработки 18.10.2011*